АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

6008—7124

*

№ 6 1960

ПРОИЗВОДСТВЕННО-ИЗДАТЕЛЬСКИЙ КОМБИНАТ ВИНИТИ

МОСКВА

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

ИНСТИТУТА НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ АКАДЕМИИ НАУК СССР

ДИРЕКТОР ИНСТИТУТА профессор *А. И. Михайлов*

ГЛАВНЫЕ РЕДАКТОРЫ СЕРИЙ: член-корреспондент АН СССР *Н. В. Агеев* (Металлургия), канд. биологич. наук *В. П. Доброхвалов* (Биология), профессор *Е. Е. Захаров* (Геология, Горное дело), профессор *С. М. Лисичкин* (Экономика промышленности), профессор *С. М. Никольский* (Математика), профессор *К. Ф. Огородников* (Астрономия и геодезия), профессор *Ю. Г. Саушкин* (География), академик *Л. И. Седов* (Механика), *В. В. Серпинский* (Химия), профессор *Б. М. Тареев* (Электротехника), канд. техн. наук *В. З. Фрейдберг* (Машиностроение), профессор *И. А. Хвостиков* (Геофизика), профессор *Э. В. Шпольский* (Физика).

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Персоналия 2
Преподавание математики 6
Основания математики и математическая логика 9
Теория чисел 14
Алгебра 23
Многочлены и линейная алгебра 23
Группы 25
Поля, кольца и структуры 29
Алгебраическая теория схем связи и управления 35
Топология 38
Теория функций действительного переменного 50
Теория множеств 52
Приближение функций полиномами и их обобщениями 54
Теория функций комплексного переменного . . . 56
Дифференциальные уравнения 76
Обыкновенные дифференциальные уравнения 76
Уравнения в частных производных 89
Приложения к физике, технике и естественным наукам 103
Интегральные уравнения 114
Вариационное исчисление 116
Анализ (другие вопросы) 119
Числовые ряды 123
Специальные функции 127
Интегральные преобразования и операционное исчисление 130
Приложения общих методов математического анализа 131
Функциональный анализ 133
Теория вероятностей 150
Математическая статистика 152
Теория игр, исследование операций и математическая экономика 155
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов 159
Геометрия 162
Приложения геометрии 162
Элементарная геометрия 163
Аналитическая геометрия 164
Проективная и неевклидовы геометрии 164
Начертательная геометрия 166
Алгебраическая геометрия 166
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 168
Геометрия n-мерного пространства 171
Теория относительности 173
Глобальная теория дифференцируемых многообразий 178
Метрические методы в геометрии 179
Выпуклые многообразия 180
Численные и графические методы 181
Таблицы . . . . . —
Вычислительные машины и математические приборы 199
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 211
Авторский указатель 214

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийская ул., 14

REFERATIVNYI ZHURNAL

INSTITUTE OF SCIENTIFIC INFORMATION OF THE ACADEMY OF SCIENCES OF THE USSR

DIRECTOR OF THE INSTITUTE professor *A. I. Mikhailov*

CHIEF EDITORS OF THE SECTIONS: Corresponding Member of the A. S., USSR *N. V. Ageev* (Metallurgy), Candidate of Biological Sciences *V. P. Dobrokhvalov* (Biology), Professor *E. E. Zakharov* (Geology, Mining), Professor *S. M. Lisichkin* (Economics of Industry), Professor *S. M. Nikolsky* (Mathematics), Professor *K. F. Ogorodnikov* (Astronomy and Geodesy), Professor *Ya. G. Saushkin* (Geography), Academician *L. I. Sedov* (Mechanics), *V. V. Serpinsky* (Chemistry), Professor *B. M. Tareev* (Electrical Engineering), Candidate of Technical Sciences *V. Z. Freidberg* (Machine Building), Professor *I. A. Khvostikov* (Geophysics), Professor *E. V. Shpolsky* (Physics)

CONTENTS

General 1
History. Personalia 2
Teaching of mathematics 6
Foundations. Mathematical logic 9
Theory of numbers 14
Algebra 23
Polynomials, linear algebra 23
Groups 25
Fields, rings, lattices 29
Algebraic theory of communication and control circuits 35
Topology 38
Theory of functions of real variables 50
Theory of sets 52
Approximations of functions by polynomials and by their generalizations 54
Theory of functions of complex variables 56
Differential equations 76
Ordinary differential equations 76
Partial differential equations 89
Applications to physics, technology and natural sciences 103
Integral equations 114
Calculus of variations 116
Analysis (other aspects) 119
Numerical series 123
Special functions 127
Integral transforms, operational calculus . . 130
Applications of general methods of mathematical analysis 131
Functional analysis 133
Theory of probability 150
Mathematical statistics 152
Theory of games, operational research, mathematical economics 155
Applications of probabilities and statistical methods 159
Geometry 162
Applications of geometry 162
Elementary geometry 163
Analytical geometry 164
Projective und non-euclidean geometries. . . 164
Descriptive geometry 166
Algebraic geometry 166
Differential geometry of 3-dimensional space 168
Geometry of *n*-dimensional space 171
Theory of relativity 173
Global theory of differentiable manifolds . . 178
Metric methods in geometry 179
Convex manifolds 180
Numerical and graphical methods 181
Tables . . . . . —
Computers and mathematical devices 199
Application of computer devices 211
Author index 214

Editorial Office: Moscow D-219, Baltijskaya ulitsa, 14

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР профессор *С. М. Никольский*

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: академик *П. С. Александров*, академик *И. Н. Векуа*, академик *А. Н. Колмогоров*, член-корреспондент АН СССР *Ю. В. Линник*, профессор *А. И. Маркушевич*, профессор *М. А. Наймарк*, профессор *В. В. Немыцкий*, член-корреспондент АН СССР *П. С. Новиков*, профессор *Д. Ю. Панов*, профессор *К. А. Рыбников*, профессор *Н. В. Смирнов*, профессор *С. П. Фиников*

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ канд. физ.-матем. наук *А. А. Конюшков*

Рефераты 6008—7124 **№ 6** **Июнь 1960 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

Редактор *К. А. Рыбников*

6008. Международный симпозиум 1959 г. по цепям и теории информации (1959 International Symposium on Circuit and Information Theory. (Los Angeles, Calif. June 16th—18th, 1959.). IRE Trans. Circuit Theory, 1959, **6**, Spec. Suppl., 1—298 (англ.)

6009. I Всесоюзное совещание по математической лингвистике, Ленинград, 15—21 апр. 1959 г. Ломковская М. В., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 6, 213—222

6010. Летнее собрание в университетском парке. Шейфер (The summer meeting in University Park. Schafer R. D.), Bull. Amer. Math. Soc., 1957, **63**, № 6, 345—410 (англ.)

Информация об очередном, 62-м летнем заседании Американского математического общества 27—30 августа 1957 г. в Пенсильванском университете, совместно с другими смежными научными организациями. Тезисы 207 сообщений.

6011. Национальный совет преподавателей математики. Тридцать седьмое ежегодное заседание (The National Council of Teachers of Mathematics. Thirty-seventh Annual Meeting), Math. Teacher. 1959, **52**, № 3, 213—215 (англ.)

Заседание происходило в Далласе (Dallas) (Техас, США) 1—4 апреля 1959 г. Перечень прочитанных докладов. А. С. Кузичев

6012. О семинаре по метрической теории динамических систем в МГУ под руководством В. А. Рохлина. Абрамов Л. М., Синай Я. Г., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 6, 223—225

6013. Смотр студенческих научных работ по математике в г. Одессе. Калафати П. Д., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 6, 227—228

6014. Естественные науки в Демократической Германии. Гартке Вернер, Природа, 1959, № 10, 11—18

Автор — президент Немецкой Академии наук в Берлине — написал этот обзор к 10-летию ГДР. Относительно развития математики в Академии говорится: сделаны первые начинания в области чистой математики, созданы рабочие группы по анализу, алгебре, теории чисел. дифференциальной геометрии и математической физике, где главное внимание уделяется теории относительности. Более плодотворно развивалась прикладная математика. Здесь, прежде всего, разрабатываются: нелинейные колебания и их применение для теории регулирования, нестационарные течения газов и жидкостей, явления дифракции электромагнитных волн на телах ограниченных размеров. Большое внимание уделено внедрению методов статистического контроля за качеством продукции на народных предприятиях. К. А. Рыбников

6015. Математика и промышленность. Отчет. Уилкокс (Mathematics and industry — a report. Wilcox Marie S)., Math. Teacher, 1959, **52**, № 3, 215—216 (англ.)

Председатель комитета сотрудничества с промышленностью Национального совета США приводит примеры контактов между учебными заведениями и промышленностью и призывает к их расширению. А. С. Кузичев

6016. Чистая и прикладная математика. Нюстрём (Ren och tillämpad matematik. Nyström E. J.), Årsbok. Soc. scient. fennica, 1954—1955(1956), **33**, B, № 4, 1—10 (шведск.)

6017. Применение математики к сельскому хозяйству во вроцлавском (математическом) обществе. Перкаль (Zastosowania matematyki do rolnictwa w środowisku wrocławskim. Perkal J.), Zastosow. mat., 1956, **3**, № 1, 90—99 (польск.)

Описывается деятельность вроцлавских математиков за последние 7—8 лет в области применения математики к сельскохозяйственным задачам. Указаны 46 тем, как то: геометрическая характеристика таких понятий, как коэффициент эрозии, комковатость почвы, оценка влияния различных факторов на урожайность, применение статистических методов в физиологии растений, определение запасов луговых трав, запасов древесины в лесах, оценка математических методов, примененных дендрологом Черновским, и ряд других вопросов из области зоотехники, лесоводства и т. д. Указаны исполнители тем, методы использования результатов, некоторые неудачи, формы сотрудничества со специалистами по вопросам сельского хозяйства. Дана общая положительная оценка этому сотрудничеству. И. Б. Погребысский

6018. Научные теории и математические модели естественных явлений. Риос (Teorías científicas y modelos matemáticos de los fénomenos naturales. Ríos S.), Trab. estadíst., 1959, **10**, № 1, 31—42 (исп.)

Лекция, прочитанная на философском факультете Мадридского университета. Приводится мнение Чарльза Дарвина о роли математической статистики, а также разбирается ее применение на примере работ Менделя. И. Н. Веселовский

6019. Сознание в машинах. Маури (La conciencia de las máquinas. Mauri Jaime Termens), Rev. industr. y fabril, 1958, **13**, № 140, 254—258 (исп.)

Описываются черепахи д-ра Грея Уолтера, последняя из которых «Кора» по словам конструктора способна даже к воспитанию, а также гомеостат Эшби, который по мысли конструктора должен выполнять задачу мозга животного. И. Н. Веселовский

6020. О математической лингвистике. Зиновьев А. А., Вопр. философии, 1959, № 9, 132—140

Беглый обзор основных направлений в математической лингвистике в СССР. Обзор составлен на основании тезисов совещаний и оригинальных работ, ссылки на которые имеются в большом количестве в тексте статьи в сносках. С философской точки зрения автор считает наиболее существенными два вопроса, возникающие в математической лингвистике: 1) о применении статистических методов к исследованию языка; 2) о моделях языка. Л. Е. Майстров

6021. Предсказывающие выводы. Салмон (The predictive inference. Salmon Wesley C.), Philos. Sci., 1957, **24**, № 2, 180—190 (англ.)

Пересматриваются взгляды, развивавшиеся автором в статье «The short run» (Philosophy of Science, July, 1955), где он пытался решать индуктивную проблему с помощью вероятностной логики, сходной с рейхенбаховской. Теперь автор обсуждает ряд трудностей, обнаруженных им в правилах его вероятностной логики. Эти трудности в основном связаны с произволом, возникающим при переходе от частот конечных наблюдаемых образцов к представляющим их вероятностям, этим частотам бесконечных последовательностей, и обратно от этих вероятностей к предсказанию частот конечных последовательностей. Он показывает, что ряд разработанных им правил, призванных, скажем, улучшить правило индукции Рейхенбаха (регулятивные правила), в сущности почти ни к чему не приводят. Он высказывает надежду, что попытка финитизации вероятности, предпринятая, например, в неопубликованной докторской диссертации Х. Патнама, поможет исключить в какой-то степени этот произвол, по крайней мере именно это утверждает сам Патнам. Автор, однако, не уверен, приведет ли это к полному устранению произвола.

Б. Н. Пятницын

6022. Основы статистики. Махаланобис (The foundations of statistics. Mahalanobis P. C.). Санкия, Sankhyā, Indian J. Statist., 1957, **18**, № 1-2, 183—194 (англ.)

Переработанный и дополненный доклад, сделанный на Цюрихском симпозиуме в апреле 1953 г. Рассматривается индийское учение syādvāda, получившее распространение уже в VI—V вв. до н. э. В нем говорится, что относительно каждой вещи можно высказать предложения: 1) может быть есть; 2) может быть нет; 3) может быть есть и нет; 4) может быть неопределенно; 5) может быть и есть и неопределенно; 6) может быть нет и неопределенно; 6) может быть есть и нет и неопределенно. Автор подчеркивает, что syādvāda содержала диалектические моменты (например, утверждалось, что абсолютно предметы не существуют и не несуществуют, что все суждения относительны, что сама реальность относительна и изменяема, что всякая реальность теряет старые и приобретает новые качества и некоторые другие утверждения). Утверждение syādvāda о том, что природа конечных вещей многогранна, автор сравнивает с положением В. И. Ленина о неисчерпаемости природы. Автор считает, что в основных положениях syādvāda имеются зародыши вероятностных и статистических концепций, а также имеется прообраз некоторых современных утверждений, таких, как: определение понятия вероятности, утверждение о невозможности делать вывод о результате отдельно взятого случайного события и некоторые другие. Указывается связь между положениями syādvāda и современным подходом к статистическим исследованиям. Л. Е. Майстров

6023. Прагматизм, интуиционизм и формализм. Патин (Pragmatism, intutionism, and formalism. Patin Henry A.), Philos. Sci., 1957, **24**, № 3, 243—25 (англ.)

Изложены взгляды Пирса (Peirce C. S.), одного и основателей прагматизма, разновидности субъективного идеализма. Изложение сопровождается очень остр рожной критикой, основанной на рассмотрении некото рых математических вопросов (соизмеримость и несо измеримость и др.). Кратко затронуты взгляды боле поздних прагматистов: Льюис (Lewis C. I.), Дьюи (De wey J.). Изложены точки зрения интуиционистов и фор малистов с иллюстрацией на таких примерах, как во прос о доказательстве иррациональности $\sqrt{2}$ и некото рых других. Л. Е. Майстров

6024. Миниатюрные геометрии. Джонс (Miniatur geometries. Jones Burton W.), Math. Teacher 1959, **52**, № 2, 66—71 (англ.)

Возможны геометрии, которые являются «миниатюр ными» в том смысле, что они содержат конечное число точек. Автор ограничивается рассмотрением планимет рии. Аналогичные пространства с конечным числом то чек рассмотрены в книге О. Вольберг «Основные иде проективной геометрии», ОНТИ, Л.—М., 1935, изд. 2 Н. П. Бибикова

6025. Вторая заметка о степени подтверждения. Поппер (A second note on degree of confirmation. Popper Karl R.), Brit. J. Philos. Sci., 1957, **7**, № 28 350—353 (англ.)

Гэмблин предлагает (Hamblin C. L., Brit. J. Philos Sci., 1954, **5**, 83) определить степень подтверждения, в отличие от определения, данного автором (РЖМат, 1956 5046), следующим образом:

$$C(x,y)=\log_2(P(xy)/P(x)P(y)).$$

Учитывая это определение и замечания, высказанные по поводу его старого определения (J. G. Kemeny, C. L Hamblin, I. J. Good), автор предлагает новое определение степени подтверждения:

$$C(x,y)=E(x,y)/(1+nP(x)P(\bar{x},y)),$$

где $n \geqslant 1$, считая, что (1) скорее можно принять за определение $F(x,y)$.

Обсуждая вопросы, связанные с этими определениями, автор говорит, что можно многими способами определить $C(x,y)$ так, чтобы выполнялись все интересные свойства. Л. Е. Майстров

6026. Относительно статьи «О формах проявления законов диалектики в математике». Гермэнеску (In legătură cu articolul «Forma de manifestare a legilor dialecticii în matematici». Ghermănescu M.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 2, 95—96 (рум.)

Автор отмечает допущенные им ошибки и уточняет некоторые свои высказывания в одноименной статье (РЖМат, 1959, 2160). А. Н. Гливич

6027. Конкурс имени Миклоша Швейцера. Реньи The «Schweitzer Miklós» competition. (Rényi A.), Шусюэ цзиньчжань, 1958, **4**, № 2, 318—320 (кит.)

Сообщение о ежегодном конкурсе молодых математиков и студентов в Будапештском университете в честь молодого математика Миклоша Швейцера, погибшего в 1945 г. во время войны.

6028 К. Пространство, время и электрон. Перспективы кибернетики. Блом (Raum, Zeit und Elektron. Perspektiven d. Kybernetik. Blom Axel Viggo. München, P. Müller, 1959, 296 S., ill., 13.80 DM) (нем.)

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. ПЕРСОНАЛИЯ

6029. Развитие математики в народной Польше. Куратовский (Rozvoj matematiky v lidovém Polsku.

Kuratowski Kazimierz), Pokroky mat., fys. a astron., 1959, **4**, № 2, 235—240 (чешск.)

Речь, произнесенная 21 октября 1958 г. в Карловом университете в Праге в связи с присвоением звания почетного доктора университета. Отмечается, что в послевоенные годы быстро преодолеваются недостатки довоенной польской математики, заключавшиеся в ее односторонности (преимущественном развитии топологии и функционального анализа) и отрыве от практических приложений. Приводятся сведения о росте математических кадров, их научной продукции. Подчеркивается большое значение сотрудничества польских и чехословацких математиков. В. Ф. Рогаченко

6030. Математика в Польше: ее превратности и достижения. Голомб (Mathematics in Poland: its vicissitudes and triumphs. Gołąb Stanislaw), Scient. World, 1959, **3**, № 2, 13—15 (англ.)

Краткий обзор развития математики в Польше за последние 100 лет. Особое внимание уделяется возникновению Варшавской и Львовской математических школ в предвоенные годы, а также развитию польской математики после войны. В. Ф. Рогаченко

6031. Из истории развития физико-математических наук в Азербайджане. Абасзаде, Ибрагимов (Азәрбајчанда физика-риязијјат елмләринин инкишафы тарихиндән. Абасзадә А. Г., Ибрагимов И. И.), Азәрб. дәвләт пед. инст. әсәрләри, Тр. Азерб. гос. пед. ин-та, 1958, **4**, 127—139 (азерб.)

Приводится статистический материал о росте сети народного образования в Азербайджане. В частности, указывается на бурное развитие физико-математических наук в 1917—1958 гг. Авторы уделяют значительное место помощи русских ученых в организации новых кафедр и подготовке молодых специалистов по математике и физике. Перечисляются фамилии всех физиков и математиков республики. Обсуждаются вопросы создания терминологии физики и математики на азербайджанском языке и разработки проблем методики преподавания математики и физики, а также создания учебников и учебных пособий на азербайджанском языке. К. Т. Ахмедов

6032. Геометрия Моцзы. Хуа Шэн-у, Шусюэ цзясюэ, 1957, № 8, 1—2 (кит.)

Указываются геометрические определения, данные в философском сочинении Моцзы (V—IV вв. до н. э.), в котором содержатся также сведения по логике, оптике, динамике. Это определение параллельных, центра, сферы, линии, а также аксиомы о равенстве целого сумме частей его, о совмещении равных фигур при наложении и аксиома Архимеда. Э. И. Березкина

6033. Лекции по истории математики в Древней Греции. Башмакова И. Г., В сб.: Истор-матем. исследования. Вып. II. М., Физматгиз, 1958, 225—438

В 12 лекциях охвачена история математики в Древней Греции с VI в. до н. э. до VI в. н. э. Этот промежуток делится на два периода: математика классической древности (VI—IV вв. до н. э.) и математика эпохи эллинизма (IV в. до н. э.—VI в. н. э.). Первый период освещается в семи лекциях, последние пять лекций посвящены второму периоду. Автор широко использовал известную литературу. В некоторых лекциях автор излагает результаты своих исследований, широко использует современную символику, указывает на связи исследований XVII—XIX вв. с результатами работ математиков Древней Греции. С. Е. Белозеров

6034. Древнегреческий счетчик. Солла-Прайс (An ancient Greek computer. Solla Price Derek J. de), Scient. Amer., 1959, **200**, № 6, 60—67 (англ.)

В 1901 г. вблизи Антикитира среди обломков древнего судна водолазы обнаружили остатки механизма, напоминающего часы. Прибор представляет собой ящик, на стенках которого снаружи находятся три циферблата, а внутри — система зубчатых колесиков, функционировавшая, как предполагает автор, как эпициклическая или дифференциальная система. Изобретение этого прибора можно отнести только к первому столетию до нашей эры, точнее к восьмидесятым годам. Прибор представляет собой счетчик для расчета движения солнца, звезд и планет. Шкалы на циферблатах тщательно проградуированы, а механизм изготовлен с большой степенью точности. По своей конструкции он превосходит самые сложные известные нам механические приборы древних греков. На основании изучения исламских астрономических приборов автор делает вывод, что эта находка является потерянным звеном, которое наука ислама до нас не донесла при передаче греческой науки Европе. А. Е. Раик

6035. О теореме Евклида: площади кругов относятся друг к другу как квадраты их диаметров. Стаматис (Über den euklidischen Satz, Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate über den Durchmessern. Stamatis Evangelos, Практика тис академиас Афинон 1955, **30**, 410—414 (греч., рез. нем.)

Автор дает альтернативное доказательство, основывающееся на выдержке из Архимеда по поводу второй части евклидова доказательства. S. H. Gould

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 4, 368

6036. Некоторые замечания относительно последовательных приближений методом итерации у древних греков. Стаматис (Stamatis Evangelos), Практика тис академиас Афинон, 1956 (1957), **31**, 336—343 (греч.; рез. англ.)

Метод заключается в том, что для определения x из уравнения $x = \varphi(x)$ берется какое-нибудь приближенное значение x_0, затем находится $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$ и т. д. Если $x_0, x_1, x_2 \ldots$ стремится к некоторому пределу ξ, то последний и будет одним из решений указанного уравнения. Это иллюстрируется на примерах $x^2 = 2$ и $x^3 = 3$, которые могут быть приведены к видам $x = (x+2)/(x+1)$ и $x = (x+3)/(x+1)$. Параллельно рассматриваются диагональные числа (в выдержках из Прокла и Теона Смирнского, а также из „Метрики" Герона). Показывается, что эти методы были известны древним грекам в эпоху Платона и Архита Тарентского. И. Н. Веселовский

6037. Приоритет Индии в математике. Сингх (Hindu superiority in mathematics. Singh A. N. Bull. Allahabad Univ. Math. Assoc., 1951—1956, **16**, 11—30)

Исторические заметки о названиях: десятичная позиционная символика, арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, дифференциальное и интегральное исчисление, конечные и бесконечные ряды.

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 710

6038. Об открытии Феррари. Войс (De vinding van Ferrari. Vooys C. J.), Euclides (Nederl.), 1959, **34**, № 7, 200—204 (гол.)

Автор утверждает, что латинский текст рассказа Кардано в его Ars magna (1545 г.) о решении уравнения четвертой степени $x^4 + 6x^2 + 36 = 60x$ его учеником Феррари — в том виде, как этот текст приводится Кантором (Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1913, II, 509) и Либри (Libri, Histoire des sciences mathématiques, III, 442), — страдает неясностью. Более понятным автор считает текст в латинском издании 1663 г. (Cardanus, Opera omnia, IV, 294, Lugduni). Он приводит указанный текст и дает его перевод вместе с кратким комментарием. Ю. М. Гайдук

6039. Неопубликованные математические исследования. Ногера (Unpublished mathematical investigations. Noguera Rodrigo. Studia. Rev. Univ. Atlantico, 1956, **1**, № 3—5, 107—148)

Исследования в основном посвящены истории проблемы разрешимости кубического уравнения в радикалах.

6040. Ивеляйн, Бойль и «Математико-химико-механическая школа» д-ра Уилкинсона. Коп (Evelyn, Boyle, and Dr. Wilkinson's «Mathematico-chymico-mechanical school». Cope Jackson I.), Isis, 1959, **50**, № 1, 30—32

На основании переписки Ивеляйна с Бойлем высказывается мнение, что автором брошюры 1659 года о преобразовании преподавания в Оксфордском университете в сторону усиления естественно-научного направления был пуританин др. Уилкинсон, а также, что эта брошюра имела отношение к зарождению Лондонского Королевского общества. И. Н. Веселовский

6041. Исправление Principia. Холл (Correcting the Principia. Hall A. Rupert), Osiris, 1958, **13**, 291—326 (англ. и лат.)

Первое издание «Математических начал натуральной философии» (здесь сокращенно Principia) Ньютона вышло в свет в 1687 г. тиражом 300 экз.

В реферируемой статье дано подробное описание критических замечаний современников к секциям 1—4 книги II Principia и оживленной переписки по этому поводу. Также подробно указаны все исправления и изменения, внесенные Ньютоном во второе издание Principia (1713). Обращает внимание обилие фактов, литературных и архивных ссылок. К. А. Рыбников

6042. Работы Л. Эйлера по теории цепных дробей. Хованский А. Н. В сб.: Истор.-матем. исследования. Вып. 10. М., Гостехтеориздат, 1957, 305—326

Анализируя исследования о цепных дробях предшественников Эйлера (Р. Бомбелли, П. А. Катальди, Дж. Валлис, У. Брункер, Х. Гюйгенс), автор не находит попытки построения даже начальной теории цепных дробей. Сравнительно детально рассматриваются две первые работы Эйлера о цепных дробях, вошедших в первую часть его «Введения в анализ бесконечно малых». Автор отмечает, что особый интерес представляет разложение Эйлером некоторых функций в «соответствующие», а не «равноценные» (степенному ряду данной функции). Однако в работах Эйлера эти два случая (автор следует терминологии, предложенной Зейделем) не различаются. Далее характеризуются результаты Эйлера о разложении в цепные дроби некоторых чисел, многих элементарных функций, отдельных степенных рядов, интегралов дифференциальных уравнений, бесконечных произведений. Модернизируя содержание работы Эйлера De inventione quotcunque mediarum proportionalium citra radicum extractionem, Novi Comm. Acad. Petropolit., 1770, 14:1, 188—214 автор считает, что эта работа «кладет начало применению матриц для приближенного решения алгебраических уравнений» (стр. 323).

Дается краткий обзор дальнейших работ по цепным дробям в России XVIII в. и в начале XIX в.

Н. И. Симонов

6043. О переписке Леонарда Эйлера и Г. Ф. Миллера. Винтер Э., Юшкевич А. П. В сб.: Леонард Эйлер. К 250-летию со дня рождения. М., АН СССР, 465—498 (рез. нем.)

6044. К вопросу о мировоззрении Леонарда Эйлера. Котек В. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 126—127

6045. Н. И. Лобачевский. Норден А. П., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **3**. М., АН СССР, 1958, 583—588

Текст доклада, посвященного взглядам Лобачевского на основания геометрии, содержанию теоремы о параллелях в его не дошедшем до нас докладе и проведенному им обоснованию евклидовой геометрии для реального пространства путем сопоставления выводов воображаемой геометрии с астрономическими данными. Отмечается изменение взглядов Лобачевского на возможность обнаружения неевклидовости реального пространства в пределах видимого мира, выявившееся в его последних работах.

Развернутое изложение этих вопросов см. РЖМат 1959, 10669. Б. Л. Лаптев

6046. О связях математиков Тартуского университета XIX века с Лобачевским. Лумисте (Kilde Tartu Ülikooli XIX sajandi matemaatikute kokkupuuteist Lobatševskiga ja tema loominguga. Lumiste Ü.) Eesti loodus, 1959, № 3, 162—165 (эст.; рез. русск. англ.)

В конце 1836 г. Н. И. Лобачевский находился в Петербурге, откуда он совершил кратковременную поездку в Тарту к своему бывшему учителю проф. М. Бартельсу. В фундаментальной библиотеке Тартуского университета хранятся три труда Лобачевского с дарственными надписями Бартельсу. Начиная с 1843 г. в Тарту работал проф. Миндинг, в исследованиях которого имеются важные точки соприкосновения с научным творчеством Лобачевского. Автор приводит сведения о педагогической деятельности Миндинга и приходит к выводу, что в 70-х годах XIX в. у проф. Миндинга пробуждается интерес к трудам Лобачевского. Приводятся данные о первых в Эстонии статьях, посвященных Лобачевскому. Резюме автора

6047. Гаусс и неевклидова геометрия. Невалинна (Gauss and non-euclidean geometry. Nevanlinna Rolf. Nordisk Mat. Tidskr, 1956, **4**, 195—209, 229 (шведск., рез. англ.)

6048. Д. П. Гобдела. Последний профессор математики греческой Академии в Яссах. Попа (D. P. Gobdela Ultimul profesor de matematici al Academiei greceşti din Iaşi. Popa Ilie), Studii şi cercetari ştiinţ. Acad. RPR Fil. Iaşi Mat. 1958, **9**, № 2, 223—230 (рум.; рез. русск., франц.)

Для лучшего ознакомления с той ролью, которую сыграли в развитии румынской науки греческие Академии в Бухаресте и в Яссах автор предлагает изучить деятельность профессоров этих Академий. Для начала он кратко излагает жизнь и деятельность последнего из этих профессоров Д. П. Гобдела, анализируя его трактаты по Алгебре (1806) и Арифметике 1818).

Резюме автора

6049. Каспар Вессель и геометрическое введение комплексных чисел. Брун (Caspar Wessel et l'introduction géométrique des nombres complexes. Brun Viggo), Rev. histoire sci., 1959, **12**, № 1, 19—24 (франц.)

Краткие сведения о норвежце К. Весселе, работавшем в Дании топографом и картографом во второй половине XVIII и в начале XIX в. Главная часть статьи посвящена характеристике единственного научного труда К. Весселя, напечатанного в 1799 г. в «Трудах Датской Академии наук» под названием «Om directionens analytique betigning» и переизданного на французском языке в 1897 г. Автор считает, что геометрическая интерпретация комплексных чисел, предложенная Весселем в этой работе, настолько проста и хороша, что и теперь может считаться наилучшей. С. Е. Белозеров

6050. Лекция Римана и ее влияние на математику и физику. Историческое обозрение. Шредер (Riemanns Habilitationsvortag und seine Auswirkungen in Mathematik und Physik — ein historischer Überblick Schröder K. Schr. Forschungsinst. Math., 1957, 1 14—26) (нем.)

6051. Физические идеи Римана. Лампарьелло (Riemanns physikalisches Denken. Lampariello G. B. Schr. Forschungsinst. Math., 1957, 1 222—234) (нем.)

6052. Отзыв академика В. Я. Буняковского о работах И. Ф. Возняковского. Лобанова Т. В., Тр. Ин-та истории, естествозн. и техн. АН СССР, 1959, 22 289—292

Архивные данные. Положительное заключение о работах и технических изобретениях И. Ф. Возняковского (род. в 1817 г.), представленных в физико-математическое отделение Академии наук в 1847 г.

С. Е. Белозеров

6053. Неопубликованные рукописи А. М. Ляпунова. Сретенский Л. Н., Тр., 3-го Всес. матем. съезда, 1956. 3. М., АН СССР, 1958, 490—500

Архив А. М. Ляпунова содержит, помимо черновых записей, большое количество законченных работ. Подробно рассматриваются сочинения: «О движении твердого тела с жидкостью, заключающейся в чем» (205 стр.), «О равновесии равномерно вращающейся упругой жидкости» (162 стр.), «О движении твердого тела в жидкости», «Об интегрировании дифференциальных уравнений движения твердого тела в жидкости», исследования приложений равенства Парсеваля к некоторым специальным задачам вариационного исчисления и, наконец, заметка «О некоторых функциях, служащих для разложения потенциалов». Характеризуются другие неопубликованные рукописи А. М. Ляпунова. Автор специально отмечает работы А. М. Ляпунова, в которых он очень близко подошел к современной теории интегральных уравнений. В исследованиях, выполненных на рубеже XX в. А. М. Ляпунов построил, например, теорию интегральных уравнений с симметричным ядром (правда, приуроченную к специальной системе фундаментальных функций) и установил большинство относящихся сюда теорем, данных позже Гильбертом. В упомянутой выше работе о разложении потенциалов А. М. Ляпунов рассмотрел, в частности, уравнение

$$v - \lambda \int_S \frac{k' v'}{r}\, ds' = f,$$

где S — замкнутая поверхность, обладающая касательными плоскостями, k — плотность слоя Робэна; решение этого уравнения представлено им в виде ряда по степеням λ.

Г. К. Михайлов

6054. Пространство и время. Минковский Г., Успехи физ. наук, 1959, 69, № 2, 303—320

Воспроизведение с примечаниями А. Зоммерфельда известного доклада Г. Минковского «Raum und Zeit», произнесенного 21 сентября 1908 г. в Кельне. Опубликован в Phys. Z., 1909, **10**, 104. Русский перевод см. в издании «Классики естествознания. Принцип относительности», 1936, ОНТИ.

6055. Биографические данные о Иогане Кеплере. (Datos biograficos de Johan Kepler), Rev. mat., 1959, № 6, 56—64 (исп.)

6056. К столетию со дня рождения Джузеппе Пеано (1858—1932). Альварес-Ласо (En el centenario del nacimiento de Giuseppe Peano. Alvarez Laso José), Rev. mat., 1959, № 5, 1—13 (исп.)

6057. Чествование академика Н. Н. Боголюбова. Вестн. АН СССР, 1959, № 12, 87—88

6058. К восьмидесятилетию Беппо Леви. (Beppo Levi on his 80th anniversary. Rev. Union Mat. Argentina, 1955 (1956), 17 (исп.)

Краткая заметка с фотографией, сопровождаемая указанием всех его званий, должностей и списком опубликованных работ.

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 6, 550

6059. Александр и Вера Миллер. Попа (Alexander and Vera Myller. Popa Ilie. An. Sti. Univ. «Al. I. Cuza» Iaşi, 1955, Sect. I., xi—xxiv) (рум.)

Беглый биографический очерк с портретами известных румынских математиков, которые оба были студентами у Гильберта в начале этого столетия.

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 8, 710

6060. Николай Александрович Кильчевский (род. 1909). (К пятидесятилетию со дня рождения). Савин Г. К., Путята Т. В., Фрадлин Б. Н., Шахновский С. М., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 4, 431—433

6061. Николай Гурьевич Четаев (1902—1959). [Некролог].— Изв. АН СССР, Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 6, 3—6

6062. Вильгельм Людвиг (Некролог). Bette (Wilhelm Ludwig. (Nachruf). Wette R.), Biometr. Z., 1959, **1**, № 3, 147—149 (нем.)

Проф. В. Людвиг (1901—1959) был одним из основателей и руководителей немецкого отделения Международного биометрического общества.

6063. Петре Серджеску. Байдафф (Petre Sergescu... Baidaff Bernardo I.), Bol. mat., 1958, **31**, № 3-4, 13—16 (исп.)

Заметка о румынском математике Серджеску, непременном секретаре Академии истории наук в Париже. Приводятся задачи, предложенные или решенные Серджеску.

И. Я. Депман

6064 К. Очерк развития математики на Украине за 40 лет Советской власти. Штокало. Нарис розвитку математики на Україні за 40 років Радянської влади. Штокало Й. З., Київ, Видавництво Академії Наук Української РСР, 1958, 81 стор., 2 р. 25 к. (укр.)

Очерк, кроме вступления, содержит два вводных параграфа: а) о роли и особенностях советской математики и о взаимосвязях в работе русских и украинских математиков, б) краткую характеристику математических центров УССР и разбор работ, сгруппированных по математическим дисциплинам. При рассмотрении работ по алгебре и теории чисел основное внимание уделено школе Д. А. Граве. По теории функций действительного переменного выделены работы С. Н. Бернштейна, подробнее рассмотрены результаты его последователей и учеников по конструктивной теории функций. В области теории функций комплексного переменного центральное место занимают результаты М. А. Лаврентьева, охарактеризованы направления, в которых на Украине развивались его методы. В разделе, посвященном математической физике, анализируются: большой цикл работ Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова по нелинейной механике, исследования Н. Н. Боголюбова последнего десятилетия, многочисленные примыкающие к ним работы, в том числе и относящиеся к теории дифференциальных уравнений (теория устойчивости, асимптотические методы и т. д.). В том разделе, который специально посвящен этой теории, разбираются работы по аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, по уравнениям в частных производных эллиптического типа и др. Больше всего места здесь уделено анализу работ по так называемой формальной теории интегрирования уравнений в частных производных, принадлежащих Г. В. Пфейфферу. В разделе «геометрия» выделены исследования Д. М. Синцова и работы по геометрии в целом.

Большой вклад украинских математиков в дело развития функционального анализа составляет содержание особого раздела, но относящиеся сюда вопросы рассматривались и в связи с работами по теории функций, по дифференциальным уравнениям. Последние два раздела освещают работы по теории вероятностей и по математическим машинам.

И. Б. Погребысский

6065 К. Избранные труды. Шмидт О. Ю. Математика. Отв. ред. Курош А. Г. М., АН СССР, 1959, 315 стр., 17 р. 70 к.

Настоящий том избранных трудов О. Ю. Шмидта включает монографию «Абстрактная теория групп», воспроизводимую по второму изданию (1933), а также почти все работы по алгебре (1912—1947 гг). Первая из опубликованных работ «Über die Zerlegung endlicher Gruppen in direkte unzerlegbare Faktoren» не включе-

на в настоящий том, так как §§ 76—78 «Абстрактной теории групп» по существу являются переводом этой работы. В настоящий том включена также впервые публикуемая работа «Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп». Рукопись этой работы, датированная сентябрем 1947 г., найдена при разборе математических рукописей О. Ю. Шмидта. В других томах будут помещены работы О. Ю. Шмидта по изучению и освоению Арктики в Советском Союзе, геофизике, космогонии и общим вопросам науки.

Из предисловия А. Г. Куроша

6066 К. Математики до Ньютона. Вводная лекция, прочитанная в университетском колледже Родезии и Ньюсаленда. Мануэлл (Mathematics before Newton. An inaugural lecture given in the University College of Rhodesia and Nyasaland. Manwell A. R. London, Oxford Univ. Press, 1959, 57 pp., 4sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 477, 11 (англ.)

6067 К. Празднование в Луго столетия со дня рождения Грегорио Риччи Курбастро 2 мая 1954 г., организованное Государственным научным институтом «Грегорио Риччи Курбастро». (Celebrazione in Lugo del centanario della nascita di Gregorio Ricci Curbastro, 2 maggio 1954. A cura del Liceo Scientificio Statale «Gregorio Ricci Curbastro». Lugo, 1954, 93 p., ill.) (итал.)

6068 К. «Аренариус» Архимеда. Дейкстерхейс (The arenarius of Archimedes. Dijksterhuis E. J., Leiden, E. J. Brill, 1956, 24 pp., 1.90 gld.)

Стандартное издание сокращенного текста без какого-либо критического аппарата. Греческо-датско-английский словарь терминов с несколькими вводными замечаниями относительно дорийского диалекта, употребляемого Архимедом.

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 3, 268

ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ

6069. Сравнительный анализ математического образования молодежи. Фер (The mathematics education of youth. A comparative study. Fehr Howard F.), Enseign. math., 1959, 5, № 1, 61—78 (англ.)

Отчет, представленный Математическому конгрессу в Эдинбурге (1958 г.) от имени Международной комиссии по преподаванию математики. В основу отчета положены 16 национальных отчетов (СССР, США, Индии, Австрии, Канады, Финляндии, Франции, ФРГ, Великобритании, Венгрии, Италии, Японии, Югославии, Голландии, Норвегии и Швеции). Отчет содержит обзор материала по вопросам: 1) содержание программ обучения до 15-летнего возраста включительно; 2) организация школы и распределение учебного материала по годам обучения; 3) классификация учеников по успеваемости, а также отбор классов для подготовки в университеты; 4) методы обучения и цели образования; 5) подготовка учителей математики; 6) система экзаменов; 7) философский, общеобразовательный и психологический аспекты математического преподавания. Многие страны выдвигают предложения по перестройке преподавания, в том числе следующие: 1) унификация преподавания математики путем ликвидации отдельных предметов (арифметика, алгебра, геометрия), что даст возможность более стройно и последовательно излагать материал, привлекая в каждом вопросе по необходимости арифметико-алгебраические и геометрические средства; 2) раннее введение алгебры путем обобщения знаков арифметики; 3) широкое применение моделирования; 4) включение в программу некоторых понятий современной математики для подготовки к изучению высшей математики, а также для придания единства и большей завершенности элементарной математике; 5) введение начал теории вероятностей и статистики в арифметику и алгебру. Отчет заканчивается кратким обзором преподавания элементарной математики в США.

В. И. Левин

6070. Сравнительный анализ методов преподавания начал геометрии. Фрёйденталь (A comparative study of methods of initiation into geometry. Freudenthal Hans), Enseign. math., 1959, 5, № 2, 119—139 (англ.)

Обзорный доклад на Международном математическом конгрессе 1958 г. в Эдинбурге, сделанный по поручению Международной комиссии по преподаванию математики на основании отчетов, представленных Бельгией, Канадой, Финляндией, ФРГ, Италией, Японией, Голландией, Польшей, США и Югославией. Большое внимание уделяется роли и месту дедуктивного изложения геометрии на основе начального пропедевтического курса. В большинстве национальных отчетов признается, что в наше время оперативные навыки и практические умения ценнее непродуктивных знаний; это положение должно определять структуру и характер курса геометрии. Таким образом постепенно возникает движение за пересмотр точки зрения на дедуктивную геометрию в школе. Влияние Эрлангенской программы на преподавание геометрии в школе в общем было благотворно, но в школьной практике общая идея преобразования была подменена движением фигур на плоскости и тел в пространстве. Автор предлагает в качестве нетривиального в этом смысле преобразования взять осевую симметрию и положить это понятие в основу изучения других преобразований (поворот, параллельный перенос и т. д.).

Приводятся данные по разным странам о возрасте учащихся, приступающих к изучению дедуктивного курса геометрии (от 12 лет в большинстве европейских стран до 15—16 лет в США и Канаде). Максимальная продолжительность начального курса геометрии в США и Японии — 3 года; оптимальной продолжительностью автор считает 1,5—2 года, когда возможности учащихся воспринимать дедуктивный курс становятся уже ясными. Формулировка теорем рекомендуется уже в начальном курсе, но имеется общее отрицательное отношение к введению аксиом в школе и к «доказательству» «очевидных» предложений.

В. И. Левин

6071. Программа по математике экзаменационной комиссии по приему в высшие учебные заведения. Такер (Programme de mathématiques de la Commission des mathématiques du conseil des examens d'admission dans les collèges (college entrance examination board). Tucker Albert-W.), Enseign. math., 1959, 5, № 2, 115—118 (франц.)

Комиссия была создана в США в 1955 г. с целью «пересмотра программы вступительных экзаменов в направлении требований науки второй половины XX в.». Комиссия руководствовалась в своей деятельности следующими принципами: 1) математика современности сильно отличается от математики предшествующего поколения, школьное же преподавание остается неизменным; 2) приложения математики значительно расширились и наиболее важные из них в настоящее время имеют дело со статистическими явлениями; 3) современные тенденции унификации и синтезирования математических наук могут быть с пользой учтены в организации преподавания математики в школе; 4) содержание программ и направление всего изучения математики в школе должно определяться потребностями других наук, а также технологией производства. Рекомендации сводятся к следующему: на первом году обучения (второго этапа) содержание курса алгебры может быть оставлено по существу старым, однако алгебра должна рассматриваться не как система правил употребления символов, а как теория ма-

тематических построений. С самого начала надо ввести понятие множества и применять дедукцию так же, как она применяется в геометрии. Второй год должен быть в основном посвящен геометрии, включая простейшие вопросы аналитической геометрии. Следует отказаться от традиционного деления курса на планиметрию и стереометрию, объединяя двумерные и трехмерные задачи по их геометрическому существу. Необходимо также изучать начала сферической геометрии и довести до сознания учащихся принципиальные различия двух двумерных геометрий (плоскости и сферы). Третий год должен быть посвящен продолжению алгебры и тригонометрии, удельный вес теории логарифмов и логарифмических таблиц должен быть резко уменьшен. На этом заканчивается обязательное обучение математике для лиц, желающих продолжать свое образование в гуманитарных высших учебных заведениях. Для продолжения образования по физико-математической и технической линии предусмотрен четвертый год обучения математике в средней школе, где должна изучаться теория множеств («конечная математика») и элементы математического анализа. В. И. Левин

6072. Стереометрия как требование при поступлении в технические учебные заведения. Киди (Solid geometry as an entrance requirement for engineering schools. Keedy M. L.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 2, 121—123 (англ.)

Автор указывает, что многие средние школы США исключили стереометрию из учебного плана. Отдел математики специальной экзаменационной комиссии (College Entrance Examination Board) рекомендовал изучать основы стереометрии на подготовительных курсах в колледж и указал, что семестровый курс не является необходимым. В США имеется 147 учебных заведений, аккредитованных Техническим советом профессионального обучения (Engineer Council for Professional Development). Только 38 из них требуют от поступающих знания стереометрии, да и то 9 собираются ликвидировать это требование, а в 23 других студент может поступить, не зная курса стереометрии, но он должен будет пройти его после поступления. Приведены списки опрошенных учебных заведений. Н. П. Бибикова

6073. Проект программы по математике, составленный Мэрилэндским университетом. Киди (The University of Maryland Mathematics Project. Keedy M. L.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 4, 281—282 (англ.)

Характерные особенности программы средней школы США, составленной Мэрилэндским университетом, состоят в следующем: соединение курсов арифметики и алгебры; изучаются свойства различных систем счисления; упрощается, где это возможно, терминология; обращено внимание на связь математики с окружающим миром и на применение индукции и дедукции.

Е. В. Вандышева

6074. Соображения по поводу введения общих числовых символов. Вальш (Betrachtungen zur Einführung allgemeiner Zahlsymbole. Walsch Werner), Math. und Phys. Schule, 1959, **6**, № 4, 204—213 (нем.)

Рассмотрение вопроса о применении буквенной символики как с математической, так и с психологической точек зрения. Указывается роль буквенной символики в арифметике для формулировки математических высказываний и функций-высказываний. В теории функций буквенная символика служит задаче письменного представления функции. С психологической точки зрения существенно при оперировании с буквенными выражениями умение каждое данное сложное выражение рассматривать как нечто целое, обладающее определенной структурой; надо приобрести навык узнавать эту структуру в других частных случаях. Из этих общих положений автор делает методические выводы.

С. И. Новоселов

6075. Обучение математике выдающихся студентов. Робертсон (Mathematics training for the exceptional student. Robertson Fred). Proc. Iowa Acad. Sci., 1957, **64**, 448—452 (англ.)

Описание эксперимента: обучение способных студентов государственного колледжа в Айове по особой программе, предусматривающей изучение соответствующих курсов в более короткие сроки. Эксперимент проводился в течение 10 лет (с 1946 по 1956 г.). Некоторые результаты эксперимента записаны в таблицах. В выводах указаны положительные стороны и недостатки предложенной программы обучения. Сама программа не приводится, так как автор считает, что ее успешное осуществление должно быть еще проверено. Е. В. Вандышева

6076. Рекомендации по подготовке преподавателей естествознания и математики (Recommendation for the preparation of high school teachers of science and mathematics—1959), School Sci. and Math., 1959, **59**, № 4, 281—289 (англ.)

Констатируются причины, вызвавшие необходимость пересмотра системы подготовки учителей в США. Главными являются: 1) значительный прогресс математики и естествознания за последнее десятилетие; 2) отставание в подготовке учителей; 3) возрастающая потребность в учителях широкого профиля, способных преподавать 2—3 предмета. Приводятся основные показатели учебных планов для учителей математики первой и второй ступени и учителей математики и физики (или математики и химии и т. д.). Учителя математики старших классов (второй ступени) должны в течение 5 лет обучения слушать математические дисциплины в среднем 7,5 час. каждую неделю в течение четырех лет и 12 час. в неделю на V курсе. Предметы естественно-научного цикла занимают в среднем 2,5 часа в неделю все 5 лет. Основные математические курсы: анализ — 200 час. (тригонометрия, аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве, дифференциальное и интегральное исчисления, дифференциальные уравнения, бесконечные ряды); прикладной анализ — 100 час. (механика, математическая физика, астрономия, интерполяция, конечные разности, численные методы, линейное программирование, операционный анализ); теория вероятностей и статистика — 50 час.; алгебра — 50 час. (абстрактная алгебра: поля, кольца, группы, линейная алгебра, векторные пространства; теория матриц, теория чисел, теория уравнений); геометрия — 50 час. (проективная геометрия, аффинная геометрия, неевклидовы геометрии, дифференциальная геометрия, топология); основания математики — 50 час. (теория множеств, математическая логика, основания геометрии, основания алгебры, основания арифметики, действительные и комплексные числа). В. И. Левин

6077. Преподавание статистики. Аллюссон (L'enseignement de la statistique. Allusson R.), Ingrs et cadres France, 1959, № 70, 21—23 (франц.)

Цель статьи: рассказать о системе подготовки статистических кадров во Франции. Эта подготовка происходит: 1) в институте статистики, организованном при Парижском университете в 1920 г., 2) в школе, организованной в 1947 г. при INSEE (государственный институт статистики и экономических исследований). Кратко описаны системы обучений с указанием изучаемых предметов и структуры этих учебных заведений. Дана аннотация журнала «Revue de statistique appliquée», издающегося с конца 1952 г. Л. Е. Майстров

6078. Учебный план по математике для средней школы. Доклад комитета по составлению программ для средних школ Национального совета учителей математики (The secondary mathematics curriculum. Report of the Secondary-School Curriculum Committee of

the National Council of Teachers of Mathematics), Math., Teacher, 1959, **52**, № 5, 389—417 (англ.)

Подчеркнута важность математики как существенной части культуры и быстрота, с которой она изменяется и сама вызывает изменения. Поставлены вопросы о необходимости переоценки места математики в обществе, о содержании математических программ школы, о методах обучения. Рассмотрены следующие вопросы: ориентация программы, содержание учебного плана, выполнение программы; учитель. Учитель математики VII—XII классов должен быть компетентен в вопросах: 1) тригонометрии, аналитической геометрии на плоскости и в пространстве, математического анализа; 2) основ математики — теории множеств, математической или символической логики, систем постулатов, систем действительных и комплексных чисел; 3) алгебры — матриц и детерминантов, теории чисел, теории уравнений, структуры алгебры: 4) геометрии — евклидовой и неевклидовой, метрической и проективной, синтетической и аналитической; 5) статистики — теории вероятностей и выводов статистики; 6) применений — механики, теории игр, линейного программирования и исследования действий.

В заключение указываются ассигнования на проведение тестов, на руководство одаренными учащимися, на институты повышения квалификации и т. д. Приводится список членов комитета и консультантов.

Н. П. Бибикова

6079. Построение и использование номограмм в обучении математике в средних общеобразовательных и политехнических училищах. Славов (Построяване и използуване на номограми в обучението по математика в средните общообразователни политехнически училища. Славов Койчо К.), Матем. и физика (Бълг.), 1959, **2**, № 4, 37—40 (болг.)

Излагаются примеры применения графиков для приближенного определения величин. Н. С. Бахвалов

6080. «Первый» («предварительный») учитель и интерес учащихся к математике и физике. Стоун (Student interest in science and mathematics and the «introductory» teacher. Stone Vernon W.), School Sci. and Math., 1959, **59**, № 4, 249—254 (англ.)

Излагается опыт одной школы в США, где учителя младших классов могли вести несколько предметов. Для определения рациональной расстановки педагогических сил был произведен письменный опрос учащихся с целью выявления «лучшего учителя». В результате этой баллотировки «лучшим» учителям было поручено преподавание математики и физики, обычно вызывающих наименьший интерес среди учащихся. Отмечается, что эта мера привела к тому, что в старших классах больше учащихся выразило желание изучать дополнительные математические предметы. В. И. Левин

6081. О новых методах преподавания геометрии в средней школе. Зебах (Über neue Methoden im Geometrieunterricht der höheren Schule. Seebach K.), Math. und naturwiss. Unterr., 1958, **10**, № 8, 337—340 (нем.)

Автор считает, что наибольшего внимания заслуживают проблемы: 1. Какова продолжительность пропедевтического курса геометрии. 2. Желательно ли преподавание геометрии в духе фузионизма (объединенный курс планиметрии и стереометрии)? 3. Следует ли вместо понятия конгруэнтности полностью или частично использовать понятия отображения и группы?

Рассматриваются следующие исходные позиции при построении курса геометрии: А) Движение как производное понятие; Б) Движение как аксиоматическое понятие; С) Отражение как аксиоматическое понятие.

Н. Ф. Четверухин

6082. Обзор математических соревнований. Бак (A look at mathematical competitions. Buck R. Creighton), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 201—212 (англ.)

Краткое описание математических олимпиад учащихся средних школ, проведенных в некоторых городах Советского Союза, математических соревнований Венгрии и соревнования, проведенного секцией Математического общества в 1958 г. Приводятся тексты задач, предложенных участникам этих соревнований. Сообщаются результаты соревнования, проведенного Математическим обществом в 1958 г., упоминаются некоторые другие местные математические соревнования. Вносятся предложения по дальнейшему проведению математических соревнований. Приводится список литературы, посвященной математическим соревнованиям в различных странах. Е. В. Вандышев

6083. Отчет о деятельности Международной комиссии по преподаванию математики. Бенке (Tätigkeitsbericht der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission. Behnke Heinrich), Enseign. math., 1959, **5**, № 2, 146—152 (нем. и франц.)

Отчет сделан на пленуме комиссии в августе 1958 г. и посвящен пятидесятилетию ее существования. После краткого очерка истории деятельности комиссии автор говорит о подготовке к Эдинбургскому конгрессу 1958 г., к которому комиссия представила 3 рефераты, составленных по материалам 33 национальных комиссий: 1) преподавание математики для учащихся до 15 лет; 2) научные основы преподавания математики в старших классах средней школы; 3) сравнительный анализ методов преподавания начал геометрии. Докладчики: по теме 1—Фер, по теме 2—Бенке, по теме 3—Фрейденталь. Дальнейшая деятельность представляется затруднительной по финансовым соображениям. Автор, являвшийся президентом комиссии в 1955 — 1958 гг., рекомендует создать региональные подкомиссии, в рамках которых будет возможна без больших затрат активизация работы по обмену опытом, взаимным посещениям и т. п. Комиссия выделила подкомиссию в составе Курепы (Загреб), ван Данцига (Амстердам), Серве (Брюсель) и Фера (Нью-Йорк) для расследования причин недостатка учителей математики. В приложении к отчету дается новый состав комиссии на 1959—1962 гг. (президент: Маршалл Стоун).

В. И. Левин

6084 К. Отчет по поводу обозрения вопросов обучения и исследований в области прикладной математики в Соединенных Штатах. Уэйл (Report on a survey of training and research in applied mathematics in the United States. Weyl F. J. Philadelphia, Soc. Industr. and Appl. Math., 1956, vi, 58 pp., 2.00 doll.)

Проведено Национальным исследовательским советом по договору с Национальным научным фондом и опубликовано Обществом по промышленной и прикладной математике.

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 3, 268

6085 К. Общая математика: Алгебра — Анализ. Пизо, Заманский (Mathématiques générales. Algèbre-analyse. Pisot Charles, Zamanski Marc. Paris, Dunod, 1959, XXIV, 648 p., ill., 4500 fr.) (франц.)

Вводный курс математики, предназначенный для студентов как математических, так и технических факультетов. В части I введены некоторые понятия математической логики, теории множеств и др. Часть II (стр. 27—202) содержит: основные принципы алгебры, векторные пространства, матрицы, определители, евклидово пространство. Весь материал пронизан идеями линейной алгебры. Часть III (стр. 205—477) является самой обширной. В ней введены: теория действительного числа и теория функций одного действительного переменного. Особое внимание обращено на равномерную

сходимость и на введение понятия определенного интеграла. В конце части вводятся понятия векторных функций, функций нескольких переменных, криволинейных и двойных интегралов. Отличие этой части в том, что она построена на понятиях последовательности и равномерной сходимости. Часть IV (стр. 483—641) имеет практический характер. В ней помещены ряды, дифференциальные уравнения и т. д. Особенность учебника заключается в том, что введенные вначале понятия математической логики и абстрактной алгебры в дальнейшем использованы в изложении математического анализа. Недостаточно внимания уделено алгорифмам. В изложении материала примеры даются только изредка, поэтому начинающий встретится с большими трудностями. Полиграфическое оформление книги прекрасное. D. Mitrinović

6086 К. Прикладная математика для химиков, электроников и механиков. Рубио-Санхуан (Ampliación de matemáticas para químicos, electricistas y mecánicos 3ra ed. Rubio Sanjuan J. Barcelona, Labor, 1956, XV, 769 p., il. Bibliogr. hisp., 1957, **16**, № 5, 119 (исп.)

6087 К. Основы математики (Для вузов). (Математикис сапудзвлеби). Гокиели Л. П., Тбилиси, Тбилисск. ун-т, 1957 (1958), 586 стр., илл., 28 руб. (груз.)

6088 К. Арифметика. Развитие понятия числа и действий над числами. Пособие для фак. нач. школы пед. ин-тов и для пед. училищ. Андронов И. К., М., Учпедгиз, 1959, 360 стр., илл., 7 р. 10 к.

См. также: 6847 П, 6854—6857 К, 6863 К, 6864 К, 6882 К, 6886 К, 6888 К, 7103 К—7105 К.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Редакторы *П. С. Новиков, С. И. Адян*

6089. Классическая и ω-полная арифметика. Гжеторчик, Мостовский, Рылль-Нардзевский (The classical and the ω-complete arithmetic. Grzegorczyk A., Mostowski A., Ryll-Nardzewski C.), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 2, 188—206 (англ.)

Рассматриваются две арифметические системы над исчислением предикатов второй ступени с равенством и описательными определениями. Первая система, A, в качестве правил вывода содержит modus ponens и правила Бернайса для кванторов. Вторая, $A\omega$, кроме того, содержит правило Карнапа (у авторов — ω-rule). Система $A\omega$, в отличие от A, ω-полна (см., например, РЖМат, 1957, 3715), но, как показано в реферируемой заметке, «гиперарифметически неразрешима», т. е. не существует такого непротиворечивого расширения $A\omega$, что множество гёделевских номеров этой расширенной системы является гиперарифметическим (в определенном авторами смысле). Ю. А. Гастев

6090. Элементарные свойства полноты для интуиционистской логики с замечанием по поводу отрицаний предваренных формул. Крейсел (Elementary completeness properties of intuitionistic logic with a note on negations of prenex formulae. Kreisel G.), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 3, 317—330 (англ.)

Дается конструктивный подход к вопросу о полноте исчисления предикатов и устанавливается полнота для некоторых классов формул. Полнота понимается в следующем смысле: если формула (из рассматриваемого класса) выполняется в любой конструктивной модели, то она выводима в интуиционистском исчислении предикатов. Для доказательства таких теорем полноты достаточно рассматривать не произвольные конструктивные модели, а лишь модели определенного класса. Автор ограничивается моделями, в которых область индивидов есть натуральный ряд, а предикаты представимы через рекурсивные в обеих двухкванторных формах. Дается несколько вариантов понятия полноты, из которых основную роль играет слабая полнота через подстановку: для каждой формулы (из рассматриваемого класса) существует такая модель (указанного типа), что если формула не выводима (в интуиционистском исчислении предикатов), то она не выполняется в этой модели. При доказательствах слабой полноты через подстановку устанавливается даже выводимость последней импликации в некотором конструктивном арифметическом исчислении. Интуиционистское исчисление высказываний не является слабо полным через подстановку, ввиду того, что формула $P \vee \neg P$ не выводима, но и не опровержима на примере. Доказана слабая полнота через подстановку для класса формул, не содержащих дизъюнкции, импликации и кванторов существования, а также для класса формул, которые могут быть получены из других формул вставкой двойного отрицания перед каждой подформулой. При доказательстве используется теорема полноты для классического исчисления предикатов в том более подробном виде, как она дана в книге Гильберта и Бернайса (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, т. 2, Berlin, 1939, стр. 243—253). Доказательство для каждого из указанных классов основано на том, что существует операция погружения классического исчисления предикатов в интуиционистское, не меняющая формул из этого класса и их отрицаний. Существенность требования о неизменности отрицаний формул при погружающей операции демонстрируется сопоставлением следующих двух результатов: 1) слабая полнота через подстановку для класса отрицаний предваренных формул не может быть доказана средствами вышеупомянутого конструктивного арифметического исчисления (точнее, импликация, участвующая в определении слабой полноты через подстановку, не выводима в этом исчислении); 2) отрицание предваренной формулы выводимо в интуиционистском исчислении предикатов тогда и только тогда, когда оно выводимо в классическом (а это дает новую погружающую операцию из классического исчисления предикатов в интуиционистское, так как всякая формула исчисления предикатов классически эквивалентна отрицанию некоторой предваренной формулы). В заключение для отрицаний предваренных формул устанавливается некоторая теорема, аналогичная теореме Эрбрана. Г. С. Цейтин

6091. О малых моделях. Мальцев А. И., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 2, 258—261

Пусть K — класс всех моделей вида $\mathfrak{M} = < M, \{P_i\}, \{a_j\} >$, удовлетворяющих некоторой системе аксиом узкого исчисления предикатов, где P_i, a_j — символы основных предикатов и индивидуальных элементов; M — основное множество модели $\mathfrak{M}$. Общее число символов P_i, a_j называется порядком, а мощность M — мощностью модели $\mathfrak{M}$. Модели, мощность которых не меньше их порядка и в то же время бесконечна, называются правильными. Все остальные модели называются малыми. В статье рассматриваются особенности, встречающиеся при расширении малых моделей, а также ряд смежных вопросов. Вначале приводится два примера аксиоматизируемых классов моделей с указанными особенностями: первый класс с континуальным множеством

основных (одноместных) предикатов содержит конечные модели со сколь угодно большим числом элементов, но не содержит счетных моделей, так как во всякой бесконечной модели этого класса имеется подмодель мощности континуума; второй класс с континуальным множеством одноместных операций и счетным множеством индивидуальных элементов содержит счетную модель, все собственные расширения которой в том же классе имеют мощность не меньшую мощности континуума.

Далее доказывается теорема 1: Если аксиоматизируемый класс K содержит модель $\mathfrak{M}$ бесконечной мощности $\mathfrak{m}$, то $\mathfrak{M}$ обладает истинным K-расширением мощности $\mathfrak{m}^{\aleph_0}$. Если в K содержатся модели мощностей $\mathfrak{m}_1 < \mathfrak{m}_2 < \ldots$, то в K содержится и модель мощности $\mathfrak{n}$, удовлетворяющей условию $\mathfrak{m}_1 + \mathfrak{m}_2 + \ldots \leqslant \mathfrak{n} \leqslant \mathfrak{m}_1 \mathfrak{m}_2 \ldots$. Из второй ε-теоремы (Hilbert D., Bernays P., Grundlagen der Mathematik, 2, Berlin, 1939), теоремы 1 и обобщенной гипотезы континуума для любого аксиоматизируемого класса K следует, что каждая бесконечная K-модель допускает K-расширение любой наперед заданной мощности, большей мощности $\mathfrak{M}$.

Пусть теперь K — какой-либо класс моделей, α и β — кардинальные числа. Через $K_\alpha, K^\beta, K_\alpha^\beta$ обозначаются классы K-моделей, мощность $\mathfrak{m}$ которых удовлетворяет соответственно условиям $\alpha \leqslant \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \leqslant \beta$, $\alpha \leqslant \mathfrak{m} \leqslant \beta$.

Доказывается теорема 2: Пусть K, L — однотипные аксиоматизируемые классы моделей и для некоторого бесконечного кардинального α имеем $K_\alpha^\alpha \subset L$. Тогда $K_{\aleph_0} \subset L$, если α не меньше порядка K, и $K^\alpha_{\aleph_0} \subset L$ в остальных случаях. Эта теорема содержит в себе теорему о полноте Вота (РЖМат, 1955, 3020) и доказывается аналогично последней. Второе утверждение теоремы доказано в предположении истинности расширенной гипотезы континуума. В конце статьи указывается, что теорема 1 и следствие из нее остаются верными и для проективных классов моделей. Д. А. Захаров

6092. О свойствах, общих для исчислений высказываний и их моделей. Нолен (Sur les propriétés communes aux calculs des propositions et à leurs modèles. Nolin Louis), Z. math. Logik und Grundl. Math., 1958, **4**, № 2, 101—107 (франц.)

Свойства исчисления высказываний и алгебры, являющейся его адекватной (т. е. дающей точную интерпретацию) моделью, в общем случае не совпадают. Так, можно указать точную интерпретацию обычного классического исчисления высказываний посредством матрицы M с множеством выделенных элементов M_0, при которой не для всех a и b из $a \in M_0$ и $a \to b \in M_0$ следует, что $b \in M_0$ (в качестве M можно взять некоторую матрицу с тремя элементами).

Автор определяет широкий класс "исчислений высказываний" и для них — некоторый класс "свойств". Доказывается теорема, дающая полный ответ на вопрос о том, какие из рассматриваемых автором свойств переносятся с исчислений высказываний на их адекватные модели, а также с адекватных моделей на исчисления высказываний. Ю. Т. Медведев

6093. Теория моделей для исчисления предикатов высшего порядка. Ори (Model theory for the higher order predicate calculus. Orey Steven), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 1, 72—84 (англ.)

Пусть M_1 и M_2 — две формальные модели некоторого множества формул H, причем классы индивидуумов первого порядка M_1 и M_2 совпадают, а класс индивидуумов высшего порядка M_1 есть подкласс класса индивидуумов высшего порядка M_2. Пусть, далее, φ — предикатная формула, а Φ — определяемая ею система аксиом (Клини С. К., Введение в метаматематику, М., Изд-во ин. лит., 1957, 373—374); если при этом M_1 не является моделью для Φ или если M_2 является такой, то φ называется стандартной относительно множества формул H.

В реферируемой заметке доказывается ряд теорем, характеризующих свойства класса стандартных (относительно различных множеств H) формул, а также (определяемого автором) класса сильно стандартных формул (к которому, например, принадлежат все элементарные предикатные формулы). Ю. А. Гастев

6094. Об изоморфизме алгебр Линденбаума и полей множеств. Расева, Сикорский (On the isomorphism of Lindenbaum algebras with fields of sets. Rasiowa H., Sikorski R.), Colloq. math., 1958, **6**, № 2, 143—158 (англ.)

Пусть S — узкое исчисление предикатов (у. и. п.), W — множество всех правильно образованных формул в S. Для всякого множества $A \subset W$ обозначим через $S(A)$ элементарную теорию, базирующуюся на у. и. п. S и системе аксиом A; $\mathrm{Cn}(A)$ — совокупность всех теорем в $S(A)$. Пусть $S(A)$ непротиворечива. Алгеброй Линденбаума $L(A)$ теории $S(A)$ называется фактор-алгебра $W/_{\sim_A}$, где W рассматривается как абстрактная алгебра с операциями $+$, $\cdot$, $\to$, $-$, а $\sim_A$ есть конгруэнтность на W, именно, $\alpha \sim_A \beta$ (α, $\beta \in W$) означает, что $\alpha \to \beta \in \mathrm{Cn}(A)$ и $\beta \to \alpha \in \mathrm{Cn}(A)$. Элемент алгебры $L(A)$, определяемый формулой $\alpha \in W$, обозначается через $|\alpha|_A$. $L(A)$ является булевой алгеброй, в которой: 1) единичным элементом будет $e = |\alpha|_A$ для $\alpha \in \mathrm{Cn}(A)$; 2) $|\alpha|_A = |\beta|_A$ только тогда, когда $\alpha \to \beta \in \mathrm{Cn}(A)$; 3) $\sum_{\tau \in T} \left|\alpha \binom{\tau}{x}\right|_A = \left|\sum_x \alpha\right|_A$, $\prod_{\tau \in T} \left|\alpha \binom{\tau}{x}\right|_A = \left|\prod_x \alpha\right|_A$. (Здесь: T означает множество всех термов в S; $\alpha \binom{\tau}{x}$ — результат подстановки терма τ вместо x в формуле α, в предположении что сделаны необходимые переименования переменных; $\subset$, $\sum_{\tau \in T}$ и $\prod_{\tau \in T}$ — знаки булевых операций в $L(A)$ включения, бесконечной суммы и бесконечного произведения). Суммы и произведения вида (3) соответствуют логическим кванторам и называются l-суммами и l-произведениями. Булев изоморфизм h алгебры $L(A)$ на поле множеств называется l-изоморфизмом, если он сохраняет все l-суммы и l-произведения. Алгебра Линденбаума $L(A)$ называется представимой полем множеств, если существует l-изоморфизм между $L(A)$ и некоторым полем множеств.

Исследуется вопрос, при каких условиях алгебра Линденбаума представима указанным образом. Введем определения. Фильтром f булевой алгебры $\langle \mathfrak{A}, +, \cdot, - \rangle$ называется непустое подмножество f в $\mathfrak{A}$, $f \neq \mathfrak{A}$, удовлетворяющее условиям: 1) если $a, b \in f$, то $a \cdot b \in f$; 2) если $a \in f$ и $b \in \mathfrak{A}$, то $a + b \in f$. Фильтр f называется простым, если из $a + b \in f$ следует $a \in f$ или $b \in f$. Простой фильтр f алгебры $L(A)$ называется l-фильтром, если из условия $\left|\sum_x \alpha\right|_A \in f$ следует $\left|\alpha \binom{\tau}{x}\right|_A \in f$ для некоторого $\tau \in T$. Через $\|\alpha\|_A$ обозначается множество всех l-фильтров в $L(A)$, содержащих $|\alpha|_A$. Система всех $\|\alpha\|_A$ для $\alpha \in W$ образует поле множеств, обозначаемое через $L_1(A)$.

Доказывается теорема (I): $L(A)$ представима полем множеств тогда и только тогда, когда для всякой формулы $\beta \in W$, не опровержимой в $S(A)$, существует l-фильтр f такой, что $|\beta|_A \in f$. В условиях этой теорем

$L(A)$ оказывается представимой полем $L_1(A)$, и это представление называется каноническим.

Далее вводятся понятия обобщенной алгебраической модели, обобщенной модели и просто модели теории $S(A)$ путем надлежащего истолкования ее примитивных символов на непустом множестве J. Первое понятие получается, когда логические операции $+, \cdot, \to, -, \sum_x$ и $\prod_x$ рассматриваются как соответствующие операции в полной булевой алгебре $\mathfrak{B}$, второе — когда $\mathfrak{B}$ является двуэлементной, третье — когда, сверх того, знак $=$ трактуется как характеристическая функция отношения равенства (а не конгруэнтности, как прежде). Доказывается ряд теорем, связывающих представимость $L(A)$ и существование l-фильтров с существованием обобщенных моделей того или иного вида. Например, теорема (II):

Если существует l-фильтр в $L(A)$, содержащий данный элемент $|\beta|_A \neq 0$, то существует обобщенная модель $\mathfrak{M}$ теории $S(A)$ на множестве J мощности $\overline{\overline{T}}$, в которой выполняется β. Далее, пусть V, C, F, C_A и F_A суть соответственно множества: индивидуальных переменных, индивидуальных констант, функторов в у. и. п. S, констант и функторов, входящих в формулы системы A. Имеет место теорема (IV):

Если существует обобщенная модель $\mathfrak{M}$ для $S(A)$ на множестве мощности $\leqslant \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{C - C}}_A + \overline{\overline{F - F}}_A$, в которой выполняется β, то существует l-фильтр в $L(A)$, содержащий $|\beta|_A$.

С помощью этих, а также и других теорем, в соединении с теоремой Гёделя — Сколема — Лёвенгейма — Мальцева (Если $\beta(W$ не опровержима в теории $S(A)$, то существует обобщенная модель $\mathfrak{M}$ для $S(A)$ на множестве мощности $m \leqslant \max(\aleph_0, \overline{\overline{A}})$, такая, что β выполняется в $\mathfrak{M}$) получаются следующие результаты: алгебра $L(A)$ представима полем множеств в каждом из случаев:

$$\overline{\overline{A}} < \aleph_0, \overline{\overline{V}} \geqslant \max(\aleph_0, \overline{\overline{A}}), \overline{\overline{V}} + \overline{\overline{C - C}}_A + \overline{\overline{F - F}}_A \geqslant \max(\aleph_0, \overline{\overline{A}})$$

(теоремы (IX), (X), (XI)). Однако существуют несчетные теории (т. е. с несчетным множеством аксиом A), для которых $L(A)$ не представима полем множеств (теорема (XIII)).

Последняя часть статьи посвящена разбору случая, когда множество A пусто ($S(0)$ понимается как само у. и. п. S). Здесь утверждается, что алгебра Линденбаума всегда представима полем множеств (теорема (XV)), независимо от мощности множества W. Подробно изучается каноническое представление. Пусть E — множество всех элементарных (т. е. атомарных) формул в W, D — класс всех функций u, определенных на E, принимающих только значения 0 и 1; для всякого $\alpha \in E$ полагаем $D_\alpha = E_u(u(\alpha) = 1)$. D рассматривается как топологическое пространство, именно канторов дисконтинуум. Оказывается, что в каноническом представлении поле L_1 эквивалентно наименьшему полю подмножеств в D, содержащему все D_α и замкнутому относительно всех бесконечных объединений и пересечений, соответствующих логическим кванторам (теорема (XVI)). Когда $\overline{\overline{W}} \leqslant \aleph_0$, эта теорема была доказана ранее Риге методом, пригодным лишь для указанного случая.

Обсуждается ряд смежных вопросов, примыкающих к проблеме представимости. Имеются легко исправимые опечатки.

Д. А. Захаров

6095. Теория конечнозначных исчислений предикатов Лукасевича первой ступени. Тиле (Theorie der endlichwertigen Lukasiewiczschen Prädikatenkalküle der ersten Stufe. Thiele Helmut), Z. math. Logik und Grundl. math., 1958, **4**, № 2, 108—142 (нем.)

Изучаются многозначные исчисления предикатов 1-й ступени, обладающие следующими свойствами: 1) множество значений истинности состоит из n элементов ($n \geqslant 2$): $W, F_1, \ldots, F_{n-1}$. При $i < j$ говорят, что F_i лучше F_j. W (называемое выделенным значением) по определению лучше любого F_i; 2) каждая из основных алгебро-логических функций монотонна по каждой переменной (в смысле отношения „лучше“); 3) среди основных алгебро-логических функций имеется так называемая n-значная импликация Лукасевича $C^n(a, b)$, определяемая следующей таблицей:

C^n	W	F_1	F_2	$\ldots$	F_{n-2}	F_{n-1}
W	W	F_1	F_2	$\ldots$	F_{n-2}	F_{n-1}
F_1	W	W	F_1	$\ldots$	F_{n-3}	F_{n-2}
F_2	W	W	W	$\ldots$	F_{n-4}	F_{n-3}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
F_{n-2}	W	W	W	$\ldots$	W	F_1
F_{n-1}	W	W	W	$\ldots$	W	W

4) имеются две предикатно-логические функции истинности Ex^1 и Om^n, относящие каждому непустому множеству N значений истинности соответственно лучший и худший из элементов N (эти функции отвечают кванторам существования и общности).

Автор строит общую теорию таких исчислений, рассматривая их с точки зрения шрётеровского общего понятия исчисления (РЖМат, 1 60, 680). Доказывается, что на эти исчисления распространяется ряд важных теорем двузначного исчисления предикатов, в том числе теорема Лёвенгейма — Сколема и теорема о совпадении множеств общезначимых и выводимых формул. Распространяется на указанные исчисления также теория семантического следования в смысле Больцано (РЖМат, 1960, 2630).

А. В. Гладкий

6096. Новое доказательство полноты системы аксиом Лукасевича. Чжан (A new proof of the completeness of the Lukasiewicz axioms. Chang C. C.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **93**, № 1, 74—80 (англ.)

Приводится алгебраическое доказательство полноты формальной системы Лукасевича (Łukasiewicz, C mpt. Rend., Varsovie, Cl. III, 1930, **23**, 30 — 50) для бесконечнозначной логики. Впервые этот факт был установлен (метаматематическими методами) Розом и Россером (РЖМат, 1959, 9707).

Ю. Т. Медведев

6097. Замечания об исчислениях высказываний. Лось, Сушко (Remarks on sentential logics. Łoś J., Suszko R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 2, 177—183; Indagationes math., 1958, **20**, № 2, 177—183 (англ.)

Исчисления высказываний, рассматриваемые в статье, определяются заданием множества S всех формул (образуемых из пропозициональных переменных с помощью некоторого числа логических операций) и операции следствия Cn, т. е. операцией, переводящей каждое множество $X \subseteq S$ в некоторое множество $Cn(X) \subseteq S$ и такой, что 1) $X \subseteq Cn(X)$, 2) $Cn(Cn(X)) \subseteq Cn(X)$, 3) если $X \subseteq Y$, то $Cn(X) \subseteq Cn(Y)$.

Пусть P — некоторое исчисление высказываний с множеством формул S и операцией следствия Cn и пусть $\mathfrak{M}$ — такая логическая матрица, что можно установить взаимно однозначное соответствие между логическими операциями исчисления P и операциями матрицы $\mathfrak{M}$, при котором соответствующие операции имеют одинаковое

число мест. Авторы следующим образом определяют операцию $\mathfrak{M}(X)$: формула $\varphi \in S$ входит в $\mathfrak{M}(X)$ тогда и только тогда, когда всякий гомоморфизм исчисления P в матрицу $\mathfrak{M}$, переводящий каждую формулу из X во множество выделенных элементов $\mathfrak{M}$, переводит в это множество и формулу φ. Так определенная операция обладает свойствами 1) — 3) и называется операцией матричного следствия. Матрица $\mathfrak{M}$ называется матрицей, адекватной для операции следствия Cn, если $\mathfrak{M}(X) = Cn(X)$ для всех $X \subseteq S$. Основной результат статьи формулируется в виде некоторых условий на операцию Cn, достаточных для того, чтобы для Cn существовала адекватная матрица. Ю. Т. Медведев

6098. Семантическое построение интуиционистской логики. Бет (Construction sémantique de la logique intuitioniste. Beth E. W.), Raisonnement en math. et en sci. exptl. Paris, CNRS, 1958, 77—83. Discuss., 84 (франц.)

Работа посвящена распространению на интуиционистскую логику метода семантических таблиц. Изложение неформальное и сжатое. См. также РжМат, 1 59. 4380. А. В. Гладкий

6099. Элементарная теория интегрирования в интуиционистской математике. Хейтинг (La théorie élémentaire de l'intégration en mathématiques intuitionnistes. Heyting A.), Raisonnement en math. et en sci. exptl. Paris, CNRS, 1958, 85—90 (франц.)

Интуиционистское построение теории интегрирования функций от точки плоскости. Вводится понятие порождающей последовательности, т. е. последовательности упорядоченных пар $p_n = \left(\frac{a_n'}{2^n}, \frac{a_n''}{2^n}\right)$, где a_n' и a_n'' — целые числа, и соответствующие компоненты следующих друг за другом пар p_{n-1}, p_n отличаются друг от друга меньше чем на $1/2^n$. При этом никаких других ограничений на выбор чисел a_n', a_n'' не делается. Точка плоскости определяется как некоторая совокупность порождающих последовательностей. Затем определяются понятия области, измеримой области, измеримой функции, интегрируемой функции. Доказываются теоремы, аналогичные теоремам теории интегрирования по Лебегу. Доказательства опираются на ряд цитируемых в статье результатов Брауэра, Ван Ротселара и автора. Ф. А. Кабаков

6100. Варианты машин Тьюринга. Обершельп (Varianten von Turingmaschinen. Oberschelp Walter), Arch. math. Logik und Grundlagenforsch., 1958, **4**, № 1-2, 53—62 (нем.)

Автор рассматривает машины Тьюринга в однобуквенном алфавите как соединения следующих пяти элементарных машин: машины левого сдвига, машины правого сдвига, печатающей машины, стирающей машины и машины, распознающей пустую клетку. Последовательность работы элементарных машин в случае каждой конкретной машины Тьюринга описывается при помощи машинных диаграмм (конечных ориентированных графов, у которых вершинами являются элементарные машины). Для определения понятия функции, вычислимой при помощи машины Тьюринга, вводятся понятия стандартных представлений 1) и 2) натуральных чисел и систем натуральных чисел на ленте машины, а также краевых условий a) и b) (ситуаций в начале и конце счета):

1) число n изображается отрезком ленты вида $\lambda(\,|\,)^{n+1}\lambda$ (здесь λ обозначает пустую клетку); система чисел $(n_1, \ldots, n_k)$ изображается отрезком ленты вида

$$\lambda(\,|\,)^{n_1+1}\lambda(\,|\,)^{n_2+1}\ldots\lambda(\,|\,)^{n_k+1}\lambda;$$

2) число n изображается отрезком ленты вида $\lambda\lambda(\,|\,\lambda)^{n+1}\lambda$; система чисел $(n_1, \ldots, n_k$ — отрезком вида

$$\lambda\lambda(\,|\,\lambda)^{n_1+1}\lambda(\,|\,\lambda)^{n_2+1}\lambda\ldots\lambda(\,|\,\lambda)^{n_k+1}\lambda;$$

a) в начале вычисления на ленте записывается только аргумент; машина воспринимает крайнюю справа непустую клетку ленты; работа машины начинается в определенной вершине графа; в конце работы машина должна находиться в крайней правой непустой клетке представления значения функции;

b) дополнительно к a) требуется, чтобы в конце работы на ленте было отпечатано представление системы $(n_1, \ldots, n_k, f(n_1, \ldots, n_k))$ и чтобы машина воспринимала крайнюю правую непустую клетку этого представления.

Автор исследует свойства классов функций, вычислимых при помощи машин Тьюринга без элементарной стирающей машины (известно, например (РЖМат, 1958, 7445), что в случае 2), a) такими машинами можно вычислить любую частично рекурсивную функцию). Функцию, вычислимую без стирающей машины при заданном представлении i) аргументов и при краевых условиях x), автор называет ix-вычислимой. Имеют место следующие теоремы:

Теорема 1. Существует примитивно рекурсивная функция, не являющаяся 1 b-вычислимой.

Теорема 1′. Существует примитивно рекурсивная функция, не являющаяся 2 b-вычислимой.

Теорема 2. Класс 1 b-вычислимых функций совпадает с классом 2 b-вычислимых функций. Он является классом окончательно периодических функций, т. е. таких функций f, что

$$\exists m, k_1, \ldots, k_n \forall x_1, \ldots, x_n \Big(\&_{i=1}^{n} (x_i > m \supset f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + k_i, x_{i+1}, \ldots, x_n))\Big).$$

Теорема 3. Существует примитивно рекурсивная функция, не являющаяся 1 a-вычислимой.

Теорема 4. Класс 1 a-вычислимых функций совпадает с классом полупериодических функций, т. е. таких функций f, что для любого класса K вычетов по модулю k выполняется в точности одно из условий

$$\exists x_0 \forall x\,(x > x_0 \;\&\; x \in K \supset f(x) = f(x + k)),$$

$$\exists x_0 \forall x\,(x > x_0 \;\&\; x \in K \supset (f(x + x) - (x + k) = f(x) - x) \;\&\; f(x) \geqslant x).$$

Н. М. Нагорный

6101. Сведение двусторонних автоматов к односторонним. Шепердсон (The reduction of two-way automata to one-way automata. Shepherdson J. C.), IBM J. Res. and Development, 1959, **3**, № 2, 198—200 (англ.)

Пусть имеются два конечных алфавита Σ и S и функция M, переводящая $\Sigma \times S$ в S. Односторонним (one-way) конечным автоматом над алфавитом Σ (с множеством внутренних состояний S) называется система $A = (S, M, s_0, F)$, где $s_0 \in S$, $F \subseteq S$, для которой следующим образом определено понятие допустимого слова: конечное слово $\sigma_1 \ldots \sigma_n$ в алфавите Σ называется допустимым для A, если последовательность $s_0, s_1, \ldots, s_n$, где $s_{i+1} = M(\sigma_{i+1}, s_i)$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ удовлетворяет условию: $s_n \in F$. Класс всех допустимых слов для A обозначается через $T(A)$. Множество слов в алфавите Σ называется определимым с помощью односторонних автоматов, если оно есть $T(A)$ для некоторого конечного одностороннего автомата A. Двусторонним (two-way) конечным автоматом над алфавитом Σ называется система $A = (S, M, s_0, F)$, определенная так же, как и для одностороннего автомата с той разницей, что M — функция, переводящая $\Sigma \times S$ в $L \times S$, где $L = \{-1, 0, 1\}$, причем, если автомат, находясь в состоянии s, воспринимает в слове символ σ и $M(\sigma, s) = (p, s')$, то следующее состояние — s', а следующая восприни-

маемая буква находится в слове непосредственно справа от σ, слева от σ или есть сама σ, соответственно тому, что $p=1$, -1 или 0. Слово в алфавите Σ называется допустимым для двустороннего автомата A, если, отправляясь от самой левой его буквы в состоянии s_0, автомат выходит за правый конец слова в состоянии $s\in F$. Соответственно определяется множество $T(A)$ всех допустимых слов. Дается простое доказательство того факта, что всякое множество слов, определимое с помощью двустороннего конечного автомата, является также определимым и с помощью одностороннего конечного автомата (более сложное доказательство этого факта было ранее дано Рабиным (Rabin M. O., Proc. Summer Institute of Symbolic Logic, 1957 at Cornell, 336—369). В замечании 1 показывается, как можно, не опираясь на теорему Майхилла, строить для любого двустороннего конечного автомата — односторонний с тем же множеством допустимых слов. В замечании 2 описывается функция τ'_t, где t — слово в алфавите Σ такая, что если $\tau'_{t_1}=\tau'_{t_2}$, то слова t_1 и t_2 неразличимы данным автоматом, т. е.

$$\forall t\forall t'\,(tt_1t'\in T(A)\to tt_2t'\in T(A)).$$

В замечании 3 указывается, что с помощью односторонних автоматов определимы не только множества $T(A)$, но и множество $T_1(A)$ слов, которые автомат просматривает, но либо останавливается не в правом конце, либо — в невыделенном состоянии, а также — множество $T_2(A)$ слов, на которых автомат зацикливается. В замечании 4 указывается, что теорема о сводимости двусторонних автоматов к односторонним верна и для тех случаев, когда множество всех слов в алфавите Σ разбивается не на два класса (допустимых и не допустимых слов), но на любое конечное число классов, характеризуемых окончательным состоянием автомата. Отмечается, что в случае, когда автомат производит выходные слова, основная теорема перестает быть верной. В замечании 5 утверждается сохранение теоремы о сводимости двусторонних автоматов к односторонним в случае, если рассматриваются только слова вида bte, где t — слово в алфавите Σ, а $b, e\notin\Sigma$, при этом множество $\{b\}U\{e\}$ слов вида bte, где $t\in U$ определимо в конечном автомате тогда и только тогда, когда определимо U.

Ю. И. Янов

6102. Замечание об асимптотической относительной частоте отношений Карнапа. Харари (Note on Carnap's relational asymptotic relative frequencies. Harary Frank), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 3, 257—260 (англ.)

Бинарное отношение есть совокупность упорядоченных пар объектов некоторой природы. Рассматривается поставленный Карнапом вопрос об относительной частоте появления отношений, обладающих определенными свойствами, среди всех отношений p объектов, а также об асимптотическом значении этой частоты (при $p\to\infty$). Исследуются бинарные отношения следующих пяти типов: симметрические, рефлексивные, нерефлексивные, транзитивные нерефлексивные симметрические и симметрические нерефлексивные. Приводятся относящиеся к этим типам отношений результаты различных авторов (РЖМат, 1954, 2489; 1957, 6210; 1958, 6976). Цель статьи состоит в том, чтобы собрать эти результаты вместе, поскольку они могут быть неизвестны логикам. Используется интерпретация бинарных отношений с помощью графов. В равенстве (13) имеется опечатка.

С. Я. Ветухновский

6103. Система логики без типов с достаточными возможностями математических применений. I. Аккерман (Ein typenfreies System der Logik mit ausreichender mathematischer Anwendungsfähigkeit. I. Ackermann Wilhelm), Arch. Math. Logik Grundlagenforsch., 1958, **4**, 3—26

Развивая идеи своих предыдущих работ (J. Symbolic Logic, 1950, **15**, 33—57; Math. Z., 1952, **55**, 364—384; РЖМат, 1953, 547), автор описывает формальную систему, которая не является дедуктивно полной (в смысле верности для нее теоремы дедукции), так что ее комбинаторная полнота не обязательно влечет несовместность. Вопросы применений будут изложены в следующих частях.

E. W. Beth

Перевод из Math. Revs, 1959, **20**, № 7, 741.

6104. Математическое значение доказательств непротиворечивости. Крейсел (Mathematical significance of consistency proofs. Kreisel G.), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 2, 155—182 (англ.)

Работа посвящена обсуждению гильбертовой концепции формальной непротиворечивости. В развитие предыдущих работ автора (J. Symbolic Logic, 1951, **16**, 241—267; 1952, **17**, 43—58; Fundam. math., 1952, **39**, 1—12; РЖМат, 1958, **62**; 1959, 2237) вводится понятие рекурсивной интерпретации (нерекурсивных понятий и систем), которое далее прилагается к исчислению предикатов и арифметике.

Ю. А. Гастев

6105. Логический анализ и формализм. Лоренцен (Logical reflection and formalism. Lorenzen P.), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 3, 241—249 (англ.)

Обсуждая проблемы обоснования математики, автор отмечает невыполнимость Гильбертовой программы (в полном ее объеме), ссылаясь на теорему Гёделя о неполноте. Говоря далее об арифметике и логике, он предлагает отличать «теоретическую» арифметику (соответственно логику) от «практической». Последняя, в противоположность первой, не содержит никаких теорем, и вообще не является формальной системой. Ее содержание исчерпывается «практическими правилами» счета (соответственно рассуждений). «Теоретическая» же арифметика (логика) есть наука (т. е., вообще говоря, частично формализованная система) о правилах, предлагаемых «практической» арифметикой (логикой), — правилах, не обосновываемых, но зато очевидных. Исходя из подобных рассмотрений, автор намечает путь построения (в финитных терминах) «практической математики», которой можно было бы пользоваться, не заботясь об ее обосновании.

Ю. А. Гастев

6106. Концепция формы в современной логике. Фейс (Le concept de forme dans la logique moderne. Feys Robert), Rev. Univ. Madrid, 1958, **7**, № 26, 145—160 (франц.)

Автор ставит своей целью «уточнение представлений, которые соответствуют различным значениям термина «форма» в современной логике». Однако в статье не приводится сколько-нибудь четких формулировок или систематизации точки зрения автора по этому вопросу. Изложение чисто описательное и состоит из некоторых замечаний по поводу аксиоматического метода и формальных систем математической логики.

Ю. Т. Медведев

6107. Основные аспекты теорий измерения. Скотт, Саппс (Foundational aspects of theories of measurement. Scott Dana, Suppes Patrick), J. Symbolic Logic, 1958, **23**, № 2, 113—128 (англ.)

В § 1 реферируемой статьи рассматриваются так называемые реляционные системы $\mathfrak{A}=\langle A, R_1,\ldots,R_{n-1}\rangle$, где A — непустое множество, называемое областью реляционной системы, а $R_1,\ldots,R_{n-1}$ — определенные на A конечноместные отношения. (РЖМат, 1956, 3597—99). Реляционная система называется конечной или бесконечной, в зависимости от мощности ее области. Пусть R_i $(i=1,\ldots,n)$ есть m_i местное отношение. Будем тогда говорить, что реляционная система $\langle A, R_1,\ldots,R_n\rangle$ имеет тип $s=\langle m_1,\ldots,m_n\rangle$. Реляционная система $\mathfrak{B}=\langle B, S_1,\ldots,S_n\rangle$

типа $s\langle m_1,\ldots,m_n\rangle$ есть гомоморфный образ реляционной системы $\mathfrak{A}=\langle A,R_1,\ldots,R_n\rangle$ того же типа, если существует такая функция f, осуществляющая отображение A на B, что для каждого $i=1,\ldots,n$ и каждой последовательности $\langle a_1,\ldots,a_{m_i}\rangle$ элементов A $R_i(a_1,\ldots,a_{m_i})$ эквивалентно $S_i(f(a_1),\ldots,f(a_{m_i}))$. Если отображение, осуществляемое f, взаимнооднозначно, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются изоморфными. Система $\mathfrak{A}$ называется подсистемой $\mathfrak{B}$, если $A\subseteq B$ и каждое R_i на элементах A совпадает с соответствующим S_i. $\mathfrak{A}$ называется вложенной в $\mathfrak{B}$, если некоторая подсистема $\mathfrak{B}$ есть гомоморфный образ $\mathfrak{A}$. Числовой реляционной системой называется система, область которой есть множество всех действительных чисел. Наконец, теорией измерения называется класс $\mathbf{K}$ реляционных систем, замкнутый относительно изоморфизма, для которого существует конечная последовательность целых положительных чисел s и такая числовая реляционная система $\mathfrak{N}$ типа s, что все входящие в $\mathbf{K}$ реляционные системы суть типа s и вложены в $\mathfrak{N}$.

В § 2 показано, что существуют замкнутые относительно изоморфизма классы реляционных систем, не являющиеся теориями измерения (приводятся соответствующие примеры). В § 3 выводятся критерии конечной и универсальной аксиоматизуемости теорий измерения (формальная теория называется универсально аксиоматизуемой, если множество (вообще говоря, бесконечное) ее аксиом состоит лишь из формул, предваренные нормальные формы которых не содержат кванторов существования). На стр. 114 (17 строка снизу) опечатка: вместо „$A\subseteq B$“ следует читать „$A\supseteq B$“ Ю. А. Гастев

6108 К. Логические машины и диаграммы. Гарднер (Logic machines and diagrams. Gardner Martin. New York — Toronto — London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1958, x, 157 pp., ill.) (англ.)

Книга представляет собой популярное изложение сведений о логических машинах (механических и электрических приборах) и диаграммах (геометрических фигурах, отражающих логическую структуру суждений) для решения различных проблем формальной логики. Большое внимание уделено истории рассматриваемых вопросов.

Н. М. Нагорный

См. также: 6021, 6025, 6210.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Редактор *Ю. В. Линник*

6109. К вопросу о верхней границе для $G(n)$. Виноградов И. М., Изв. АН СССР. Сер. матем., 1959, 23, № 5, 637—642

Пусть $n\geqslant 3$ — целое, $G(n)$ — наименьшее k, которому можно сопоставить некоторое постоянное C так, что уравнение

$$N=x_1^n+\ldots+x_k^n$$

разрешимо в целых неотрицательных числах $x_1,\ldots,x_k$ при любом целом $N>C$. В книге „Метод тригонометрических сумм в теории чисел“ (Тр. Матем. Ин-та АН СССР, 1947, т. 23) автор установил неравенство $G(n)<3n\ln n+11n$. Показывается, что $G(n)<2n\ln n+\Phi(n)$, где при неограниченном возрастании n $\Phi(n)=o(n\ln n)$. Доказательство опирается на некоторые леммы автора (Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1938, 5, 153—180; Изв. АН СССР, Сер. матем., 1951, 15, 109—130 и цитированная книга). К. К. Марджанишвили

6110. Метрическая теорема о тригонометрических суммах с быстрорастущими функциями. Минеев М. П., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 3, 169—171

Пусть $g_0, g_1\ldots$ — последовательность целых чисел таких, что $g_0=1$ и $g_i\geqslant 2$ для $i=1,2\ldots$ Обозначим $F(x)=g_0g_1\ldots g_x$ (x — натуральное число),

$$S=\sum_{x=0}^{p-1}\exp(2\pi i\alpha F(x)),\quad E\{\ldots\}$$ —

множество тех α из отрезка $[0,1]$, для которых выполнено условие, указанное в скобках. Доказывается теорема: Пусть $c>0$ — константа, тогда

$$\lim_{p\to\infty}\operatorname{mes} E\left\{\left|\sum_{x=0}^{p-1}\exp(2\pi i\alpha F(x))\right|\leqslant c\sqrt{p}\right\}=1-e^{-c^2}.$$

При доказательстве используется метод моментов.

А. Г. Постников

6111. Взвешенные ограниченные разбиения. Ньюман (Weighted restricted partitions. Newman M.), Acta arithm., 1959, 5, № 4, 371—380 (англ.)

Исследуются степени функции

$$\varphi=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^{nq})/(1-x^n).$$

Ряд φ^s по степеням x служит производящим рядом функции $q_s(n)$, равной числу решений диофантова уравнения $a_1\sum_{j=1}^{s}x_{1j}+a_2\sum_{j=1}^{s}x_{2j}+\ldots=n$ в целых неотрицательных x_{ij}, где $a_1, a_2,\ldots$ — целые, не делящиеся на q числа. Методом исследования служит метод „подгрупп“ т. е. доказывается инвариантность некоторых функций относительно подгрупп модулярной группы Γ.

Теорема 2: Пусть $s\geqslant 0$, тогда существуют постоянные c_k такие, что для всех целых n:

$$q_s\left(\frac{n}{p}\right)+p\left(\frac{q}{p}\right)^s q_s(np+\Delta)=$$
$$=\sum_{k=0}^{[\Delta/p]}c_k q_{sp-\frac{24k}{q-1}}(n+k),\qquad(1)$$

где $\Delta=\frac{1}{24}s(p^2-1)(q-1)$, p — простое.

При некоторых значениях q, s, p правая часть (1) равна $c_0q_{sp}(n)$. Б. В. Левин

6112. Некоторые новые результаты в аддитивной теории простых чисел. Пань Чэн-тун (Some new results in the additive prime number theory. Pan Cheng-tung), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, 9, № 3, 315—329 (кит., рез. англ.)

Доказывается теорема: Любое большое нечетное целое число может быть представлено в виде

$$N=p_1+p_2+p_3.$$

1. $p_i=\frac{1}{3}N+O(N^{(5+12c)/(6+12c)+\varepsilon})$, где $\varepsilon>0$, $c=15/92$.
2. $p_1=N$, $p_2\leqslant N$, $p_3\leqslant N^{2c/(1+2c)+\varepsilon}$.
3. $p_1\leqslant N^{2/3+\varepsilon}$, $p_2\leqslant N^{2/3+\varepsilon}$, $N-N^{2/3+\varepsilon}<p_3\leqslant N$.

По резюме автора

6113. О некоторых множествах положительной плотности. Варнавидес (On certain sets of positive density. Varnavides P.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 358—360 (англ.)

Рот доказал (РЖМат, 1953, 52), что последовательность из различных положительных целых чисел, никакие три из которых не составляют арифметическую прогрессию, имеет нулевую плотность. Отсюда следует, что в любой последовательности $a_1, a_2, \ldots$ положительной плотности найдется хотя бы одно решение уравнения $a_i + a_j = 2a_n \quad (i \neq j)$.

В статье доказывается следующая теорема: пусть δ — любое число из интервала $0 < \delta < 1$ и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — любое множество различных положительных целых, не превосходящих x. Положим, что $m > \delta x$ и $x > x_0(\delta)$, где $x_0(\delta)$ зависит только от δ. Тогда уравнение $a_i + a_j = 2a_n \quad (i \neq j)$ имеет по меньшей мере $C(\delta)x^2$ решений, где $C(\delta)$ — положительная постоянная, зависящая только от δ. А. М. Полосуев

6114. О проблеме минимального перекрытия Эрдёша. Мозер (On the minimal overlap problem of Erdös. Moser L.), Acta arithm. 1959, 5, № 2, 117—119 (англ.)

Пусть E — разделение целых чисел $1, 2, \ldots, 2n$ на два различных класса $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ с n элементами в каждом классе и пусть M_k означает число решений $a_i - b_j = k$, $M = M(n) = \min_E \max_k M_k$. Доказывается неравенство $M > \sqrt{2}(n-1)/4 > 0{,}3525(n-1)$.

В. А. Голубев

6115. Естественные плотности некоторых числовых полугрупп. Бредихин Б. М., Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 2, 137—145 (рез. нем.)

Работа является частным случаем ($c\theta = 1$, G — полугруппа вещественных чисел $a \geqslant 1$ с базой) последующей работы автора (РЖМат, 1959, 8785). Обобщены результаты Канольда (РЖМат, 1955, 4837) и Шерка (РЖМат, 1957, 2871). Н. И. Климов

6116. Об одной явной нижней оценке в теории простых чисел. Кнаповский (On an explicit lower estimate in prime number theory. Knapowski S.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 4, 437—441 (англ.)

Продолжение работы автора (РЖМат, 1959, 3456) о связи функций Чебышева $\psi(x, k, l)$, $(k, l) = 1$, $1 < l < k$ и $\psi(x, k, 1)$; метод аналитический. Связь функций $\psi(x, k, l)$ при различных l также исследовал Корради (РЖМат, 1959, 10782), но элементарными методами.

Доказывается, что при $T \geqslant \max(c_0, \exp\exp\ln^3 k)$, $k \geqslant 3$,

$$\max_{1<x<T} |\psi(x, k, l) - \psi(x, k, 1)| > T^{1/2} \exp\left(-\frac{\ln T}{(\ln\ln T)^{1/2}}\right),$$

постоянная c_0 — вычисляемая. Отмечается, что нижняя граница для T в предыдущей работе может быть несколько снижена при незначительном ухудшении оценки в самой теореме. Н. И. Климов

6117. О винеровском методе в теории чисел. Ригер (Zur Wienerschen Methode in der Zahlentheorie. Rieger G. J.), Arch. Math., 1959, **10**, № 4, 257—260 (нем.)

Асимптотический закон распределения простых чисел в натуральном ряду автор винеровским методом обобщает на классы идеалов $\mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}$ алгебраического числового поля K степени n.

Пусть $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{f}$ (целые) идеалы поля K; $\langle \xi \rangle$ — главный идеал, образованный из целого числа ξ поля K; $N\mathfrak{a}$ — норма идеала $\mathfrak{a}$; x — действительное число. Два идеала $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, взаимно простые с идеалом $\mathfrak{f}$, принадлежат к одному и тому же классу $\mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}$, если существуют два вполне положительных числа $\xi \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$, $\eta \equiv 1 \bmod \mathfrak{f}$ такие, что $\langle \xi \rangle \mathfrak{a} = \langle \eta \rangle \mathfrak{b}$. Классы идеалов $\mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}$ образуют конечную абелеву группу, $h(\mathfrak{f})$ — порядок этой группы.

Пусть $\Lambda(\mathfrak{a}) = \begin{cases} \log N\mathfrak{p}, & \text{если } \mathfrak{a} = \mathfrak{p}^m \\ 0, & \text{если } \mathfrak{a} \neq \mathfrak{p}^m, \end{cases}$ ($\mathfrak{p}$ — простой идеал)

$$\psi(x; \mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}) = \sum_{\substack{N\mathfrak{a} < x \\ \mathfrak{a} \in \mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}}} \Lambda(\mathfrak{a}),$$

$$\pi(x; \mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}) = \sum_{\substack{N\mathfrak{p} < x \\ \mathfrak{p} \in \mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}}} 1.$$

Теорема 1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x; \mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f})}{x} = \frac{1}{\eta(\mathfrak{f})}.$$

Теорема 2.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x; \mathfrak{S} \bmod \mathfrak{f}) \log x}{x} = \frac{1}{\eta(\mathfrak{f})}.$$

С. В. Огай

6118. Проблема делителей Пилтца для $k=3$. Инь Вэнь-линь (Piltz's divisor problem for $k=3$. Yin Wen-lin), Sci. Rec., 1959, **3**, № 5, 169—173 (англ.)

Пусть $d_3(n)$ обозначает число решений уравнения $n = pqr$ и $D_3(x) = \sum_{n \leqslant x} d_3(n)$; в работе получен результат

$$D_3(x) = x P_2(\ln x) + \Delta_3(x),$$

где $P_2(u)$ — известный квадратный полином, а $\Delta_3(x)$ имеет оценку

$$|\Delta_3(x)| \ll x^\theta; \quad \theta \leqslant 25/52.$$

Этот результат получен в результате соединения метода Вандер-Корпута для тройной суммы и метода И. М. Виноградова. Автор замечает, что, усложняя вычисления, можно улучшить результат и получить $\theta \leqslant 8/17$.

А. И. Виноградов

6119. Несколько замечаний о простых делителях целых чисел. Эрдёш (Some remarks on prime factors of integers. Erdös P.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 2, 161—167 (англ.)

Доказаны две теоремы.

Теорема 1. Пусть $\varepsilon_p > 0$, $\delta_p = \varepsilon_p$, если $\varepsilon_p \leqslant 1$ и $\delta_p = 1$, если $\varepsilon_p \geqslant 1$. Расходимость ряда $\sum_p \delta_p/p$ является необходимым и достаточным условием для того, чтобы почти все целые числа имели два простых множителя p и q, связанных неравенствами

$$p < q < p^{1+\varepsilon_p}. \qquad (1)$$

Теорема 2. Асимптотическая плотность чисел n, которые имеют два простых множителя p и q, подчиненных условию

$$p < q < p^{1+c/\ln\ln n},$$

равна $1 - e^{-c}$.

Метод работы основан на изучении дисперсии $\sum_{n<x} (f(n) - A(x))^2$, где $f(n)$ — число пар простых вида (1), принадлежащих данному числу n.

А. И. Виноградов

6120. Решето Сельберга в применении к некоторым оценкам снизу. Барбан М. Б., УзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН УзССР, 1959, № 3, 7—8 (рез. узб.)

Сообщается о получении оценок снизу для почти простых чисел в полиномах и некоторых других последовательностях. А. И. Виноградов

6121. Метод решета при разложении на простые множители чисел вида n^2+1. Шанкс (A sieve for factoring numbers of the form n^2+1. Shanks Daniel), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, **13**, № 66, 78—86 (англ.)

Автор сообщает, что им была запрограммирована и найдена на машине ИБМ-704 с помощью метода решета факторизации всех чисел n^2+1 при $n \leqslant 180\,000$. С помощью полученных эмпирических результатов высказываются некоторые прогнозы и предположения относительно общих законов распределения простых множителей этих чисел. А. И. Виноградов

6122. Заметка о наименьшем первообразном корне простого числа. Ван Юань (A note on the least primitive root of a prime. Wang Yuan), Sci. Rec., 1959, 3, № 5, 174—179 (англ.)

Заметка следует идеям Берджеса (РЖМат, 1958, 8534). Усилением результатов Берджеса является

Теорема 1. Пусть p — простое число, $\chi(n)$ — неглавный характер $(\mathrm{mod}\, p)$; $\delta > 0$, сколь угодно мало; $A > 0$. При $p > P(\delta, A)$, $H > p^{1/4+\delta}$, имеем

$$\left| \sum_{n=N+1}^{N+H} \chi(n) \right| < H/(\ln p)^A$$

при любых N. Сочетание этой теории с методом решета Виггo Бруна дает

Теорему 2. Пусть $g(p)$ — наименьший положительный первообразный корень для p. Тогда $g(p) = O(p^{1/4+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малая константа. Условная теорема 3 касается следствий из расширенной гипотезы Римана. Ю. В. Линник

6123. О распределении значений аддитивных арифметических функций от целочисленных полиномов. Уждавинис Р. В., LietTSR Mokslų Akad. darbai, Тр. АН ЛитССР, 1959, **Б2 (18)**, 9—29 (рез. лит.)

Используя результаты и метод И. П. Кубилюса (РЖМат, 1957, 1117), автор доказывает две теоремы о существовании предельного закона распределения значений сильно аддитивных функций, когда аргумент пробегает последовательность значений некоторых целочисленных полиномов. Сильно аддитивной функцией называется функция $f(m)$ такая, что $f(mn) = f(m) + f(n)$ для всех пар натуральных чисел $(m, n) = 1$ и $f(p^\alpha) = f(p)$ для натуральных чисел α и простых p. Теорема 1 дает необходимые и достаточные условия для существования предельного закона распределения значений функции, принадлежащей к классу H ($f \in H$, если

$$B(n) = \sum_{p \leqslant n} \frac{f^2(p)\, r(p)}{p} \to \infty, \quad n \to \infty,$$

и существует $\alpha(n)$ такая, что $\ln \alpha(n) = o(\ln n)$ и $B(n) - B(\alpha(n)) = o(B(n))$; $r(p)$ — число решений $G(m) \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, p)$ для упомянутых полиномов $G(m)$. Например, $f \in H$, если для нее выполняется аналог условия Линдеберга). Теорема 2 указывает достаточное условие для того, чтобы распределение было нормальным, именно: $B(n) \to \infty$, $f(p) = o(B(p))$, $n \to \infty$. Э. И. Вилкас

6124. Об одной метрической задаче теории диофантовых приближений. Кубилюс И. П. LietTSR Mokslu Akad. darbai, Тр. АН ЛитССР, Б2 (18), 3—7 (рез. лит.)

Пусть α — вещественное и $\| x \|$ — расстояние вещественного числа x до ближайшего целого числа. Известно до сих пор не доказанное и не опровергнутое предположение, что система диофантовых неравенств $\| \alpha^\nu q \| < cq^{-(1+\varepsilon)/n}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ при любом n и любых положительных постоянных c, ε для почти всех α имеет конечное число решений в натуральных q.

Автором доказывается: Пусть $f(q)$ — положительная функция, определенная для всех целых $q \geqslant q_0 > 0$ такая, что $\sqrt{q}\, f(q)$ не возрастает и ряд

$$\sum_{q \geqslant q_0} q^{-1/2} f(q)$$

сходится. Тогда система неравенств $\| \alpha q \| < f(q)$, $\| \alpha^2 q \| < f(q)$ для почти всех α имеет не больше конечного числа решений в натуральных $q \geqslant q_0$.

Полученный результат показывает, что выше сформулированное предположение для случая $n = 2$ близко к окончательному решению. Р. В. Уждавинис

6125. Об одной функции Минковского. Данжуа (Sur une fonction imaginée par Minkowski. Denjoy Arnaud), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1959, **4**, 13—24 (франц., рез. болг., русск.)

Пусть p, p', q, q' — целые числа, p/q, p'/q' — две соседние дроби ($pq' - qp' = \pm 1$). При q и $q' \geqslant 0$ дробь $(p+p')/(q+q')$ называется медиантой и служит для образования ряда Фарея.

Минковский рассматривал непрерывную функцию $f(x)$, определенную в (0, 1) для рациональных x так: $f(0, 1) = 0$, $f(1/1) = 1$ и $f((p+p')/(q+q')) = f(p/q)/2 + f(p'/q')/2$. Положим для действительного $|\alpha| \leqslant 1$, $|1-\alpha| \leqslant 1$, $|\alpha(1-\alpha)| \leqslant 1$ и $pq' - qp' = 1$, $q \geqslant 0$, $q' \geqslant 1$, $k(1/0) = 0$, $k(0/1) = 1$, $k[(p+p')/(q+q'), \alpha] = \alpha k(p'/q', \alpha) + (1-\alpha) k(p/q, \alpha)$. Пусть произвольное действительное число x, представленное непрерывной дробью: $x = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$. Если положим $\sigma_n = \sum_{2m \leqslant n} a_{2n}$ и $\sigma'_n = \sum_{2p-1 \leqslant n} a_{2p-1}$, то находим $k(x, \alpha) = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \alpha^{\sigma_n} (1-\alpha)^{\sigma'_n}$. Для $x = -\infty$ функция $y = k(x, \alpha)$ убывает от ∞ до 0 (при $x = +\infty$) $\alpha^{-x} k(x, \alpha)$ периодическая с периодом 1. Имеется связь между $k(x, \alpha)$ и разложением в непрерывную дробь. Производная от $k(x, \alpha)$ исчезает почти всюду и нигде не является конечной и отрицательной.

Пусть $q \geqslant 1$, $pq' - qp' = 1$, $x' = (px+p')/(qx+q') = T(x)$, тогда $k(x', \alpha) = A + Bk(x, \alpha)$, где A и B не зависят от x, но не на всей оси $q \geqslant 1$, на интервалах отдельными точками, связанными с дробью $-q'/q$.

Ставится вопрос о том, можно ли получить $k(x, \alpha)$ как предел функции $k(z, \alpha)$, определенной в верхней или нижней комплексной полуплоскости. В. А. Голубев

6126. О пересечении линейного множества со сдвигом дополнительного к нему множества. Сверчковский (On the intersection of a linear set with the translation of its complement. Swierczkowski S.), Colloq. math., 1958, 5, № 2, 185—197 (англ.)

Доказаны две теоремы.

1. Существует такое целое число n, что

$$|A_n \cap B| \geqslant \frac{N}{5}\left(2 - \sqrt{4 - \frac{10\,|A|\,|B|}{N^2}}\right).$$

Здесь A_n сдвиг множества A, т. е. множество всех элементов вида $x+n$, где $x \in A$; $|A_n|\,|B|$ — число всех элементов пересечения $A_n \cap B$ множеств A_n и B; $|A|$ и $|B|$ — соответственно числа всех элементов множеств A и B, дополнительных друг к другу на множестве целых чисел, принадлежащих замкнутому промежутку $1 \leqslant x \leqslant N$.

2. Существует такое число t, что

$$m(X_t \cap Y) \geqslant \frac{ml}{5}\left(2 - \sqrt{4 - \frac{10mX\, mY}{(ml)^2}}\right).$$

Здесь ml, mX, mY, $m(X_t \cap Y)$ — меры Лебега соответствующих множеств, X_t — множество элементов вида $x+t$, где $x \in X$; X и Y — дополнительные друг к другу множества на замкнутом промежутке I.

Указано, что теорема 1 улучшает результат Эрдёша (РЖМат, 1957, 2016) и Шерка, а теорема 2 улучшает результат, который получил Мыцельский. Ссылок на работы двух последних авторов нет. А. Н. Хованский

6127. О приближении иррациональных чисел дробями Сюс (Über die Approximation einer reellen Zahl durch Brüche. Szüsz P.), Acta math. Acad. scient. hung., 1959, **10**, № 1-2, 69—75 (нем.; рез. русск.)

Улучшены предыдущие результаты автора (РЖМат, 1956, 5695). Доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть α — любое иррациональное число, ε — сколь угодно малое положительное число. Существует такое $n_0 = n_0(\alpha, \varepsilon)$, что для любого $n \geqslant n_0$ существуют целые x и y, удовлетворяющие неравенствам

$$|\alpha x - y| < 1/\sqrt{5}x; \quad n \leqslant x < \varepsilon n^2.$$

Теорема 2. Пусть функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to \infty$, а функция $f(x)$ монотонно возрастает при $x \to \infty$. Существуют иррациональное число α и монотонно возрастающая функция $f_1(x)$, обладающая следующими свойствами: 1) для бесконечного множества натуральных чисел x справедливо равенство $f_1(x) = f(x)$; 2) существует бесконечная последовательность натуральных чисел $N_1, N_2, \ldots, N_k < N_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, таких, что при любом целом y

$$|\alpha x - y| < f_1(x)/x,$$

для всех целых чисел x, удовлетворяющих неравенству $N_k \leqslant x < g(N_k) N_k^2$. Н. И. Фельдман

6128. Точки решетки в неограниченных точечных множествах. Леккеркеркер (Lattice points in unbounded point sets. Lekkerkerker C. G.), Rapp. Math. centrum, 1957, № ZW-013, 1—22 (англ.)

Пусть R_n — n-мерное евклидово пространство и Λ — n-мерная решетка в этом пространстве. В множестве всех таких решеток вводится по Зигелю мера и интегрирование (Siegel C., Ann. Math., 1945, 46, 340—347). Тем самым для множества рассматриваемых решеток становятся осмысленными выражения, содержащие слова „почти все". Доказываются теоремы:

1. Пусть $f(x)$ — неотрицательная интегрируемая в смысле Римана функция, определенная на R_n, и пусть $\int_{R_n} f(x)\,dx < \infty$. Тогда почти для всех решеток Λ $\sum_{x \in \Lambda} f(x) < \infty$.

2. Пусть $f(x)$ — неотрицательная интегрируемая в смысле Римана функция, определенная на R_n и пусть $\int_{R_n} f(x)\,dx = \infty$. Тогда существует решетка Λ с определителем, равным 1, такая, что $\sum_{x \in \Lambda} f(x) = \infty$.

3. В R_n существует измеримое по Жордану множество V, имеющее бесконечную меру и почти для всех решеток Λ содержащее лишь конечное число точек из Λ.

4. Пусть V — множество в R_n, измеримое по Лебегу, E — куб $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и $0 < \rho < 1$. Пусть, далее, существует бесконечно много непересекающихся кубов $g^{(k)} + E(g^{(k)} \in R_n)$, на которых V имеет плотность $\geqslant \rho$. Тогда почти все решетки Λ имеют бесконечно много точек в V.

Перечисленные теоремы являются многомерными аналогами одномерных задач, которые рассматривались различными авторами и которым посвящена первая половина работы. Д. Н. Ленской

6129. Квадратичные формы и модулярные функции. Эйхлер (Quadratische Formen und Modulfunktionen. Eichler M.), Acta arithm., 1958, 4, № 3, 217—239 (нем.)

Обзор результатов по теории модулярных функций. В § 1 вводится определение модулярной группы и поля модулярных функций, рассматриваются обобщенные абелевы интегралы

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{(n-2)!} \int_{\tau_0}^{\tau} (\tau - \sigma)^{n-2} \varphi(\sigma)\,d\sigma + \theta(\tau),$$

где $\theta(\tau)$ — полином степени $n-2$, $\varphi(\tau)$ — модулярная форма веса — n, изучается поведение $\Phi(\tau)$ относительно модулярных преобразований. В § 2 вычислен след оператора

$$R_\chi^n(T_m)\varphi(\tau) = \sum \chi(n) \varphi\left(\frac{u\tau + v}{w}\right)\left(\frac{u}{w}\right)^{n/2}$$

(суммирование ведется по u, где $(u, f) = 1$, $u > 0$, $uw = m$, $0 \leqslant v < w$) для случая, если ступень модулярной формы равна произведению различных простых чисел (Сельберг вычислил след для ступени, равной 1 (РЖМат, 1958, 966). В § 3 рассматриваются кватернионные квадратичные формы $Q(x)$ с квадратным дискриминантом. Излагаются сведения из алгебры кватернионов. Доказывается, что: все модулярные формы 1 типа четного веса — n с $\chi = 1$ и бесквадратной ступенью F можно представить в виде линейной комбинации кватернионных тэта-рядов

$$\varphi(\tau) = \sum_x R(Sx) \exp(2\pi i \tau Q(x)),$$

где $R(x)$ — однородная лапласова круговая функция r-го порядка, S — линейное преобразование, $S^T S = Q = q_{ik}$, $Q(x) = 2^{-1} \sum q_{ik} x_i x_k$ и модулярных форм ступени 1, если в соответствующих рядах Фурье оставить только члены $c_m e^{2\pi i m\tau}$ с $(m, F) = 1$. В § 4 ставится семь еще нерешенных проблем, которые по мнению автора, можно решить в ближайшее время. Вот одна из них: известно, что имеется только одна модулярная форма первого типа ступени 1, веса — 12:

$$\Delta(t) = e^{2\pi i\tau} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m\tau})^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)\, e^{2\pi i n\tau}.$$

Рамануджан предположил, что $|\tau(p)| < 2p^{11/2}$. Можно предположить, что все без исключения собственные значения матрицы $R_\chi^n(T_p)$ по абсолютной величине $< \text{const}\sqrt{p}$. Это приводит к наилучшей возможной оценке $|\gamma_m| < m^{(n-1)/2+\varepsilon}$ коэффициентов модулярной формы первого типа. Б. В. Левин

6130. Конструкция и приложения одного класса модулярных функций. II. Ньюман (Construction and application of a class of modular functions. II. Newman Morris), Proc. London Math. Soc., 1959, 9, № 35, 373—387 (англ.)

В первой части (РЖМат, 1958, 3523) был построен класс целых модулярных функций F_n, инвариантных относительно подстановок группы $\Gamma_0(n)$ для случая $(n, 6) = 1$. В настоящей работе снимается ограничение $(n, 6) = 1$ и особое внимание уделено $n = 2q$, $3q$, q — простое. Построены также полиномиальные базисы F_n для $n < 16$. Приводятся таблицы коэффициентов разложений в ряд Фурье базисных элементов, вычисленные на электронной машине. Б. В. Левин

6131. О положительно определенных квадратичных формах с определителем 1. Кэ Чжао (Ko Chao), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Вестн. Сычуаньск. ун-та (сер. естеств. н.), Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1959, № 3, 35—42 (кит.; рез. англ.)

Показывается, что число классов положительных определенных квадратичных форм 16 переменных с определителем 1 больше или равно 8. По резюме автора

6132. О положительно квадратичных формах 15 переменных с определителем 1. Кэ Чжао (Ko Chao), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Вестн. Сычуаньск. ун-та (сер. естеств. н.), Acta scient. natur. Univ. szechuan, 1959, № 2, 23—38 (кит., рез. англ.)

Используя тот факт, что „мера" рода положительно определенных квадратичных форм есть сумма „мер" всех различных классов рода, доказывается, что число классов положительно определенных квадратичных форм 15 переменных с определителем 1 равно 5. Резюме автора

6133. О суммах трех квадратов. Шинцель (Sur les sommes de trois carrés. Schinzel A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, 7, № 6, 307—310 (франц., рез. русск.)

Доказываются две теоремы.

1. Для того чтобы натуральное число n могло быть представлено в виде $x^2+y^2+z^2$, где $x, y, z>0$, $(x, y, z)=1$, необходимо и достаточно, чтобы оно обладало двумя свойствами: 1) $n\neq 0, 4, 7 \pmod 8$; 2) или $4k-1/n$, или n не является „удобным числом" Эйлера.

2. Для того чтобы n имело представление в виде $x^2+y^2+z^2$, где $(x, y, z)=1$ и x, y, z — различные числа, необходимо и достаточно, чтобы: 1) $n\neq 0, 4, 7 \pmod 8$; 2) или n делилось на простое число $d\equiv 5, 7 \pmod 8$ или $n\equiv 1, 2, 6 \pmod 8$ и $p(-4n)>1$, либо $n\equiv 3 \pmod 8$ и $p(-n)>1$. В. А. Голубев

6134. О представлении чисел суммою двух квадратов. Субба-Рао (On representation of numbers as sum of two squares. Subba Rao M. V.), Math. Student, 1958, 26, № 4, 161—163 (англ.)

Известно несколько доказательств о том, что число представлений числа n в виде суммы двух квадратов как положительных, так и отрицательных, $r_2(n)$, выражается формулой $r_2(n)=4[d_1(n)-d_3(n)]$, где $d_i(n)$ означает число делителей числа n формы $4m+i$. Предлагается эскиз нового доказательства, основанного на свойствах мультипликативных функций. В. А. Голубев

6135. Обобщенная теорема о главном идеале и доказательство одной гипотезы Дейринга. Таннака (A generalized principal ideal theorem and a proof of a conjecture of Deuring. Tannaka Tadao), Ann. Math., 1958, 67, № 3, 574—589 (англ.)

Пусть K — лучевое поле классов для ведущего дивизора $\mathfrak{f}$ поля алгебраических чисел k и $\mathfrak{F}=\mathfrak{F}(K/k)$ — родовой модуль расширения K/k. Обозначим через A группу идеалов поля k, взаимно простых с $\mathfrak{f}$, и через Θ — мультипликативную группу тех единиц поля K, которые $\equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}}$. Известно, что для каждого идеала $\mathfrak{a}\in A$ существует такое $\alpha(\mathfrak{a})\in K$, $\alpha(\mathfrak{a})\equiv 1 \pmod{\mathfrak{F}}$, что $\mathfrak{a}=(\alpha(\mathfrak{a}))$. Число $\alpha(\mathfrak{a})$ определено с точностью до множителя из группы Θ. Пусть $\sigma(\mathfrak{a})$ — автоморфизм Артина расширения K/k соответствующий идеалу $\mathfrak{a}\in A$. Полагая $f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})=\sigma(\mathfrak{a})\alpha(\mathfrak{b})\alpha(\mathfrak{ab})^{-1}\alpha(\mathfrak{a})$ $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\in A)$, мы получаем 2-коцикл $f\in Z^2(A, \Theta)$, класс когомологий которого $c\in H^2(A, \Theta)$ уже не зависит от выбора $\alpha(\mathfrak{a})$. Доказывается, что в классе c существует коцикл f, обладающий следующими свойствами: $f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\in k$, $f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})=f(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$; $f(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})\equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}}$. Это утверждение для абсолютного поля классов $K(\mathfrak{f}=1)$ было высказано Дейрингом и доказано им для случая, когда k — мнимое квадратичное поле. З. И. Боревич

6136. Факторизация дивизоров. Ламprecht (Restabbildungen von Divisoren. Lamprecht Erich), Arch. Math., 1957, 8, № 4, 255—264 (нем.)

Пусть A — сепарабельно порождаемое поле алгебраических функций от одной переменной и ν_0 — дискретное нормирование ранга 1 его поля констант K. Нормирование ν поля A называется функциональным продолжением нормирования ν_0, если в A существует трансцендентный над K элемент x такой, что для любого многочлена $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n$, $a_i\in K$, имеем $\nu(f(x))=\min\nu_0(a_i)$. Для подмножества M поля A через $\overline{M}$ обозначается образ всех ν-целых элементов из M при естественном гомоморфизме кольца ν-целых элементов на поле вычетов нормирования ν. Доказывается, что если функциональное продолжение ν неразветвлено относительно ν_0, то для любого K-модуля M поля A размерности d его образ $\overline{M}$ является $\overline{K}$-модулем в поле $\overline{A}$ той же размерности d. Если, кроме того, поле $\overline{K}$ относительно алгебраически замкнуто в $\overline{A}$ (т. е. $\overline{A}$ является полем алгебраических функций над полем констант $\overline{K}$), то род поля $\overline{g}$ не превосходит рода g поля A. Функциональное продолжение ν называется регулярным, если оно неразветвлено относительно ν_0, $\overline{K}$ относительно алгебраически замкнуто в $\overline{A}$ и $\overline{g}=g$. Для регулярного продолжения определяется гомоморфизм группы дивизоров поля A в группу дивизоров поля $\overline{A}$. При этом гомоморфизме сохраняются степени дивизоров и, если $a\in A$, $\nu(a)=0$, то образом главного дивизора (a) является главный дивизор $(\overline{a})$. Показано, что для регулярного продолжения ν существует такой элемент $x\in A$, $x\notin K$, что ν является функциональным продолжением относительно этого элемента x и $(A:K(x))=(\overline{A}:\overline{K(x)})$. Отсюда следует, что при $g\geqslant 1$ для заданного нормирования ν_0 поля K существует не более одного регулярного продолжения ν на поле A. Устанавливается ряд условий, достаточных для того, чтобы ограничение ν' регулярного продолжения ν на промежуточном поле A', $K\subset A'\subset A$, было регулярным продолжением для поля A'. Полученные в работе главные теоремы являются обобщениями аналогичных результатов Дейринга (Deuring M., Math. Z., 1942, 47, 643—654). З. И. Боревич

6137. Об одном вопросе, примыкающем к лемме Гаусса, и родственной задаче Хассе. Мейер (Über ein Seitenstück zum Gaußschen Lemma und eine verwandte Aufgabe von H. Hasse. Meyer Curt), Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1959, 23, 114—125 (нем.)

Пусть m, $n\neq 1, 2$ суть натуральные взаимно простые числа. Ищется число $N=N(m, n)$ решений диофантова неравенства $x/m<y/n$, удовлетворяющих условию: $0<x<m/2$, $(x, m)=1$, $0<y<n/2$, $(y, n)=1$.

Доказывается, что в случае, когда m „составное", т. е. имеет хотя бы два простых делителя, число N четное. Если $m=p^\rho$, где p — простое и n — „составное", то, за исключением одного случая, N также четное. Число N оказывается нечетным при $m=p^\rho$, $n=2q^\sigma$, $p\equiv q\equiv -1 \pmod 4$. Если $m=p^\rho$, $n=q^\sigma$, где простое $q\neq 2$, то $(-1)^N=(p/q)$. И, наконец, для $m=p^\rho$, $p\neq 2$, $n=2^\sigma$, $\sigma\geqslant 2$ автор показывает, что $(-1)^N=(-2/p)$, если $\sigma=2$ и $(-1)^N=(2/p)$, если $\sigma>2$.

Во второй задаче требуется определить число решений $N=N(m_1, m_2, m_3)$ системы диофантовых неравенств

$$\frac{x_1}{m_1}+\frac{x_2}{m_2}+\frac{x_3}{m_3}<1,\quad -\frac{x_1}{m_1}+\frac{x_2}{m_2}+\frac{x_3}{m_3}>0,$$

$$\frac{x_1}{m_1}-\frac{x_2}{m_2}+\frac{x_3}{m_3}>0,\quad \frac{x_1}{m_1}+\frac{x_2}{m_2}-\frac{x_3}{m_3}>0,$$

удовлетворяющих условиям: $0<x_1<m_1/2$, $(x_1, m_1)=1$; $0<x_2<m_2/2$, $(x_2, m_2)=1$; $0<x_3<m_3/2$, $(x_3, m_3)=1$, если m_1, m_2 и m_3 — попарно взаимно простые натуральные числа. Доказывается, что N четное, если $m_1, m_2, m_3\neq 1, 2$. И. Г. Мельников

6138. Об одном общем методе решения диофантовых уравнений. Габович (Ühest üldisest meetodist diofantiliste võrrandite lahendamiseks. Gabovitš J.), Loodus ja matem., В сб.: Природа и матем. 1. Таллин, 1959, 123—133 (эст.; рез. русск., англ.)

Статья посвящена решению диофантовых уравнений методом определителей. Суть метода заключается в представлении заданной однородной формы (левой части уравнения) в виде определителя с линейными однородными элементами. В пункте 2 дается описание метода и до-

казательство того, что он дает общее решение данного диофантова уравнения. В последующих пунктах (за исключением пункта 6) показывается применение метода определителей к решению некоторых новых диофантовых уравнений. В пункте 6 рассматривается классическое уравнение Эйлера $x^3+y^3+z^3+u^3=0$ и дается решение более простое, чем решение, полученное Л. Диксоном. По резюме автора

6139. Об одном классе диофантовых уравнений. Ч о в л а (A class of diophantine equations. C h o w l a P a r o m i t a), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 4, 569—570 (англ.)

Пусть $S(g)=\alpha^g+\beta^g$, $\alpha,\beta=(1\pm\sqrt{-7})/2$. Доказывается теорема 1: Для данного $\theta>2$ уравнение $S(g)=S(2^\theta)$ разрешимо только при $g=2^\theta$ (тривиальное решение). Формулируется также (без вывода) теорема 2: При заданном c уравнение $S(g)=c$ имеет не более двух решений. А. Ф. Лаврик

6140. О последней теореме Ферма. Р о д е х а (On Fermat's last theorem. R o d e j a F., E. G.), Las Ciencias, 1956, **21**, 382—383 (исп.)

6141. О неопределенном уравнении Гурматая. М о н к о в с к и й, Ш и н ц е л ь (Sur l'équation indéterminée de R. Goormaghtigh. M ą k o w s k i A., S c h i n z e l A.), Mathesis, 1959, **68**, № 4—6, 128—142 (франц.)

В 1917 г. Гурматай указал, что при $N<10^6$ уравнение

$$N=1+x+\ldots+x^m=1+y+\ldots+y^n,\qquad m>n>1,\ y>x>1 \tag{1}$$

не имеет других решений (N, m, n, x, y) в натуральных числах, кроме двух: (31, 4, 2, 2, 5) и (8191, 12, 2, 2, 90).

Дается ряд теорем, указывающих условия, при которых уравнение (1) или совсем не имеет решений в натуральных числах или имеет только указанные два решения при любом целом N. В. А. Голубев

6142. О предположении Есмановича. К э Ч ж а о (K o C h a o), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Acta scient. natur. Univ. szechuan., 1958, № 2, 81—90 (кит., рез. англ.)

Есманович (РЖМат, 1957, 6139) предположил, что если натуральные числа a, b, c, x, y, z удовлетворяют уравнению $a^2+b^2=c^2$, то уравнение $a^x+b^y=c^z$ имеет только одно решение в натуральных числах: $x=y=z=2$. Доказывается

Т е о р е м а 1. Предположение Есмановича справедливо для чисел

$$a=2n+1,\quad b=2n(n+1),\quad c=2n(n+1)+1, \tag{1}$$

если $n\equiv 3, 7, 11 \pmod{12}$, или если существует простое $p\equiv 3\pmod 4$ такое, что $2n+1\equiv 0\pmod p$; или если существует простое $p\equiv 5\pmod 8$ такое, что $2n+1\equiv 0\pmod p$.

Т е о р е м а 2. Предположение справедливо для чисел (1), если $n\equiv 2\pmod 5$, $n\equiv 3\pmod 7$, $n\equiv 4\pmod 9$, $n\equiv 5\pmod{11}$, $n\equiv 6\pmod{13}$ или $n\equiv 7\pmod{15}$.

Т е о р е м а 3. То же, если $n<96$. В. А. Голубев

6143. О некоторых проблемах относительно сумм четырех кубов. М о н к о в с к и й (Sur quelques problèmes concernant les sommes de quatre cubes. M ą k o w s k i A.), Acta arithm., 1959, **5**, № 2, 121—123 (франц.)

Шинцель и Серпинский (РЖМат, 1959, 1236) высказали гипотезу, что любое целое число $g\geqslant 0$ допускает бесконечное число представлений $g=x^3+y^3-z^3-t^3$ в натуральных числах, и показали, что гипотеза верна для $g\geqslant 300$, кроме $g=\pm 148,\ \pm 257,\ \pm 294$. Показывается, что эта гипотеза верна для $301\leqslant|g|\leqslant 350$ и для $|g|=2\,14,\ 266,\ 292,\ 257$. Дана таблица решений в целых числах x, y, z уравнения $k=x^3+y^3+2z^3$ при $101\leqslant|k|\leqslant 220$, кроме $|k|=113,\ 148,\ 183,\ 190,\ 195$. В. А. Голубев

6144. О цепочке уравнений. Б р и т т о н (On a chain of equations. B r i t t o n C. E.), Scripta Math., 1959, **24**, № 2, 179—180 (англ.)

Даны примеры решений в натуральных числах систем уравнений: $x^3+y^3=u^3+v^3=s^3+t^3$ и $x^3+y^3=u^3+v^3=s^3+t^3=h^3+k^3$ посредством применения тождеств Виета и Веребрюсова. В. А. Голубев

6145. Сравнения Куммера (mod 2^r). К а р л и ц (Kummer's congruences (mod 2^r). C a r l i t z L.), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 4, 394—400 (англ.)

Пусть

$$\frac{2e^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty}E_n(x)\frac{t^n}{n!},\qquad E_n=2^nE_n(1/2),$$

так что $E_n(x)$ — полином Эйлера. Известно, что

$$\sum_{s=0}^{r}(-1)^{r-s}\binom{r}{s}E_{n+sw}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ (p^h,\ p^{rc})),$$

где p — нечетное простое, w — положительное целое такое, что $p^{c-1}(p-1)/w$.

Фробениус установил следующий результат: Пусть a, b, r — целые, $a\geqslant 0$, $b>0$, $r>0$, тогда одна и та же степень числа 2, делящая $E^{2a}(1-E^{2b})^r$, делит и $(2b)^r r!$ Дается доказательство предложения Фробениуса. Доказываются еще 4 аналогичные теоремы. В. А. Голубев

6146. Один класс систем вычетов (mod r) и связанные с этим арифметические функции. I. Обобщение инверсии Мёбиуса. К о э н (A class of residue systems (mod r) and related arithmetical functions. I. A generalization of Möbius inversion. C o h e n E c k f o r d), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 1, 13—23 (англ.)

Рассматриваются множества натуральных чисел, именуемые множествами прямых произведений (direct factor set), а также сопряженные пары P, Q (conjugate pair) таких множеств. Определение этих понятий дано в тексте работы. На основе этих понятий строится обобщение приведенной системы вычетов, обобщение функции Эйлера $\varphi(n)$, функции Мёбиуса $\mu(n)$, принципа обращения Мёбиуса и сумм Рамануджана. Аналогом приведенной системы вычетов является совокупность всех чисел a полной системы вычетов (mod r), для которых $(a, r)\in P$. Такая совокупность называется P-приведенной системой. Число чисел P-приведенной системы обозначается $\varphi_P(r)$ и называется P-эйлеровой функцией.

P-мёбиусова функция вводится равенством $\mu_P(r)=\sum_{\substack{d\mid r\\ d\in P}}\mu(n/d)$. Обобщенный принцип обращения находит свое выражение в импликациях:

$$f(r)=\sum_{\substack{d\mid r\\ d\in Q}}g(r/d)\rightleftarrows g(r)=\sum_{d\mid r}f(d)\,\mu_P(r/d),$$

где P, Q — сопряженная пара.

Дается приложение указанных рассмотрений к определению числа решений сравнения $n\equiv x_1+x_2+\ldots+x_s\pmod r$, где $(x_i, r)\in P$. Н. П. Романов

6147. О представлениях e-функций (mod r). III. Отдельные вопросы. К о э н (Representations of even functions (mod r). III. Special topics. C o h e n E c k f o r d), Duke Math. J., 1959, **26**, № 3, 491—500 (англ.)

Автор продолжает изучение специального класса арифметических функций, введенных им ранее (РЖМат, 1960, 2735). Формулируется ряд теорем. Для примера приведем одну из них.

Теорема 4. Пусть $G_s(n, r)$ — число решений сравнения

$$n \equiv x_1 p_1 + \ldots + x_s p_s \pmod r$$

в простых делителях p_i числа r и $x_i \pmod r$ таких, что $(x_i, r) = 1$ $(i = 1, \ldots, s)$. Тогда при $s \geqslant 1$

$$G_s(n, r) = \frac{\varphi^s(r)}{r} \sum_{d|r} \Big(\sum_{p|r} c(p, d) \Big)^s \frac{c(n, d)}{\varphi^s(d)},$$

где $\varphi(m)$ — функция Эйлера; $c(m, d)$ — известная функция Рамануджана; p пробегает простые делители r.

А. Ф. Лаврик

6148. Сравнение целочисленных матриц. Гаю (Congruenţe de matrici cu elemente din inelul întregilor. Gaiu Em.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A11**, № 6, 334—337 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор определяет понятие сравнения двух матриц по натуральному модулю m и устанавливает теорему, аналогичную теореме Эйлера — Ферма для целых чисел.

Резюме автора

6149. Об одной числовой функции. Монковский (O pewnej funkcji liczbowej. Mąkowski Andrzej), Matematyka, 1959, **12**, № 4, 145—147 (польск.)

В. Серпинский поставил вопрос: При данном натуральном k каким должно быть наименьшее натуральное число $n = \varphi(k)$, чтобы в каждом разложении чисел $1, 2, \ldots, n$, на k различных классов по крайней мере одно из них содержало два различных числа и их сумму. Доказывается, что для этого должно быть: $\varphi(k+1) \geqslant \geqslant 2\varphi(k) + k(k+1)/2 + 1$. В. А. Голубев

6150. Существование сферы, проходящей через заданное число точек с целыми координатами. Куликовский (Sur l'existence d'une sphère passant par un nombre donné de points aux coordonnées entières. Kulikowski Thadée), Enseign. math., 1959, **5**, № 2, 89—90 (франц.)

6151. Некоторые сведения о непрерывных дробях. Сендов Благовест (Някои сведения за верижните дроби. Сендов Благовест), Математ. и физика (Бълг.), 1959, **2**, № 4, 3—13 (болг.)

6152. О дробях с числителем, равным единице. Седлачек (O kmenných zlomcích. Sedláček Jiří), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 2, 188—197 (чешск.; рез. русск., нем.)

Если s — натуральное число, то символом A_s (соответственно B_s) обозначим множество всех рациональных чисел вида $w = \sum_{i=1}^{s} x_i^{-1}$, где x_i — натуральные) (соответственно целые, не равные нулю) числа. Далее, пусть $B_0 = \{0\}$. Автор доказывает следующие теоремы:

1. Если B'_{s+1} — производная множества B_{s+1}, то $B'_{s+1} = B_0 \cup B_s$.

2. Пусть $s \geqslant 2$. Тогда рациональное число w можно лишь конечным числом способов представить в виде суммы $w = \sum_{i=1}^{s} x_i^{-1}$ (x_i — целые, не равные нулю числа) тогда и только тогда, если $w \in B_s - B_{s-2}$.

3. Пусть k, s — натуральные числа, $k \geqslant 2, 2 = (s-1) + 1/2 + 1/2k$. Тогда $2 \in A_{s+1} - B_s$. Автор также проверяет справедливость гипотезы А. Шинцеля (РЖМат, 1958, 3539 К) для $m = 19, 20, 21$. J. Jarník

6153. Об одном следствии из гипотезы Гольдбаха. Шинцель (Sur une conséquence de l'hypothèse de Goldbach. Schinzel André), Изв. Матем. ин-т. Болг. АН, 1959, **4**, 35—38 (франц.; рез. болг., русск.)

Доказывается, что из гипотезы Гольдбаха о том, что всякое четное число > 4 является суммой двух нечетных простых чисел, следует, что всякое нечетное число >171 есть сумма трех различных простых чисел. В.А. Голубев

6154. Об эквивалентности двух гипотез о простых числах. Серпинский (Sur l'équivalence de deux hypothèses concernant les nombres premiers. Sierpiński W.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1959, **4**, 3—6 (франц.; рез. болг., русск.)

Доказывается то же, что в предыдущей работе (реф. 6153).

6155. Обобщенные числовые функции и распределение групп простых чисел. Голубев В. А., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 5, 93—97

Обозначим через $\varphi^{(m)}(n) = \varphi_{s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}}(n)$ число групп, из натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$ каждая, таких, что $a_2 - a_1 = s_1$, $a_3 - a_2 = s_2, \ldots, a_m - a_{m-1} = s_{m-1}$, где s_i — фиксированные четные разности $(a_i, n) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $n_2 - n_1 = n$, $n_1 < a_1 \leqslant n_2$. Число групп из m простых чисел, принадлежащих отрезку $[1, x]$, с данными разностями $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ между ними обозначим через $\pi^{(m)}(x) = \pi_{s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}}(x)$.

Реферируемая работа содержит обзор результатов автора (РЖМат, 1955, 610; 1959, 2290; 9756), относящихся к свойствам функции $\varphi^{(m)}(n)$ и k применениям ее для изучения функции $\pi^{(m)}(x)$. На основе предположения о том, что k-е члены ($k \leqslant m$) групп из m простых чисел с данными разностями между ними равномерно распределены по всем возможным для данных членов арифметическим прогрессиям $nx + a$ с данной разностью n, $(n, a) = 1$, и на основе соотношений, имеющих место для различных функций $\varphi^{(m)}(n)$, выводятся асимптотические формулы для соответствующих функций $\pi^{(m)}(x)$. Например: 1) из $\varphi_4(n) = \varphi_2(n)$ следует, что $\pi_4(x) \sim \pi_2(x)$; 2) из соотношения между $\varphi_2(n)$ и $\varphi(n)$ выводится формула „близнецов“ $\pi_2(x) \sim cx/\ln^2 x$; 3) из $\varphi_s(n) = \varphi_2(n) \prod (p-1)/(p-2)$, где p — нечетные общие простые делители s и n, следует, что

$$\pi_s(x) \sim \pi_2(x) \prod (p-1)/(p-2),$$

где p — нечетные простые делители s и т. д. Асимптотические формулы подтверждаются табличными данными.

Б. М. Бредихин

6156. Критерии делимости на число 7. Плайнер (Kritéria dělitelnosti sedmi. Plajner Rudolf), Mat. škole, 1959, **9**, № 7, 402—405 (чешск.)

6157. Героновы треугольники. Брадис, Сычиков (Despre triunghiurile heronice. Bradis V. M., Sîcikov A. F.), Gaz. mat. şi fiz., 1959, **A 11**, № 6, 325—334 (рум.; рез. русск., франц.)

Треугольник называется героновым, если длины его сторон и его площадь выражаются натуральными числами. Вопрос о нахождении всех героновых треугольников сводится к решению в натуральных числах уравнения $uvw(u+v+w) = s^2$, (u, v, w — длины отрезков, определенных на сторонах треугольника точками касания вписанной окружности; s — площадь треугольника). Общее решение этого уравнения неизвестно. В статье дается частичное решение вопроса; составляется таблица всех героновых треугольников таких, что длина каждой стороны не больше 100. Для этого устанавливаются некоторые свойства героновых треугольников. Используется тот факт, что любой геронов треугольник может быть расположен таким образом, чтобы его вершины имели целочисленные координаты.

Резюме авторов

6158. Движения для «Duplicate Bridge Competitions». Лауффер (Movements for duplicate bridge competitions. Lauffer R.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 341, 218—220 (нем.)

Если одному из положений карточной игры „бридж" придать математическую форму, то возникает следующая комбинаторная задача: $2n+1$ точек окружности делят ее на равные части; в одной точке проведена касательная к окружности; остальные $2n$ точек требуется соединить n хордами так, чтобы не было хорд, равных, параллельных и параллельных касательной. Экспериментальная проверка показала, что условия задачи осуществляются не для каждого n. Требуется найти критерий для выделения значений n, допускающих решение (Behrens D. J., Math. Gaz., 1957, May, 101). В заметке предложена лишь некоторая арифметизация задачи, сводящая ее к подбору из $2n$ порядковых чисел n пар (i, k), удовлетворяющих условиям: 1) $i \neq k$, $i+k \neq 2n+1$; 2) каждую пару (i, k) должна дополнять пара $(2n+1-k, 2n+1-i)$ и не должно быть пар: (i, j), (j, k), $(i+j, k+j)$, для которых $i+k+j \neq 2n+1$ и $(i+j, k-j)$. Параллельно осуществляется интерпретация задачи в форме требования: на шахматной доске, имеющей $(2n)^2$ полей, расставить $2n$ шашек так, чтобы на каждой вертикали и горизонтали находилось по одной шашке, главная диагональ была пустой и служила осью симметрии для искомого расположения, на любой параллели главной диагонали было не более одной шашки. В отношении искомого критерия задача остается нерешенной.

Б. А. Кордемский

6159. Ортогональные латинские квадраты. Паркер (Orthogonal latin squares. Parker E. T.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, 45, № 6, 859—862 (англ.)

Латинским квадратом n-го порядка Эйлер назвал такое размещение n различных символов в форме квадрата $n \times n$, при котором не будет повторяющихся символов в любой строке и в любом столбце. Два латинских квадрата называются ортогональными (или греко-латинскими), если при наложении одного на другой клетки образовавшегося квадрата окажутся заполненными всеми возможными упорядоченными парами из данных символов. Пары ортогональных латинских квадратов существуют для любого нечетного n. Эйлер высказал предположение о несуществовании ортогональных пар латинских квадратов порядка $n \equiv 2 \pmod 4$. Для $n=6$ это предположение подтвердилось (Тарри, 1901), а для $n=22$ и многих других более высоких порядков предположение Эйлера было опровергнуто контрпримерами (Бозе и Шрикханде, 1959). В статье конструктивно обосновано существование пар ортогональных латинских квадратов порядка $n=(3q-1)/2$, где $q \equiv 3 \pmod 4$. При $q=7$, $n=10$. Таким образом 10 оказалось наименьшим значением $n \equiv 2 \pmod 4$, для которого опровергается предположение Эйлера.

Б. А. Кордемский

6160. Ортогональные латинские квадраты. Предварительное сообщение. Далмидж, Джонсон, Мендельсон (Orthogonal latin squares. Preliminary report. Dulmage A. L., Johnson Diane, Mendelsohn N. S.), Canad. Math. Bull., 1959, 2, № 3, 211—216 (англ.)

По вопросу о наибольшем числе возможных попарно ортогональных латинских квадратов порядка n долгое время не было опровергнуто предположение, что это число по крайней мере равно $\max(p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_r^{\alpha_r})-1$, где $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_r^{\alpha_r}$. На примере латинского квадрата 12-го порядка дан обзор хода рассуждений, утверждающих несправедливость указанного предположения. Все латинские квадраты, ортогональные данному, можно получить при помощи некоторых точно определенных трансформаций одного, основного квадрата. В редакционном примечании к статье сообщается без ссылки на источник, что, как доказали Човла, Эрдёш и Страус, наибольшее число попарно ортогональных латинских квадратов порядка n для достаточно большого n и некоторого положительного c превышает n^c. Тем самым еще раз опровергается господствовавшее предположение, так как, очевидно, всегда можно указать такое n, для которого существуют ортогональные латинские квадраты порядка n, но даже самый больший из множителей p^α числа n меньше n^c.

Б. А. Кордемский

6161. О мощности латинских квадратов. Ямамото, Сугаку, 1954, 6, № 1, 18—19 (японск.)

Приведенный латинский квадрат есть бесконечная таблица, составленная из положительных целых чисел таких, что

$$x_{ii} = x_{i1} = i \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

$$x_{ij} \neq x_{ik} \quad (j \neq k;\ i = 1, 2, \ldots),$$

$$x_{ij} \neq x_{kj} \quad (i \neq k;\ j = 1, 2, \ldots).$$

Автор показывает, что мощность множества приведенных латинских квадратов L равна c, мощности континуума. Действительно, задавая произвольную бесконечную последовательность

$$(\varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \ldots), \quad (\varepsilon_i = 0 \text{ или } 1) \qquad (1)$$

с бесконечным числом либо 0, либо 1, можно построить приведенный латинский квадрат такой, что $x_{2i} = \varepsilon_i \pmod 2$ $(i \geqslant 1)$. Так как мощность множества последовательностей (1) равна c и мощность множества $L \leqslant c$, легко получаем $L = c$.

Далее пусть латинский квадрат L над множеством S определяется как множество троек с элементами в S (троек будет n^2, где n — кардинальное число S). Две тройки считаются различными тогда и только тогда, когда по крайней мере два их элемента различны. Говорят, что два латинских квадрата L и L' эквивалентны или принадлежат одному и тому же классу, если они выводимы один из другого двумя последовательными преобразованиями:

1) от $L = \{(x, y, z)\}$ к $L'' = \{\rho(x), \sigma(y), \tau(z)\}$, где ρ, σ, τ — три перестановки в S.

2) от $L = \{(x, y, z)\}$ к $L''' = \{(x, z, y)\}, \{(y, z, x)\}, \{(y, x, z)\}, \{(z, x, y)\}, \{(z, y, x)\}$.

Автор показывает также, что когда S мощности $\mathfrak{A}$, то мощность классов L над S есть c. Он доказывает это, показывая, (что очевидно, достаточно), что классы таблиц произведений группы S порядка $\mathfrak{A}$ будут иметь мощность.

Предположим, что дана возрастающая последовательность простых чисел $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$ Если построить прямое произведение (в форме Бурбаки) циклических групп $p_1, p_2, \ldots$ порядка $p_1, p_2, \ldots$, соответственно, то таблица произведений L_G из G есть счетный приведенный латинский квадрат. Показывается, что различные последовательности соответствуют различным латинским квадратам L_G. Отсюда легко выводятся заключения.

Moh Shaw Kwei

6162. О пифагоровых числах $4n^2-1$, $4n$, $4n^2+1$. Лу Вэнь-дуань (Lu Wen-twan), Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжань кэсюэ), Sichuan daxue xuebao. Ziran kexue, Вестн. Сычуаньск. ун-та (Сер. естеств. н.), Acta scient. natur. Univ. szechuan, 1959, № 2, 39—42 (кит., рез. англ.)

Доказывается, что указанные в заголовке числа, при n натуральном, не могут служить решениями диофантова уравнения $a^x + b^y = c^z$, за исключением случая $x=y=z=2$.

В. А. Голубев

6163. Заметка о нечетных совершенных числах. Перисастри (A note on odd perfect numbers. Perisastri M.), Math. Student, 1958, 26, № 4, 179—181 (англ.)

Даются границы для суммы дробей $1/p_r$, если существует нечетное совершенное число $n=\prod_{r=1}^{k} p_r^{a_r}$, именно $1/2<\sum_{r=1}^{k} 1/p_r<2\log(\pi/2)$. Доказывается, что меньший простой делитель p_1 в этом случае будет: $p_1<2k/3+2$. В. А. Голубев

6164. Исключительные действительные последовательности Лемера. **Дерст** (Exceptional real lehmer sequences. Durst L. K.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 2, 437—441 (англ.)

Пусть $L>0$ и M — целые; последовательность (P): $P_0, P_1, \ldots, P_n, \ldots$ называется последовательностью Лемера, происходящей от $f(z)=z^2-L^{1/2}z+M$, если $P_n=(\alpha^n-\beta^n)/(\alpha-\beta)$ при n нечетном, $P_n=(\alpha^n-\beta^n)/(\alpha^2-\beta^2)$ при n четном, где α, β — корни $f(z)=0$. Если дискриминант $K=L-4M>0$, то последовательность (P) называется действительной. Индекс $n>2$ называется исключительным, если каждый простой делитель P_n делит и P_m, где $0<m<n$. Последовательность (P) в этом случае называется исключительной.

Главный результат (теорема 1): Для действительных последовательностей Лемера единственно возможные исключительные индексы суть 6 и 12. 12 является исключительным индексом только в случае $L=1$, $M=-1$ и $L=5$, $M=1$; 6 — тогда и только тогда, если $L=-3K+2^{s+2}$, $M=-K+2^s$, где $s\geqslant 1$, $2^{s+2}>3K$ и $K>0$ нечетное. В. А. Голубев

6165. Заметка о числах Ферма и Мерсенна. **Сатьянараяна** (A note on Fermat and Mersenne's numbers. Satyanarayana M.), Math. Student, 1958, **26**, № 4, 177—178 (англ.)

Доказывается, что числа Ферма и числа Мерсенна 2^n-1, где $n>1$ нечетное, не могут быть треугольными числами. В. А. Голубев

6166. Об одном классе составных чисел. **Избицкий** (Über eine Klasse zusammengesetzer Zahlen. Izbicki Herbert), Monatsh. Math., 1959, **63**, № 4, 309—316 (нем.)

Пусть β, n, p — целые числа >1, $(n, p)=1$, $i\geqslant 0$ и пусть $a_i=1$, если $i\equiv 0 \pmod p$, $a_i=0$, если $i\not\equiv 0 \pmod p$. Далее, пусть $c_i=0$, если существуют целые неотрицательные числа x, y такие, что $i=px+ny$ и $c_i=\beta-1$ если такие целые числа не существуют.

Теорема 1.

$$\sum_{j=0}^{p(n-1)}\beta^j a_j=\left(\sum_{j=0}^{n-1}\beta^j\right)\left(1+\sum_{j=1}^{(p-1)(n-1)}\beta^j c_j\right).$$

Теорема 2. Пусть a и b — два целых числа >1 $(a, b)=1$; k_1 и k_2 — два неотрицательных целых числа с $k_1+k_2=(a-1)(b-1)$. Тогда одно из диофантовых уравнений $k_i=ax+by$ $(i=1, 2)$ всегда имеет неотрицательное решение.

Теорема 3. Если $\sum_{j=0}^{n-1}\beta^{p_j}$ — простое число, то n — простое число и p равно 1 или делится на n. Если $\sum_{j=0}^{n-1}\beta^{p_j}$ — составное число, то n — составное.

С. В. Огай

6167. Некоторые арифметические свойства обобщенных чисел Бернулли. **Карлиц** (Some arithmetic properties of generalized Bernoulli numbers. Carlitz L.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 2, 68—69 (англ.)

Автор ставит целью улучшить результаты Леопольда (РЖМат, 1959, 9758), полученные им при изучении обобщенных чисел Бернулли. Пусть f — фиксированное целое $\geqslant 1$ и $\chi(r)$ — примитивный характер по mod f. Обобщенные числа Бернулли определяются из следующего соотношения:

$$\sum_{r=1}^{f}\chi(r)\frac{te^{(r+u)t}}{e^{ft}-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_\chi^n(u)\frac{t^n}{n!},\quad B_\chi^n=B_\chi^n(0).$$

Главный результат Леопольда состоит в получении аналога теоремы Штаудта для чисел Бернулли.

В настоящей работе изложены без доказательства улучшенные результаты по аналогии с теоремой Штаудта для случая, когда $f>1$. П. Н. Реморов

6168. Импровизации, основанные на последовательностях Фибоначчи. **Стивенс** (Improvisation based on Fibonacci's series. Stevens J. W.), Scripta Math., 1959, **24**, № 2, 181—183 (англ.)

Пусть, как и в последовательности Фибоначчи, $u_1=0$, $u_2=1$, но каждый следующий член $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \pmod{10}$. Образовавшаяся последовательность однозначных чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, ..., будет периодически повторяться через каждые 60 членов. Цифры одного периода соединяем последовательно по две: 01, 11, 12, 23, 35, ... Получится 60 неповторяющихся чисел из промежутка [1, 99]. Точно так же поступаем еще с четырьмя последовательностями, первые два члена которых: 0 и 2, 0 и 5, 1 и 3, 2 и 6. Образовавшиеся при этом числа в совокупности заполняют весь промежуток целых чисел от 1 до 99. Различные другие группировки чисел одного периода каждой из рассматриваемых последовательностей позволяют выявить еще несколько закономерностей, представляющих не более чем математический курьез. Указаны также последовательности, с помощью которых аналогичным приемом можно образовать все целые числа в промежутке [1, 999]. Б. А. Кордемский

6169. Замечание к статье Эрдёша и Турана. **Мон-ковский** (Remark on a paper of Erdös and Turán. Mąkowski A.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 4, 480 (англ.)

См. РЖМат, 1960, 60.

6170. Полимеры и теория чисел. IV. Проблема слабых и сильных связей в процессе деградации. **Патрия, Нанда** (Polymers and theory of numbers. IV. The problem of weak and strong links in degradation. Pathria R. K., Nanda V. S.), J. Chem. Phys., 1959, **30**, № 5, 1322—1327 (англ.)

Метод изучения процесса деградации линейных полимеров, выдвинутый авторами в трех предыдущих статьях (РЖМат, 1960, 128—130), применяется к рассмотрению процесса деградации монодисперсионной системы полимеров, состоящей из N цепей, каждая из которых имеет два типа связей различной прочности, распределенных случайно по длине. Показано, что приемы, развитые в работе, могут быть применены и в случаях, когда системы полимеров состоят из цепей, имеющих более чем два типа связей. И. Г. Мельников

6171 К. Темы по теории чисел. **Ле-Век** (Topics in number theory. LeVeque William Judson. Reading, Mass., Addison-Wesley Publ. Co., Inc., 1956. Vol. I. x, 198 pp. 5.50 doll.; Vol. 2. viii, 270 pp., 6.50 doll.) (англ.)

См. также: 6042, 6172, 6634, 6861.

АЛГЕБРА

Редакторы *Л. А. Скорняков, В. И. Шестаков*

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙННАЯ АЛГЕБРА

6172. Заметка о целозначных полиномах. Карлиц (A note on integral-valued polynomials. Carlitz L.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 3, 294—299; Indagationes math., 1959, **21**, № 3, 294—299 (англ.)

Обобщаются результаты работ Штрауса (Straus E. G., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 24—27), Брёйна (РЖМат, 1956, 1956) и других авторов, рассматривавших различные подклассы класса целозначных полиномов. В частности, доказывается, что если $K(x)$ — класс целозначных полиномов, имеющих целозначные производные всех порядков, а $M(x)$ — класс целозначных полиномов $f(x)$, для которых $\Delta^r f(x)$ целозначно для всех $r \geqslant 1$ и целых $m_1, \ldots, m_r \geqslant 1$, где $\Delta^0 f(x) = f(x)$,

$$\Delta f(x) = \frac{f(x+m_1) - f(x)}{m_1},$$

$$\Delta^r f(x) = \frac{\Delta^{r-1} f(r+m_r) - \Delta^{r-1} f(x)}{m_r},$$

то $K(x) = M(x)$. Если же $M_r(x)$ — класс целозначных полиномов $f(x)$, для которых $\Delta^k f(x)$ с $1 \leqslant k \leqslant r$ и $m_1, \ldots, m_r \geqslant 1$ целозначно, а $K_r(x)$ — класс целозначных полиномов $f(x)$ таких, что $f^{(k)}(x)$ целозначно для $1 \leqslant k \leqslant r$, то уже $M_r(x) \neq K_r(x)$, хотя по-прежнему $M_r(x) = K_r(x)$.

В работе содержатся также необходимые и достаточные условия принадлежности целозначных полиномов классам $M_r(x)$ и $K_r(x)$. Методы доказательства элементарны. И. Ш. Славутский

6173. Обобщение понятия «круговой области» комплексной плоскости; приложения. Зервос (Généralisation de la notion de «domaine circulaire» du plan complexe; applications. Zervos Spiros), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 19, 2706—2709 (франц.)

Теоремы геометрии нулей полиномов, имеющие место для „круговых областей“ (состоящих из замкнутых областей, представляющих внутреннюю или внешнюю часть круга или полуплоскость; см. Marden M., The geometry of the zeros of a polynomial in a complexe variable, N. Y., 1949), распространяются на значительно более общие алгебраические образования. Через „s. e.“ обозначается подмножество тела K, являющееся элементом множества B подмножеств тела K (включающего и само K), обладающего свойством, что для всякого x (K $B + x = xB = Bx = B$. Подмножество A тела $K_\omega = K \setminus \omega$ (ω — бесконечный элемент) называется „d. e.“ (относительно множества $(K_\omega B) = K_\omega \setminus B$), если для всех ζ ($K - A$ образ A при преобразовании $z' = (\zeta - z)^{-1}$ — есть s. e.. Всякая гомография, т. е. преобразование вида $z' = (az + b)(z - \zeta)^{-1}$, $ba^{-1} \neq -1$, или $z' = (z - \zeta)^{-1}(za + b)$, $a^{-1}b \neq -1$, отображает множество всех d. e. на себя.

Часть θ множества E называется „h. e.“ (по отношению к отображениям $\sigma_i : E \to E'$), если $\sigma_i(\theta)$ принадлежит F-решетчатому множеству, состоящему из подмножеств производного множества E'. Через $f(M)$ обозначается пересечение всех элементов F, содержащих M. Доказывается теорема: Если множество h. e. содержит A, то оно содержит и $\sigma_i^{-1}(f(\sigma_i(A)))$. Из этой теоремы для случая комплексной плоскости вытекают классические теоремы Лагерра—Уолша и Гаусса—Люка.

Подмножество A поля K называется „n-выпуклым“, если для всякого $m \leqslant n$ из соотношений $a_i \in A$ ($i = 1, \ldots, n$) вытекает, что $m^{-1} \sum a_i \in A$. Поле K предполагается алгебраически замкнутым. B — множество всех n-выпуклых подмножеств поля K. При этих условиях имеют место теоремы:

I. Если полином $p(z)$ степени $\leqslant n$ имеет коэффициенты в K, то всякое d. e., содержащее нули полинома $p(z)$, содержит также все нули $p'(z)$.

II. Если полиномы n-й степени $f(z) = \sum \binom{n}{i} a_i z^i$ и $g(z) = \sum \binom{n}{i} b_i z^i$ удовлетворяют условию „аполярности“ $\sum (-1)^i \binom{n}{i} a_i b_{n-i} = 0$, то всякое d. e., содержащее нули одного из полиномов, содержит по крайней мере один нуль другого.

III. Если $f(z)$ — полином степени n, имеющий в K свои нули, то два его фиксированных различных нуля z_1 и z_2 определяют совокупность множеств d. e., каждое из которых содержит по крайней мере один нуль производной $f'(z)$. Эта совокупность состоит из всех d. e., содержащих все корни уравнения $(z - z_1)^n = (z - z_2)^n$.

I, II, III являются обобщением теорем Гаусса—Люка, Грэйса и Грэйса—Хивуда, имеющих место для круговых областей. В статье рассматриваются и некоторые другие теоремы. А. Г. Школьник

6174. Положение корней некоторых многочленов. III. Шпехт (Die Lage der Nullstellen eines Polynoms. III. Specht Wilhelm), Math. Nachr., 1957, **16**, № 5-6, 369—389 (нем.)

Продолжение предыдущих работ автора (РЖМат, 1959, 36с5).

Последовательность многочленов $\{P_n(z)\}$ автор называет последовательностью производных, если она удовлетворяет условиям: a) $P_0(z) = 1$, b) $dP_k(z)/dz = P_{k-1}(z)$ для всех $k \geqslant 1$. Рассматривается положение корней многочленов вида $Q(z) = c_0 P_0(z) + c_1 P_1(z) + \ldots + c_n P_n(z)$, где $P_0(z)$, $P_1(z) \ldots$ — последовательность производных или последовательность многочленов, определенная двучленным рекуррентным соотношением вида $P_{k+1}(z) = (\alpha_k z + \beta_k) P_k(z) - \gamma_k P_{k-1}(z)$, $k \geqslant 1$; $P_0(z) = \gamma_0 \neq 0$, $P_1(z) = \alpha_0 z + \beta_0$; $\alpha_i \neq 0$, $i \geqslant 0$ (известно, что такому рекуррентному соотношению удовлетворяют все ортогональные (с некоторым весом) системы многочленов). Доказано, что если последовательность производных $\{P_n(z)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $P_{k+1}(z) = (\alpha_k z + \beta_k) P_k(z) - \gamma_k P_{k-1}(z)$, $k \geqslant 1$, то для всех n $P_n(z) = \gamma^n H_n((z + \beta)/\gamma)$, где β, γ — некоторые комплексные числа, $H_n(z)$ — многочлен Чебышева—Эрмита, определенный равенством $H_n(z) = \frac{(-1)^n}{n!} e^{\frac{z^2}{2}} \frac{d^n}{dz^n} e^{-\frac{z^2}{2}}$.

Устанавливаются некоторые связи между корнями многочлена $f(z) = a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \ldots + a_n \frac{z^n}{n!}$ и корнями многочлена $F(z) = a_0 H_0(z) + a_1 H_1(z) + \ldots + a_n H_n(z)$. В частности, получен такой результат: Если все корни многочлена $f(z)$ лежат в полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant \beta$, то все корни многочлена $F(z)$ лежат в той же полосе. Основными результатами являются теоремы:

1. Пусть последовательность многочленов $\{P_n(z)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $P_{k+1}(z) = (z - a_{k+1}) P_k(z) - b_k P_{k-1}(z)$, $k \geqslant 1$, $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z - a_1$; пусть, далее, ρ_ν, σ_ν ($0 \leqslant \nu \leqslant n$) — произвольные числа, удовлетворяющие условиям $\rho_0 = \sigma_n = 0$,

$\rho_\nu\sigma_\nu = b_\nu$ ($\rho_\nu \neq 0$), $\nu = 1, 2, \ldots n-1$; $Q(z) = c_0P_0(z) + c_1P_1(z) + \ldots + c_nP_n(z)$. Тогда все корни многочлена $Q(z)$ лежат в круге $|z| \leqslant r_n$, где

$$r_n = \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\left(|\rho_{\nu-1}| + |a_\nu| + |\sigma_\nu| + \frac{|c_{\nu-1}|}{|\rho_\nu\rho_{\nu+1}\cdots\rho_{n-1}|\cdot|c_n|}\right).$$

2. Пусть (нормированная) последовательность многочленов $\{P_n(z)\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $P_{k+1}(z) = (z - a_{k+1})P_k(z) - b_kP_{k-1}(z)$, $k \geqslant 1$; $P_0(z) = 1$, $P_1(z) = z - a_1$; $a_i \geqslant 0$, $b_i \geqslant 0$ для всех $i \geqslant 1$; $Q(z) = c_0P_0(z) + c_1P_1(z) + \ldots + c_nP_n(z)$, $c_n \neq 0$. Тогда все корни многочлена $Q(z)$ лежат в круге $|z| \leqslant \rho$, где ρ — максимальный положительный корень уравнения $|c_0|P_0(z) + |c_1|P_1(z) + \ldots + |c_{n-1}|P_{n-1}(z) = |c_n|P_n(z)$.

Рассматриваются частные случаи, когда последовательность многочленов $\{P_n(z)\}$ образует многочлены Чебышева—Эрмита, многочлены Чебышева $T_n(z)$, многочлены Лежандра, многочлены Лагерра $L_n^{(\alpha)}(z)$ ($\alpha > -1$), многочлены Ньютона $\binom{z}{n} = \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}$.

Для многочленов Чебышева—Эрмита доказано, что максимальный корень многочлена $H_n(z)$ не превосходит $S_n = 2\sqrt{n - [\sqrt[3]{n}]} - 1$. Это улучшает оценку Хана: $S_n < 2\sqrt{n} - \frac{1}{6\sqrt{n}}$ (Hahn W., Schriften Math. Seminar Berlin, 1933, **1**, 211—244). Имеются опечатки: в формулировках теорем 10 и 6 напечатано $D_1(z) = z$ вместо $D_1(z) = z - a_1$, кроме того, в формулировке теоремы 10 ошибочно напечатано

$$r_n = \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\left(|\rho_{\nu-1}| + |a_\nu| + |\sigma_\nu| + \frac{|c_{n-1}|}{|\rho_\nu\rho_{\nu+1}\cdots\rho_{n-1}|\cdot|c_n|}\right)$$

вместо

$$r_n = \max_{1\leqslant\nu\leqslant n}\left(|\rho_{\nu-1}| + |a_\nu| + |\sigma_\nu| + \frac{|c_{\nu-1}|}{|\rho_\nu\rho_{\nu+1}\cdots\rho_{n-1}|\cdot|c_n|}\right);$$

остальные опечатки не столь существенны.

Е. Н. Кузьмин

6175. Замечание по поводу статьи Сато. Дюрбаум (Note on a paper by Satô. Dürbaum Hansjürgen), Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo, 1956, **34**, 19—20 (англ.; рез. японск.)

Элементарное доказательство утверждения Сато (Satô, Bull. Earthquake Res. Inst. Tokyo, 1956, **34**, 19—20) относительно действительного корня некоторого кубического уравнения. E. Kogbetliantz

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 4, 274.

6176. О рациональных уравнениях над полем, содержащих одно неизвестное. Вандивер (On conditional fractional equations in a field, involving one unknown. Vandiver H. S.), Math. Mag., 1959, **32**, № 4, 173—176 (англ.)

Статья носит методический характер и посвящена исследованию уравнения $\varphi(x) = 0$, где $\varphi(x)$ — рациональная функция над некоторым полем. С. Д. Берман

6177. Некоторые замечания о методе подстановок в применении к системе из M уравнений с N неизвестными. Верваккe (Quelques remarques sur la méthode de substitution appliquée à un système de M équations à N inconnues. (D'après une conférence de G. Poitou.) Vervaecke, Mlle), Bull. Assoc. professeurs math. enseign. public, 1959, **38**, № 198, 217—218 (франц.)

6178. Разрешимые уравнения простой степени. Курбатов В. А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, Т. 4. М., АН СССР, 1959, 11—12

6179. Аналитический метод построения двойственной многочлена к квадратичному многочлену. Ян Гоцюань, Сямынь шусюэ тунсюнь, 1958, № 4, 33 (кит.)

6180. Об основной теореме алгебры. Шломиук (Despre teorema fundamentală a algebrei. Schlomiuk N.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 10, 605—608 (рум.; рез. франц., русск.)

6181. Элементарное исследование кратности решения систем алгебраических уравнений. Ашкинузе В. Г., Уч. зап. Шахтинск. гос. пед. ин-та, 1959, **2**, № 6, 3—28

6182. Новый метод доказательства правила Крамера. Ионеску (O nouă metodă de a demonstra regula lui Cramer. Ionescu Gh. D.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Gluj. Cluj, 1959, 79—81 (рум.; рез. русск., франц.)

6183. О дискриминантах билинейной формы. Уайлд (On the discriminants of a bilinear form. Wild Jonathan), Canad. Math. Bull., 1959, **2**, № 1, 46—47 (англ.)

Рассматривается симметричная билинейная форма $f(x, y)$ в n-мерном векторном пространстве E над полем характеристики $\neq 2$. E_f^* — подпространство векторов x, для которых $f(x, y) = 0$ для всех $y \in E$. Ранг $f = n - \dim E_f^*$. Индексом формы (ind f) называется наибольшая размерность подпространства, в котором $f = 0$ тождественно. Пусть $f(x_0, x_0) \neq 0$ и V — подпространство всех x, для которых $f(x, x_0) = 0$; $\dim V = n - 1$. Дискриминантом формы f при $x = x_0$ называется форма $g(x, y) = f(x_0, x_0)f(x, y) - f(x_0, x)f(x_0, y)$. Доказывается, что ранг формы g на единицу меньше ранга формы f и что $\operatorname{ind} g \geqslant \operatorname{ind} f$, причем $\operatorname{ind} g = \operatorname{ind} f + 1$, если V содержит подпространство, в котором $f \equiv 0$, и $\operatorname{ind} g = \operatorname{ind} f$ в противном случае. А. Г. Школьник

6184. Теорема об определителях. Кэ Шао, Сычуань дасюэ сюэбао (цзыжанькэсюэбань), 1955, № 1, 15—20 (кит.)

Пусть A — $r \times n$-матрица ($r < n$) над кольцом R целых алгебраических чисел. Если идеал, порожденный всеми минорами r-го порядка матрицы A, совпадает с кольцом R, то существует такая $(n-r) \times n$-матрица B над кольцом R, что определитель матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ равен 1.

Wan Zhe-xian

6185. Замечание к теореме Виландта. Герстенхабер (Note on a theorem of Wielandt. Gerstenhaber Murray), Math. Z., 1959, **71**, № 2, 141—142 (англ.)

Приводится сравнительно простое доказательство теоремы Виландта (Wielandt H., Math. Z., 1950, **53**, 219—225), описывающей вещественные линейные пространства комплексных $n \times n$-матриц, имеющих лишь вещественные характеристические корни. А. И. Ширшов

6186. Линейные преобразования на алгебрах матриц. Маркус, Мойлс (Linear transformations on algebras of matrices. Marcus Marvin, Moyls B. N.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 1, 61—66 (англ.)

Рассматриваются линейные преобразования в себя полной матричной алгебры M_n над полем комплексных чисел как комплексного линейного пространства. Основные результаты следующие:

1) Линейное преобразование T сохраняет ранг матриц $A \in M_n$ тогда и только тогда, когда $T(A) = UAV$ для всех $A \in M_n$ или $T(A) = UA'V$ для всех $A \in M_n$, где U и V — некоторые фиксированные невырожденные матрицы из M_n, а A' означает транспонированную матрицу A.

2) Следующие условия эквивалентны: a) $\det U = \det[T(U)]$ для всех унимодулярных матриц $U \in M_n$; b) $\det H = \det[T(H)]$ для всех эрмитовых матриц $H \in M_n$; c) $\det A = \det[T(A)]$ для всех $A \in M_n$.

3) Для того чтобы линейное преобразование T сохраняло собственные значения матриц $A \in M_n$ (т. е.

$\det(\lambda E - A) = \det[\lambda E - T(A)]$ для всех $A \in M_n$, (E—единичная матрица), необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий: а) T сохраняет собственные значения всех эрмитовых матриц $H \in M_n$; b) $T(A) = UAU^{-1}$ для всех $A \in M_n$ или $T(A) = UA'U^{-1}$ для всех $A \in M_n$, где U — некоторая фиксированная унимодулярная матрица.

Примечание референта. Результат 2) является очевидным следствием несколько более сильного утверждения: Если $\det H = \det[T(H)]$ для всех эрмитовых унимодулярных матриц $H \in M_n$, то $\det A = \det[T(A)]$ для всех $A \in M_n$, в справедливости которого можно убедиться, пользуясь методами авторов. Аналогичное усиление верно также и для 3): Если T сохраняет собственные значения всех эрмитовых унимодулярных матриц $H \in M_n$, то T сохраняет собственные значения всех матриц $A \in M_n$. Е. Н. Кузьмин

6187. Замечание о тождестве Кэли. Левин (Note on an identity of Cayley. Levine Jack), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 4, 290—292 (англ.)

Доказана для случая $n = 4$ следующая теорема: Пусть ранг матрицы $\|a_{ij}\|$ равен 2 и $a_{ij} \neq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $n \geqslant 2$. Обозначим $|c_{ij}| = \sum c_{1p} c_{2q} \ldots c_{nr}$, где сумма берется по всем перестановкам $pq \ldots r$ чисел $1, 2, \ldots, n$. Тогда $|c_{ij}| \cdot \det \|c_{ij}\| = \det \|c_{ij}^2\|$, где $c_{ij} = \frac{1}{a_{ij}}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Для случая $n = 3$ эта теорема доказана Кэли (Cayley A., J. reine und angew. Math., 1858, 56, 182—185), для $n = 1$ она тривиальна. Е. Н. Кузьмин

6188. Последовательное приведение к тридиагональной форме. Бауэр (Sequential reduction to tridiagonal form. Bauer F. L.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, **7**, № 1, 107—113 (англ.)

Рассматриваются и сравниваются между собой различные методы приведения матрицы к тридиагональной форме посредством последовательных преобразований подобия. Е. Н. Кузьмин

6189. Матрицы второго порядка с элементами из поля классов вычетов по модулю p. Хаймович (Matrizen zweiter Ordnung mit Elementen aus dem Körper der Restklassen mod p. Haimovici Corina), An. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1958, Sec. 1, **4**, № 1, 11—19 (нем.; рез. рум., русск.)

6190. Векторы — основа важнейших математических понятий. Видав (Vektorji — vir pomembnih matematičnih pojmov. Vidav Ivan), Obz. mat. in fiz., 1957 (1958), **6**, № 1, 1—10 (словенск.)

6191. Элементарно-геометрическое доказательство теоремы Сильвестра-Франке об определителях. Варга (Ein elementargeometrischer Beweis des Sylvester-Frankeschen Determinantensatzes. Varga O.), Изв. Матем. ин-т, Бълг. АН, 1959, **3**, № 2, 105—109 (нем.; рез. болг., русск.)

6192 К. Упражнения по математике для инженеров. Ч. IV. Матричное исчисление. Ловаш-Надь (Műszaki matematikai gyakorlatok. C. IV. Matrixszámítás. Lovass-Nagy Viktor. Budapest, Tankönyvkiadó, 1956, 207 l., ill., 22 Ft.) (венг.)

6193 Д. Пространственные матрицы и их приложения к теории алгебраических форм. Соколов Н. П. Автореф. дис. докт. физ.-матем. н., Объедин. совет ин-тов матем., физ., металлофиз. АН УССР, Киев, 1959

ГРУППЫ

6194. Абелевы группы, ассоциированные с некоторыми группами. Пиккар (Les groupes abéliens associés à certains groupes. Piccard S.), Enseign. math., 1958, **4**, № 4, 301—305 (франц.)

Пусть G — несвободная мультипликативная группа, заданная множеством E порождающих элементов и семейством F фундаментальных соотношений. Пусть $n (\geqslant 2)$ — натуральное число и E^* — подмножество множества E, причем каждый элемент из E^* содержится в левой части хотя бы одного из соотношений $f = 1$ семейства F и степень каждого f относительно совокупности содержащихся в этом f элементов из E^* (относительно каждого элемента из E^*) $\equiv 0 \pmod n$. В этом случае группа G называется обладающей свойством $P \pmod n$ по отношению к совокупности элементов из E^* (по отношению к каждому из этих элементов). Распределяя элементы группы G на классы, соответствующие вычетам $\bmod n$, получаем ассоциированную с G абелеву группу. Более подробно рассмотрен случай, когда группа G конечная.

Доказана следующая теорема: Для всякого натурального $n \geqslant 2$ существует неабелева бесконечная группа преобразований натуральных чисел, порождаемая двумя элементами a и b, связанными только соотношениями $a^n = 1$, $b^n = 1$. Эта группа обладает свойством $P \pmod n$ по отношению к каждому из элементов a, b.

Во второй части работы рассматриваются свободные мультипликативные группы с конечным числом порождающих элементов. Пусть $a_1, a_2 \ldots, a_k$ — базис этой свободной группы и $n (\geqslant 2)$ — натуральное число. Пусть $a (\neq 1)$ — произвольный элемент группы G и пусть $a = a_{h_1}^{l_1} a_{R_2}^{l_2} \ldots a_{h_t}^{l_t}$; где $a_{h_m} \neq a_{h_{m+1}}$ $(m = 1, 2, \ldots l - 1)$. Элемент a считается входящим в класс $M_{i_1, i_2, \ldots i_k}$, если правая часть формулы для a имеет степень $\equiv i_\mu \pmod n$ относительно a_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, k)$. Классы $M_{i_1, i_2, \ldots, i_k}$ образуют абелеву группу, ассоциированную с группой G. В. К. Туркин

6195. Абелевы группы, ассоциированные с некоторыми группами. Пиккар (Les groupes abéliens associés à certains groupes. Piccard S.), Actes Soc. helv. sci. natur., 1958, **138**, 93—95 (франц.)

Изложение части результатов, приведенных в предыдущей работе (реф. 6194). В. К. Туркин

6196. О разложении циклов. Маурер (Despre descompunerea ciclurilor. Maurer I.), Gaz. mat. şi fiz., 1958, **A10**, № 11, 656—657 (рум.; рез. франц., русск.)

Доказывается, что любой цикл (конечный или бесконечный) можно разложить в виде произведения двух перестановок второго порядка, показывая практический способ этого разложения. Резюме автора

6197. О периодических группах. Новиков П. С., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 4, 749—752

Намечено доказательство бесконечности свободной периодической группы с $n \geqslant 2$ образующими и показателем периодичности, не меньшим 72. Сформулированный результат дает отрицательное решение известной проблемы Бернсайда о классах периодических и локально конечных групп. А. И. Ширшов

6198. Частично упорядоченные множества конечных групп. Фершль, Нёбауэр (Halbordnungen von endlichen Gruppen. Ferschl Franz, Nöbauer Wilfried), Arch. Math., 1958, **9**, № 6, 401—406 (нем.)

Во множестве всех попарно неизоморфных конечных групп Γ следующим образом определяется частичная упорядоченность: $A \prec B$, где A и $B \in \Gamma$, если группа A изоморфна некоторой подгруппе группы B. Через $T(A)$ обозначим множество всех таких $X \in \Gamma$, что $X \prec A$. После описания частично упорядоченного множества (относительно указанного отношения) конечных абелевых групп, легко следующего из основной теоремы

теории конечных абелевых групп, авторы показывают, что $T(A)$ является упорядоченным множеством только для следующих типов групп: 1) циклических p-групп (p — простое число), 2) элементарных абелевых групп, 3) группы кватернионов и 4) неабелевых групп порядка p^3, $p>2$, элементы которых удовлетворяют условию $x^p=1$. В заключение дается описание конечных групп, для которых порядок $T(A)$ не превосходит шести.

П. А. Гольберг

6199. Цветные группы Кейли и гамильтоновы линии. Рапапорт (Cayley color groups and Hamilton lines. Rapaport Elvira Strasser), Scripta math., 1959, **24**, № 1, 51—58 (англ.)

Рассматривается вопрос о том, в каком случае график группы имеет гамильтонову линию, т. е. замкнутую связную траекторию, не имеющую кратных точек и проходящую через все вершины графика; ответ на этот вопрос зависит не только от строения группы, но и от того, с помощью каких порождающих элементов эта группа задана. Доказывается наличие гамильтоновой линии для некоторых случаев задания симметрической группы подстановок с помощью порождающих эту группу транспозиций.

В. К. Туркин

6200. Некоторые конструкции для локально конечных групп. Холл (Some constructions for locally finite groups. Hall P.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 3, 305—319 (англ.)

Доказывается, что существует единственная с точностью до изоморфизма счетная локально конечная группа C, которая в качестве подгруппы содержит группу, изоморфную любой конечной группе, и любые две конечные изоморфные подгруппы которой сопряжены. Если через S_m обозначить совокупность всех элементов порядка m группы C (образующих, очевидно, один класс сопряженных элементов), то оказывается, что $C=S_mS_m$, откуда, в частности, следует простота группы C. Далее показывается, что любая локально конечная счетная группа G изоморфна $2^{\aleph_0}$ различным подгруппам группы C и что группа C вербально полна (т. е. для любого элемента $a\in C$ и любого слова $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не равного тождественно единице, уравнение $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a$ разрешимо в группе C). В конце работы доказывается, что любая счетная абелева p-группа совпадает с центром некоторой вербально полной локально конечной счетной p-группы (вербально полные группы, рассматривавшиеся в работе Хигмана, Б. Нёймана и Г. Нёйман (J. London Math. Soc, 1949, **24**, 247—254) не были локально конечными).

А. И. Ширшов

6201. Об одном классе *FC*-групп. Макдоналд (A class of *FC* groups. Macdonald I. D.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 73—80 (англ.)

Пусть G — произвольная группа и $a\in G$. Индекс нормализатора элемента a в G называется индексом a в G (Baer R., Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, 20—47). Группа, у которой индексы всех элементов конечны, называется FC-группой. n-BFC-группой, где n — натуральное число, называется такая FC-группа, индексы элементов которой не превосходят n и существует по крайней мере один элемент индекса n (РЖМат, 1955, 1112). Доказываются следующие теоремы:

1) $p^m=BFC$-группа G (p — простое число) нильпотентна тогда и только тогда, когда индекс каждого элемента группы G является делителем p^m.

2) Если индекс каждого элемента группы G является степенью данного простого числа p, то G — локально нильпотентная группа и, кроме того, группа G обладает возрастающим центральным рядом, тип которого не превосходит ω. Ставятся следующие проблемы: 1) Пусть G является n-BFC-группой, $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ (p_i — различные простые числа), индексы всех элементов G делят n и для каждого i ($i=1, 2, \ldots, k$) существует в G по крайней мере один элемент индекса $p_i^{\alpha_i}$. Будет ли группа G нильпотентной? 2) Будет ли всякая n-BFC-группа, у которой индексы всех элементов являются делителями числа n, разрешимой?

П. А. Гольберг

6202. Критерий замкнутости конечных групп. Бер (Kriterien für die Abgeschlossenheit endlicher Gruppen. Baer Reinhold), Math. Z., 1959, **71**, № 3, 325—334 (нем.)

Пусть Π — некоторое непустое множество простых чисел, $o(G)_\Pi$ — наибольший делитель порядка конечной группы G, делящийся только на простые числа из множества Π. Конечная группа G называется Π-замкнутой, если произведение любых двух ее Π-элементов является также Π-элементом (Π-элементом группы G называется такой элемент, порядок которого делится только на простые числа из Π). Работа содержит ряд критериев Π-замкнутости конечной группы. Группа G называется слабо Π-замкнутой, если в каждой ее подгруппе A количество Π-элементов равно $o(A)_\Pi$.

Доказываются следующие теоремы: 1) Если G — слабо Π-замкнутая группа и каждая ее Π-подгруппа нильпотентна, то G Π-замкнута и совокупность G_Π всех Π-элементов группы G образует нильпотентную подгруппу (очевидно, характеристическую). Верна также обратная теорема. 2) Если G — слабо Π-замкнутая группа и каждая ее Π'-подгруппа нильпотентна, то G — Π-замкнута и фактор-группа G/G_Π нильпотентна. Показано, что верна и обратная теорема. При этом Π' есть множество всех простых чисел, не принадлежащих Π. Работа содержит еще два критерия Π-замкнутости группы. Ставятся следующие проблемы: 1) Будет ли группа G слабо Π-замкнутой, если число всех ее Π-элементов равно $o(G)_\Pi$? 2) Всякая ли слабо Π-замкнутая группа является Π-замкнутой? (Обратное утверждение очевидно).

П. А. Гольберг

6203. Сплетения и *p*-группы. Бомслаг (Wreath products and p-groups. Baumslag Gilbert), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, **55**, № 3, 224—231 (англ.)

Приводятся простейшие свойства сплетений двух групп. Доказывается, что сплетение группы A при помощи группы B тогда и только тогда нильпотентно, когда A и B нильпотентные p-группы по одному p, причем A конечного показателя и B конечна.

С помощью сплетений передоказывается результат Б. Х. Неймана о вложимости произвольной группы в полную. В качестве уточнения этого факта доказывается следующий результат. Каждая периодическая группа (p-группа) может быть вложена в полную периодическую группу (полную p-группу). Приводится пример, показывающий, что R-группа (в смысле П. Г. Конторовича) не всегда вложима в полную R-группу.

Б. И. Плоткин

6204. Об общем произведении двух конечных циклических групп, одна из которых имеет порядок p^2. Якуб (On the general products of two finite cyclic groups one of which being of order p^2. Yacoub K. R.), Publs math., 1959, **6**, № 1-2, 26—39 (англ.)

Группа G называется общим произведением своих подгрупп A и B, если $G=AB$ и $A\cap B=\{e\}$. Изучаются типы определяющих соотношений для групп, указанных в заглавии, а также признаки изоморфизма таких групп в терминах определяющих соотношений.

Б. И. Плоткин

6205. Об одном общем расширении групп. I. Сеп (Über eine allgemeine Erweiterung von Gruppen. I. Szép J.), Publs math., 1959, **6**, № 1-2, S, 60—71) (нем.)

Пусть $A=\{e, a, b,\ldots\}$ — произвольная группа и $\Gamma=\{\varepsilon, \alpha, \beta,\ldots\}$ — некоторое множество символов, причем символ ε отождествляется с единицей e группы A. Рассматривается следующая проблема расширения. Пусть $S=A\Gamma=(\ldots(a, \alpha),\ldots)$ — множество формальных пар. Требуется в S так определить произведение, чтобы S превратить в группу G такую, что $G=A+A\alpha+A\beta+\ldots$ $(A=A\varepsilon)$, где A становится подгруппой, а Γ — системой представителей правых смежных классов по A. Приводятся функции и соотношения, с помощью которых решается эта задача и некоторые ее уточнения. Рассматриваются связи указанной общей задачи с другими известными типами расширений групп. Б. И. Плоткин

6206. Замечание о соотношениях ортогональности в теории представлений конечных групп. Нагао (A remark on the orthogonality relations in the representation theory of finite groups. Nagao Hirosi), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 1, 59—60 (англ.)

Пусть G — конечная группа порядка g и $t\to\|a_{ij}^{(\mu)}(t)\|$ $(\mu=1,\ldots,k;\ t\in G)$ — абсолютно неприводимое представление группы G степени f_μ с характером χ_μ над полем, характеристика которого не делит g.

Автор доказывает, что известное соотношение ортогональности для матричных элементов:

$$\sum_{t\in G} a_{ij}^{(\mu)}(t)\, a_{kl}^{(\nu)}(t^{-1})=\delta_{\mu\nu}\delta_{il}\delta_{jk}\frac{g}{f_\mu}$$

является следствием формулы для следа регулярного представления группы

$$\sum_{\mu=1}^{k} f_\mu\,\chi^{(\mu)}(t)=\begin{cases}0 & (t\neq 1)\\ g & (t=1)\end{cases}$$

С. Д. Берман

6207. Конечная группа, действующая на n-мерной клетке без неподвижных точек. Флойд, Ричардсон (An action of a finite group on an n-cell without stationary points. Floyd E. E., Richardson R. W.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 2, 73—76 (англ.)

Строится пример, показывающий, что знакопеременная группа A_5 симплициально действует без неподвижных точек в некотором комплексе, гомеоморфном открытому n-мерному шару. А. Л. Онищик

6208. О некоторых разрешимых группах Ли. Сайто (Sur certains groupes de Lie résolubles. Saitô Masahiko), Scient. Papers Coll. Gen. Educ. Univ. Tokyo, 1957, **7**, № 1, 1—11 (франц.)

Автор называет алгеброй класса $\mathfrak{G}$ алгебру Ли, изоморфную алгебре Ли группы движений плоскости. Единственное существенное расширение алгебры класса $\mathfrak{G}$ при помощи одномерной алгебры называется алгеброй класса $\mathfrak{D}$. Пусть G — односвязная разрешимая группа Ли, $\mathfrak{D}$ — ее алгебра Ли. Доказывается, что экспоненциальное отображение отображает $\mathfrak{G}$ на G тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ не содержит подалгебр классов $\mathfrak{C}$ и $\mathfrak{D}$. В этом случае оказывается, что экспоненциальное отображение взаимно однозначно и что центр группы G связен. Доказывается также, что в общем случае ранг группы компонент центра группы G не превосходит $\dim\mathfrak{G}-\dim\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{n}$ — максимальный нильпотентный идеал в $\mathfrak{G}$. А. Л. Онищик

6209. Некоторые компактные солвмногообразия и локально аффинные пространства. Ауслендер (Some compact solvmanifolds and locally affine spaces. Auslander Louis), J. Math. and Mech., 1958, **7**, № 6, 963—975 (англ.)

Пусть Γ — группа, входящая в точную последовательность $1\to Z^s\to\Gamma\to Z^t\to 1$, где Z^n — прямое произведение n экземпляров группы целых чисел. Строится компактное однородное пространство $S(\Gamma)$ некоторой связной разрешимой группы Ли, фундаментальной группой которого является Γ. Доказывается, что всякое компактное полное локально аффинное пространство с фундаментальной группой Γ гомеоморфно пространству $S(\Gamma)$. А. Л. Онищик

6210. Теория полугрупповых структур. I. Аксиомы и операции замыкания на d-структурах. Кришнан (Theory of demi-group structures. Axioms and closure operations for d-structures. Krishnan V. S.), J. Madras Univ., 1957, **B27**, № 2-3, 305—315 (англ.)

Рассматриваются d-структуры, т. е. структуры (в смысле Бурбаки), определенные на полугруппах. Исследуются операции над d-структурами. Исследование „сходно и в некотором смысле двойственно" проведенному в РЖМат, 1958, 6549. Более подробное описание результатов требует введения слишком большого числа определений. Л. А. Скорняков

6211. Об обратимых полугруппах и полугруппах, являющихся объединениями групп. Чаудхури (Sur les demi-groupes inversifs et les demi-groupes réunions de groupes. Chaudhuri Niranjan Prasad), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 23, 3262—3263 (франц.)

Комплекс H элементов полугруппы D называется совершенным справа, если 1) H является сильным справа и 2) $H:h=H:h'$ для любых $h, h'\in H$ (РЖМат, 1955, 1115). Пусть D — регулярная полугруппа (РЖМат, 1957, 166) с левым сокращением. Для того чтобы комплекс $H\subseteq D$ был совершенным справа, необходимо и достаточно, чтобы $h_1h_2'h_3\in H$ для любых $h_i\in H$, где $xx'x=x$. Если совершенный справа комплекс $H\subseteq D$ содержит идемпотент, то он является унитарной слева (РЖМат, 1 55, 4508) подполугруппой D. Всякий двусторонне унитарный комплекс $H\subseteq D$ является совершенным справа. Если полугруппа D с левым сокращением является объединением групп, то всякий унитарный слева комплекс $H\subseteq D$ является совершенным справа. Л. М. Глускин

6212. Леводистрибутивные квазигруппы. Стейн (Left-distributive quasigroups. Stein Sherman K.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 577—578 (англ.)

Доказываются простые утверждения, относящиеся к представлению леводистрибутивной квазигруппы подмножеством некоторой группы с помощью операции $x\circ y=xyx^{-1}$. А. И. Ширшов

6213. Об одном классе структурно упорядоченных групп. Якубик Ян (Jakubík Ján), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 2, 150—161 (рез. чешск., англ.)

Для произвольного множества $A\subseteq G^+$ структурно упорядоченной группы (l-группы) G определено множество $K'(A)$ всех элементов $y\in G^+$, для которых $x\in A\to x\,||\,y=0$. Полагаем $K'(K'(A))=K(A)$. Будем считать, что l-группа G удовлетворяет условию (P), если при $A\subseteq G^+$ к любому $x\in G^+$ найдутся элементы $y\in K(A)$, $z\in K'(A)$ такие, что $x\leqslant y\cup z$. Приведен пример l-группы, обладающей свойством (P), но не являющейся коммутативной, и пример коммутативной l-группы, не обладающей свойством (P). Обозначим через (C) свойство l-группы быть разложимой нетривиальным способом в прямое кардинальное произведение l-групп, а через (D) — свойство иметь максимальный собственный l-идеал, содержащий в себе каждый собственный l-идеал группы G. Доказано, что если l-группа G удовлетворяет условию (P), то она либо линейно упорядоченная, либо обладает свойством (C). Если к тому же структура $[G]$ l-идеалов группы G удовлетворяет условию возрастающих цепей, то в случае, когда группа G является линейно упорядоченной, она обладает свойством (D). Если l-группа G удовлетворяет условию (P) и структура $[G]$ ее l-идеалов удовлетворяет условию убывающих цепей, то группа G разложима

в прямое кардинальное произведение $G \cong \Pi G_l (l=1,2,\ldots,n)$ линейно упорядоченных групп G_l. Обозначим через $B(0)$ теоретико-множественное пересечение всех тех l-подгрупп G_l группы G, для которых $x \in G$, $x \parallel 0 \to x \in G_l$. $B(0)$ является l-идеалом группы G. Естественно образованную l-группу $G/B(0)$ обозначим через $\overline{G}$. Одно из указанных выше утверждений имеет место при более слабых условиях, накладываемых на группу: если G есть l-группа, структура $[\overline{G}]$ l-идеалов группы $\overline{G}$ удовлетворяет условию возрастающих цепей и $B(0)$ обладает свойством (P), то l-группа G обладает либо свойством (C), либо свойством (D). В заключении доказана теорема, обобщающая теорему Биркгофа (Биркгоф, Теория структур, Изд-во ин. лит., 1948, стр. 327 теор. 22):

Если структура $[G]$ l-идеалов l-группы G имеет конечную длину и l-подгруппа $B(0)$ коммутативна, то G обладает либо свойством (C), либо свойством (D). Сформулированы нерешенные задачи. А. А. Виноградов

6214. Упорядоченные коммутативные полугруппы второго рода. Клиффорд (Ordered commutative semigroups of the second kind. Clifford A. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 5, 682—687 (англ.)

Пусть S — коммутативная полугруппа, линейно упорядоченная отношением $<$; P — множество всех таких элементов $c \in S$, что из $a < b$ следует $ac \leqslant bc$; Q — множество всех таких элементов $c \in S$, что из $a < b$ следует $ac \geqslant bc$; $N = P \setminus Q$. S называется упорядоченной коммутативной полугруппой первого рода (у. к. п. I), если $S = P$, и упорядоченной коммутативной полугруппой второго рода (у. к. п. II), если $S = P \cup Q$. Если A, B — подмножества S, то $A < B$ означает, что $a < b$ для любых $a \in A, b \in B$.

Пусть S — у. к. п. II. Доказывается, что если N пусто, то $P < Q$ или $Q < P$. Если N не пусто, то S содержит нуль 0; $a \in N$ тогда и только тогда, когда $aS = 0$; N является выпуклым идеалом S. Если $P \setminus N$ и $Q \setminus N$ не пусты, то $P \setminus N < N < Q \setminus N$ или $Q \setminus N < N < P \setminus N$; в частности, P, Q, N $P \setminus N, Q \setminus N$ выпуклы. Если $Q \setminus N$ пусто (в этом случае S является у. к. п. I) или $P \setminus N$ пусто, то $P \setminus N$ (соответственно $Q \setminus N$) может не быть выпуклым.

Пусть R — у. к. п. I с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом u, где u — единица полугруппы R; k — фиксированный элемент из R; ρ — стабильная эквивалентность на R, каждый класс которой $\overline{a}$ является выпуклым подмножеством R, причем из $x \rho y$ следует $kx = ky$. Обозначим через L множество всех классов $\overline{a}$, φ — естественный гомоморфизм R на L, $S = R^{\varphi} L$. Будем считать, что $\varphi 0 = 0$, $L < R \setminus 0$, $\varphi x < \varphi y$ тогда и только тогда, когда $x > y$ и $\varphi x \neq \varphi y$. Продолжим действие в R до действия в S следующим образом: $x \varphi y = \varphi x \cdot y = \varphi(xy)$, $\varphi x \cdot \varphi y = kxy$. Тогда S станет у. к. п. II, удовлетворяющей условиям: (а) S не является у. к. п. I, (б) S содержит наименьший элемент δ и наибольший элемент u, где u — единица полугруппы S, (в) S содержит нуль 0, $\delta \neq 0 \neq u$, (г) $L = \delta \cdot R$, где $L = [\delta, 0]$, $R = [0, u]$.

Обратно, каждая у. к. п. II со свойствами (а) — (г) может быть получена из $R = [\delta, u]$ описанным выше способом. Этот результат является дискретным аналогом конструкции Коэна и Уэйда (РЖМат, 1960, 1416).

Л. М. Глускин

6215. О коммутативных нормированных полугруппах. Ли Дён Ук, Хакпо, 1956, № 3, 23—41 (кор.)

6216. Об обобщении понятия чистых подгрупп. С. Гашальи. Лось Ж., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 146—149

6217 К. О классических группах. Дьёдонне (Sur les groupes classiques. Dieudonné Jean. (Actual. scient. et industr., № 1040, publs Inst. math. Univ. Strasbourg, 6). Paris, Hermann, 1958, 86 p.) (франц.)

Изучается алгебраическое строение классических линейных групп над произвольным полем. Результаты являются обобщением классических результатов Жордана и Диксона. Каждая классическая серия групп исследуется отдельно, причем основным методом является разложение преобразования из группы в произведение некоторых инволютивных преобразований. Пусть в n-мерном векторном пространстве E над полем K задана кососимметрическая билинейная форма ранга n. Группа $Sp_n(K)$ линейных преобразований пространства E, сохраняющих эту форму, называется симплектической группой. Доказывается, что за немногими исключениями ($K = F_2$, $n =$ или 3 и $K = F_3$, $n = 2$, где F_r — поле из r элементов) всякий нормальный делитель симплектической группы содержится в ее центре. Пусть f — симметрическая билинейная форма ранга n в E и пусть характеристика поля K отлична от 2. Группа $O_n(K, f)$ преобразований пространства, сохраняющих форму f, называется ортогональной группой, связанной с f. Фактор-группа этой группы по центру обозначается через $PO_n(K, f)$. Максимальная размерность ν подпространств в E, на которых $f = 0$ тождественно, называется индексом формы f. Доказывается, что при $n \geqslant 5$ и $\nu \geqslant 1$ коммутант группы $PO_n(K, f)$ является простой группой. Если характеристика поля K равна 2, то квадратичной формой на K называется такая функция g на E со значениями в K, что $g(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 g(x) + \mu^2 g(y) + \lambda\mu f(x, y)$, где f — некоторая кососимметрическая билинейная форма. В этом случае ортогональная группа определяется как группа $O_n(K, g)$ преобразований, сохраняющих форму g. Пусть ν — максимальная размерность подпространств, на которых $g = 0$ тождественно, и пусть $2p$ — ранг формы f. Доказывается, что коммутант группы $O_n(K, g)$ является простой группой, если $n = 2p \geqslant 6$, $\nu \geqslant 1$, или если $n > 2p \geqslant 2$, $\nu \geqslant 1$. При $\nu = 0$ эти утверждения об ортогональных группах, вообще говоря, перестают быть верными. Пусть K является сепарабельным расширением степени 2 над некоторым полем K_0. Естественным образом вводится понятие эрмитовой формы в пространстве E, а также ранга и индекса такой формы. Группа $U_n(K, f)$ преобразований, сохраняющих симметрическую эрмитову форму f ранга n, называется унитарной группой. Через $U_n^+(K, f)$ обозначается ее подгруппа, состоящая из унимодулярных преобразований. Доказывается, что если $n \geqslant 2$ и индекс формы $\nu \geqslant 1$, то всякий нормальный делитель группы $U_n^+(K, f)$ содержится в ее центре (за исключением случаев $K_0 = F_3$, $n = 2$, и $K_0 = F_2$, $n = 2$ или 3). Тело K с центром $K_0 \neq K$ называется рефлексивным, если существует антиавтоморфизм $\xi \to \overline{\xi}$ тела K такой, что $\xi + \overline{\xi} \in K_0$, $\xi\overline{\xi} = \overline{\xi}\xi \in K_0$ для всех $\xi \in K$ и $\xi = \overline{\xi}$ для всех $\xi \in K_0$. Вводится понятие эрмитовой формы в векторном пространстве E над рефлексивным телом K. Так же как в коммутативном случае, определяется группа $U_n(K, f)$. Доказывается, что если $n \geqslant 2$ и индекс $\nu \geqslant 1$, то всякий нормальный делитель этой группы содержится в ее центре. А. Л. Онищик

6218 Д. Характеристические соотношения базисов симметрических групп. Калам (Les relations caractéristiques des bases du groupe symétrique. Calame André.—Thèse, Univ. Neuchâtel, 1955, 101 p.) (франц.)

Пусть G — конечная группа, порождающаяся двумя элементами S и T, которые связаны соотношениями $g(S, T) = 1$. Система характеристических соотношений, которая определяет группу G, называется независимой, если ни одно из соотношений не является следствием остальных; она называется минимальной, если группа не определяется меньшей системой соотношений. Например, соотношения $S^3 = T^2 = STST^{-1} = 1$ образуют независимую, но не минимальную систему соотношений для симметри-

ческой группы S_3, в то время как $T^2 = TSTS^{-2} = 1$ является минимальной независимой системой. Пикар доказала, что для $n = 3, 4, 5$ каждая пара образующих симметрической группы S_n удовлетворяет минимальной системе из $n-1$ соотношений. Автор доказывает тот же результат для S_6 и показывает, что система определяющих соотношений Мура для S_n (Moore E. H., Proc. London Math. Soc., 1897, **28**, 357—366) не является минимальной. Отправляясь от циклической подгруппы H, порожденной некоторым элементом S, автор восстанавливает группу S_6 посредством последовательного образования подсистем HT^j, HT^jS^k, $HT^jS^kT^r$ и т. д. Из полученных таким образом 313 подсистем с элементом S четвертого порядка 180 являются различными. 133 дубликата к уже рассмотренным для образования дальнейших подсистем не используются, но служат вместе соотношениями $S^4 = T^3 = 1$ для образования 135 характеристических соотношений, и доказывается, что каждое возможное соотношение между S и T является следствием этих характеристических соотношений. Эти соотношения можно уменьшить до минимальной системы из 5. При внутренних автоморфизмах каждая пара образующих элементов для S_6 эквивалентна одной из 163 пар, которые далее группируются в классы посредством некоторого типа бирациональной функциональной эквивалентности. Для каждого класса пять соотношений достаточны для определения группы. J. S. Frame

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 940.

6219 Д. Проблема вхождения для прямых и свободных произведений групп. Михайлова К. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гос. пед. ин-т, М., 1959

6220 Д. К вопросу о классификации, разрешимости и обобщенной разрешимости πd-групп. Громыко В. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорусск. ун-т, Гомель, 1959

6221 Д. О разбиениях Дирихле для n-мерных кристаллографических пространственных групп. Сандакова Н. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1959

6222 Д. Нормальные произведения групп. Кравцов В. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Белорусск. ун-т, Минск., 1959

6223 Д. Полугруппы бинарных отношений. Зарецкий К. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т им. А. И. Герцена, Л., 1959

6224 Д. Группы с конечными классами сопряженных абелевых подгрупп. Еремин И. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Пермск. ун-т, Пермь, 1959

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

6225. Бесконечномерные квадратичные формы над полями алгебраических чисел. О' Мира (Infinite dimensional quadratic forms over algebraic number fields. O'Meara O. T.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 1, 55—58 (англ.)

Доказана теорема: Невырожденные квадратичные формы f и f_1 от счетного числа переменных над конечным расширением F поля рациональных чисел, эквивалентных тогда и только тогда, когда они эквивалентны для всех действительных пополнений поля F. Эта теорема обобщает результаты, полученные ранее различными авторами (Everett C. J., Ryser H. J., Duke Math. J., 1949, **16**, 553—570; Kaplansky I., An. Acad. Brasil., 1950, **22**, 1—17). Условия эквивалентности квадратичных форм от счетного числа переменных над полем действительных чисел были найдены Савиджем (Savage L. J., Duke Math. J., 1946, **13**, 521—528). С. Д. Берман

6226. Письмо в редакцию (по поводу статьи «Об единицах алгебраических полей третьего и четвертого порядков»). Биллевич К. К., Матем. сб., 1959, **48**, № 2, 256

Исправление опечаток, допущенных в указанной в заглавии работе автора (РЖМат, 1957, 6873).

Б. М. Уразбаев

6227. О структуре нормальных подполей. Бандьопадхьяй (On the lattice of normal subfields. Bandyopadhyay Shyama Prasad), Bull. Calcutta Math. Soc., 1957, **49**, № 3, 139—145 (англ.)

Пусть $p(x)$—некоторый полином над полем F. Множители в разложении $p(x)$ образуют структуру $L(p(x))$, которая называется структурой разложений $p(x)$. Поле разложения N_r любого полинома $r(x)$ над F является нормальным расширением поля F и однозначно с точностью до изоморфизма определяется полиномом $r(x)$. Если $r(x)$ является множителем полинома $s(x)$, то N_r — подполе поля N_s. Определим бинарное отношение R для изотонного отображения $r(x) \to N_r$ так: $r(x)Rs(x)$ справедливо тогда и только тогда, когда $N_r = N_s$. R — отношение эквивалентности, образующее классы полиномов $(a(x))$, определенные посредством множителей полинома $p(x)$. Доказывается, что эти классы образуют структуру $L\{p(x)\}$, называемую структурой классов, определенных множителями полинома $p(x)$, корни которых бирационально связаны.

Рассмотрим нормальные подполя K из N такие, что $F \supseteq K \supseteq N$, каждое из которых само является полем разложения по крайней мере одного множителя $p(x)$. Тогда нормальные подполя образуют структуру $L(N/F)$, где F — основное поле и $p(x) \in F[x]$. Доказывается, что структуры $L\{p(x)\}$ и $L(N/F)$ изоморфны.

С помощью тех же классов определяется топология T в $L(p(x))$. Структура $L(N/F)$ изоморфна структуре тех множителей $p(x)$, которые замкнуты относительно этой топологии T. Это устанавливает связь между структурами нормальных расширений и структурами разложения, что позволяет говорить о теории Галуа с помощью структур разложения. Автор пользуется терминологией Биркгофа и Маклейна (Birkhoff G., Maclane S., A survey of modern algebra, 1948). См. также РЖМат, 1959, 6740.

Е. И. Пятницкая, М. Гриндлингер

6228. О полных кольцах дискретной оценки с ветвлением. Херема (On ramified complete discrete valuation rings. Heerema Nickolas), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 3, 490—496 (англ.)

Под кольцом дискретной оценки (к. д. о.) понимается коммутативная область целостности R с единственным простым идеалом, являющимся главным идеалом, порождаемым некоторым элементом q. Оценка $V(a)$ произвольного элемента $a \in R$ равна n, если $a = a'q^n$, где a' — некоторый обратимый элемент кольца R. К. д. о. R называется полным (п. к. д. о.), если оно полно в топологии, полной системой окрестностей нуля в которой являются главный идеал (q) и все его степени. Пусть F — поле вычетов кольца R, т. е. $F = R/(q)$. К. д. о. R характеристики нуль называется к. д. о. без ветвления, если характеристика поля F равна p и $V(p) = 1$; если $V(p) = n > 1$, то R называется к. д. о. с ветвлением и обозначается через R_n, а n называется индексом ветвления. Известно, что для любого поля F простой характеристики существует по крайней мере одно п. к. д. о. без ветвления.

Доказывается, что для любого п. к. д. о. R_n с ветвлением индекса n и с полем вычетов F существует по крайней мере одно такое п. к. д. о. R без ветвления с тем же полем вычетов F, что кольцо R_n изоморфно кольцу $R[[x]]/I$, где $R[[x]]$ — кольцо степенных рядов от одного переменного над кольцом R, I — некоторый главный идеал вида $\{p - ux^n\}$, где p — характеристика поля F, n — индекс ветвления и u — некоторый обратимый элемент кольца $R[[x]]$. Обратно, всякое кольцо вида $R[[x]]/\{p - ux^n\}$ является п. к. д. о. с ветв-

лением индекса n и с полем вычетов F. Если поле F совершенно, то кольцо R определяется кольцом R_n однозначно.

Далее рассматриваются вопросы об изоморфизмах между п. к. д. о. с ветвлением данного индекса и о числе классов изоморфных колец указанного вида, имеющих одно и то же поле вычетов. При этом, в частности, доказывается, что если индекс ветвления взаимно прост с характеристикой p поля F, то данный изоморфизм π п. к. д. о. R без ветвления с полем вычетов F на п. к. д. о. R' того же типа тогда и только тогда можно продолжить до некоторого изоморфизма между п. к. д. о. $R[[x]]/\{p-ux^n\}$ и $R'[[x]]/\{p-u'x^n\}$ с ветвлением индекса n, когда в поле F существует по крайней мере одно решение $z=\gamma$ уравнения $\xi[\pi(a_0)]z^n=\xi(a_0')$, где a_0 и a_0' — свободные члены соответственно рядов u и u', а ξ — естественный гомоморфизм кольца R' на поле F. Из этого утверждения вытекает, что при присоединении к п. к. д. о. R без ветвления некоторого примитивного n-го корня простого элемента q кольца R получается п. к. д. о. R_n с ветвлением индекса n, т. е. $R_n=R[x]/\{pa-x^n\}$. Если индекс n взаимно прост с характеристикой поля F, то все п. к. д. о. R_n с ветвлением индекса n и с полем вычетов F получаются указанным способом. Е. Г. Шульгейфер

6229. Проблемы теории колец. Каплански (Problems in the theory of rings. Kaplansky Irving), Publ. Nat. Acad. Sci.-Nat. Res. Council, 1957, № 502, 1—3 (англ.)

Сформулированы следующие проблемы теории ассоциативных колец: 1) Каждое ли правопримитивное кольцо левопримитивно? 2) Существует ли простое радикальное (в смысле Джейкобсона) кольцо? 3) Всякая ли алгебраическая алгебра локально конечна? (Проблема Куроша), 4) Всякое ли кольцо с полиномиальным тождеством можно вложить в матричное кольцо над некоторым коммутативным кольцом? 5) Для каждой ли полной матричной алгебры F_n над полем F существует полином, принимающий значения из центра алгебры F, не все равные нулю? (Для $n=2$ таким полиномом будет $(xy-yx)^2$).

Пусть $F(G)$ — групповое кольцо группы G над полем F. 6) Может ли $F(G)$ обладать делителями нуля, если группа G без кручения? 7) В каких случаях $F(G)$ полупросто (в смысле Джекобсона)? Достаточно ли для полупростоты нулевой характеристики поля F? Для вещественного и комплексного полей вопрос решается утвердительно, но для поля рациональных чисел решение неизвестно. 8) Известно, что если группа G локально конечна и не имеет элементов, порядки которых делятся на характеристику поля F, то $F(G)$ регулярно в смысле фон Неймана. Верно ли обратное? 9) Известно, что если характеристика поля F равна $p>0$ и G — локально конечная p-группа, то $F(G)=Fe+N$, где N — нильалгебра. Верно ли обратное? 10) Пусть G — группа регулярных элементов некоторого $n\times n$-матричного кольца A, $n\geqslant 3$, Z — центр A, а G' — коммутант группы G. Будет ли группа $G'/(G'\cap Z)$ простой? 11) Кёте определил структуру алгебр, для которых выполняются следующие условия: 1) алгебраичность над алгебраически замкнутым полем, 2) простота и наличие единицы, 3) локальная простота (каждое конечное подмножество лежит в конечномерной простой подалгебре с той же единицей, 4) счетность ранга. Можно ли развить структурную теорию, если условия 3) и 4) опустить или ослабить? 12) Существует ли тело D, для которого $D=[D,D]$? (Здесь $[D,D]$ — множество всех сумм коммутаторов $xy-yx$).

По поводу последней проблемы автор замечает, что в случае ее утвердительного решения, можно будет построить пример не нильпотентного кольца с условием минимальности, каждый элемент которого представим в виде суммы ниль-элементов. А. И. Ширшов

6230. Коммутаторы в телах. Гаррис (Commutators in division rings. Harris Bruno), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 4, 628—630 (англ.)

Строится пример тела D, для которого $D=[D,D]$, где $[D,D]$ — модуль, порождаемый коммутаторами $xy-yx$; $x, y\in D$ (реф. 6229, проблема 12). Используя этот пример и опираясь на идеи Капланского, автор показывает, что теорема Веддербарна о нильпотентности алгебры конечного ранга, обладающей базисом из нильэлементов, не может быть обобщена на кольца с условием минимальности. А. И. Ширшов

6231. Замечание о конечных объединениях идеалов и подгрупп. Мак-Кой (A note on finite unions of ideals and subgroups. McCoy Neal H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1957, **8**, № 4, 633—637 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть I и A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ такие идеалы в кольце R, что $I\subseteq A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$. Если I не содержится в объединении никаких $n-1$ идеалов A_i, то существует такое положительное целое число k, зависящее от n, что $I^k\subseteq A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n$. Отсюда легко вытекает следствие: Если I и B_i $(i=1,2,\ldots,n)$ такие идеалы в R, что $I\subseteq B_1\cup B_2\cup\ldots\cup B_n$ и I не содержится ни в одном B_i, то существует такое положительное число k, что I^k содержится в объединении трех идеалов B_i $(i=1,2,\ldots,n)$. Пусть G — произвольная группа, записанная аддитивно. Доказывается теорема: Если I и A_i $(i=1,2,\ldots,n)$ такие подгруппы группы G, что $I\subseteq A_i\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$, и если I не содержится в объединении никаких $n-1$ подгрупп A_i, то существует такое положительное целое l, зависящее от n, что $lI\subseteq A_1\cup A_2\cap\ldots\cup A_n$. Отсюда получается следствие, аналогичное сформулированному выше для колец.

В. А. Андрунакиевич

6232. Доклад из серии «Действительность». Переманс (Voordracht in de serie «Actualiteiten». Onderwerp: radicalen. Peremans W.), Rapp. Math. centrum, 1956, № 016, 1—8 (гол.)

Обзор известных естественных условий, которым должно удовлетворять общее определение радикала ассоциативного кольца. Рассматриваются некоторые ограничения на определение радикала. Изложение иллюстрировано примерами. Разобраны некоторые свойства радикала Джекобсона. Последний вводится с помощью операции $a*b=ab+a+b$, указываются следующие свойства этой операции:

A. $(a*b)*c=a*(b*c)$; B. $(a+b)*c=a*c+b*c-c$;

C. $a*(b+c)=a*b+a*c-a$.

Из A, B и C легко выводятся равенства: $0*a=a*0=a$; $(-a)*b=-a*b+2b$; $a*(-b)=-a*b+2a$; $(a-b)*c=a*c-b*c+c$; $a*(b-c)=a*b-a*c+a$.

Отсюда следует, что если, наоборот, дана алгебраическая система с двумя бинарными операциями $+$ и $*$, которая является абелевой группой по отношению операции $+$, а также удовлетворяет условиям A, B, C, то эта система является кольцом по отношению к операции $+$ и умножению, определяемому равенством $ab=a*b-a-b$. Рассматривается случай, когда на множестве элементов кольца определена операция $\otimes$, удовлетворяющая условиям: $a\otimes(b\otimes c)=(a\otimes b)\otimes c$; $a\otimes 0=0\otimes a=a$.

Показывается, что тогда можно естественным образом определить $\otimes$-регулярность и $\otimes$-радикал R, являющийся объединением элементов кольца, входящих в $\otimes$-регулярный левый $\otimes$-идеал. В. Н. Латышев

6233. Радикалы ассоциативных колец. I. Андрунакиевич В. А., Матем. сб., 1958, **44**, № 2, 179—212

Дальнейшее развитие общей теории радикалов в смысле А. Г. Куроша (РЖМат, 1955, 1680). Радикал R называется наследственным, если любой идеал R-радикального кольца R-радикален. Наследственный радикал

R называется наднильпотентным, если все нильпотентные кольца R-радикальны. Если же наследственный радикал R обладает тем свойством, что все R-радикальные кольца наследственно идемпотентны (т. е. любой их идеал идемпотентен), то R называется подыдемпотентным радикалом.

Пусть R — наследственный радикал. Через R' обозначим наибольший радикал (если он существует), обладающий тем свойством, что для любого ассоциативного кольца K, $R(K)|R'(K)=0$. Два радикала R и S называются взаимно дополнительными, если существуют радикалы R' и S', причем $S=R'$ и $R=S'$. Радикал R называется двойственным, если существуют R' и R'', причем $R=R''$. Оказывается, что если R — любой наследственный радикал, то существует R', причем R'' является верхним радикалом в смысле Куроша, определяемым классом всех подпрямо неразложимых колец с R-радикальной сердцевиной (сердцевина кольца есть пересечение всех его ненулевых идеалов). Если же R — наднильпотентный радикал, то существуют радикалы R' и R'', причем R' и R'' взаимно дополнительны, R' есть двойственный подыдемпотентный радикал, а R' — двойственный специальный радикал, т. е. верхний радикал, определяемый классом колец σ, удовлетворяющих следующим требованиям: 1) всякое σ-кольцо есть первичное кольцо в смысле Маккоя (Mc Coy N. H., Amer. J. Math., 1949, **71**, 823), 2) любой ненулевой идеал σ-кольца есть σ-кольцо, 3) если A есть σ-кольцо и A — идеал в кольце K, то K/A^* тоже σ-кольцо (где A^* — двусторонний аннулятор идеала A). Класс колец σ, удовлетворяющий требованиям (1)—(3), называется специальным классом. Оказывается тоже, что всякий наднильпотентный радикал R вкладывается в специальный радикал $S_{\widetilde{M}}$, определяемый специальным классом $\widetilde{M}$ всех R-полупростых первичных колец. Радикал $S_{\widetilde{M}}$ является наименьшим среди всех специальных радикалов, содержащих R. Приводятся некоторые достаточные условия для того, чтобы $S_{\widetilde{M}}=R$. Автор ставит вопрос: имеет ли это место для любого наднильпотентного радикала R.

Пусть M_φ — класс подпрямо неразложимых колец с идемпотентной сердцевиной, причем сердцевина обладает произвольным, но фиксированным алгебраическим свойством φ. Пусть $M_{\widetilde{\varphi}}$ — класс всех остальных подпрямо неразложимых колец. Тогда M_φ есть специальный класс колец и верхние радикалы R_φ и $R_{\widetilde{\varphi}}$, определяемые соответственно классами M_φ и $M_{\widetilde{\varphi}}$, взаимно дополнительны. Кроме того, R_φ — двойственный специальный радикал, а $R_{\widetilde{\varphi}}$ — двойственный подыдемпотентный радикал. Таким же способом получаются все двойственные наднильпотентные и подыдемпотентные радикалы.

Рассматриваются еще специальные радикалы матричных колец и специально полупростые кольца с условиями конечности. А. Ф. Сулиньский

6234. О простых, полурадикальных и радикальных алгебрах. Дивинский (On simple, semi-radical and radical algebras. Divinsky N.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 2, 225—250 (англ.)

Изучается вопрос о существовании простых радикальных алгебр. Пусть S — коммутативное кольцо с единицей, а $R=R(S)$ — кольцо полиномов от некоммутирующих между собой переменных $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$, связанных соотношениями $x^2=0$, $x=y_1xy_1$, $y_1=y_2xy_2$, $y_n=y_{n+1}xy_{n+1}$, с коэффициентами из S и без свободного члена. Кроме того, пусть для $s\in S$ и $P\in R$ из $sP=0$ следует, что $s=0$, либо $P=0$. Например, S может быть полем. Очевидно, что кольцо R порождается как идеал элементом x, и $R=R^2$. Доказывается, что R — полурадикальное кольцо (т. е. из $a=ab$ или $a=ba$ следует $a=0$). Если же S — поле, то R оказывается простой полурадикальной алгеброй, радикальной в смысле Брауна и Маккоя. Кроме того, если S несчетно, то алгебра R примитивна. Построенное таким образом кольцо R отвечает также на один вопрос, поставленный Капланским в курсе теории колец. Автор считает возможным, хотя и маловероятным, что R — радикальная алгебра в смысле Джекобсона, и предлагает следующий путь для построения простой радикальной в смысле Джекобсона алгебры с помощью вышеприведенной конструкции, если алгебра R не радикальна.

Пусть A — полурадикальное кольцо. Кольцо A называется кольцом частных кольца A, если $A'\supseteq A_1$, и каждый элемент из A' имеет вид $a+b'-ab'$, где a и $b\in A$, $ab'\in A'$ является квазиобратным для b, т. е. $b+b'-bb'=0$. В. А. Андрунакиевич (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1948, **12**, 129—178) показал, что полурадикальное кольцо A тогда и только тогда может быть вложено в радикальное кольцо частных A', когда для любых элементов a и $b\in A$ существуют u, $v\in A$ такие, что $a+u-au'=b+v-bv'$. Если теперь предположить, что R вкладывается таким образом в R', то окажется, что $R'=R'^2$ и порождается как идел одним элементом x. Однако Блер (РЖМат, 1956, 6453) отметил, что из существования радикального кольца, равного своему квадрату и порожденного как идеал одним образующим, следует существование простого радикального кольца. Таким образом, полурадикальная алгебра R приведет к построению простой радикальной алгебры, если найдется такое поле S, что для любых $P, Q\in R(S)$ существуют такие $u, v\in R(S)$, что

$$P+u-Pu=Q+v-Qv. \qquad (1)$$

Далее доказывается, что (1) имеет место для любых $P, Q\in R$, если один из них одночлен. Автор считает, что это доказательство может быть распространено на общий случай и указывает несколько методов завершения этой неоконченной части, которые в случае успеха приведут к построению простой радикальной алгебры. Кроме того, автором построена радикальная (хотя и не простая алгебра), содержащая два отличных от нуля элемента x и y таких, что $x=yxy$. В. Г. Дорофеев

6235. Изоморфные кольца бесконечных матриц. Грин (Isomorphic rings of infinite matrices. Green H. F.), Quart. J. Math., 1959, **10**, № 37, 38—42 (англ.)

Пусть α — линейное пространство последовательностей $y=\{y_k\}$, $k=1, 2, \ldots$. Последовательности $x=\{x_k\}$, $k=1, 2, \ldots$, такие, что ряды $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ сходятся при любых $y\in\alpha$, образуют двойственное к α пространство α^*. α совершенно, если $\alpha^{**}=\alpha$. α нормально, если из того, что $x=\{x_k\}\in\alpha$ и $|y_k|\leqslant|x_k|$, $k=1, 2\ldots$, следует $y=\{y_k\}\in\alpha$. Совершенное пространство нормально.

Пусть $\Sigma(\alpha)$ — множество бесконечных матриц, отображающих пространство α в себя, причем все возникающие при этом ряды абсолютно сходятся. Если α содержит пространство всех конечных последовательностей φ и нормально, то $\Sigma(\alpha)$ — кольцо. Существуют пространства α, содержащие φ, не являющиеся нормальными, но тем не менее для которых $\Sigma(\alpha)$ — кольцо, и такие α, что $\Sigma(\alpha)$ не есть кольцо.

Известно, что если нормальные пространства α и β содержат φ и гомеоморфны в смысле Кёте — Теплица (относительно проективной сходимости), то $\Sigma(\alpha)$ и $\Sigma(\beta)$ изоморфны над центром. В этом случае гомеоморфизм индуцируется матрицей A, а изоморфизм между кольцами может быть записан в виде $\Sigma(\alpha)=A^{-1}\Sigma(\beta)A$.

В настоящей работе доказывается обратное, а именно: Если $\alpha\supseteq\varphi$, $\beta\supseteq\varphi$ и $\Sigma(\alpha)\simeq\Sigma(\beta)$ над центром, то α и β

гомеоморфны, α^* и β^* гомеоморфны, и $\Sigma(\alpha) = A^{-1}\Sigma(\beta)A$, где A — бесконечная матрица, транспонированная к которой отображает β^* на α^*. Доказательство опирается на теорему о том, что из изоморфизма между точными кольцами преобразований двух векторных пространств следует существование взаимно однозначного полулинейного отображения одного пространства на другое.

В. Г. Дорофеев

6236. Новое доказательство структурной теоремы Веддербарна — Артина о полупростых кольцах. Штейнфельд (Ein Beweis des Wedderburn—Artinschen Strukturensatzes. Steinfeld Ottó), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958, **3**, № 1-2, 63—65 (нем.; рез. венг., русск.)

6237. О теореме Херштейна. Шенкман (On a theorem of Herstein. Schenkman Eugene), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 236—238 (англ.)

Пусть ассоциативное простое кольцо A не является алгеброй ранга 4 над полем характеристики 2. Через $[A, A]$ обозначим модуль, порождаемый всеми элементами вида $ab - ba$, $a \in A$, $b \in A$. Дается новое доказательство теоремы Херштейна о том, что собственный лиев идеал $[A, A]$ содержится в центре кольца A.

Д. А. Супруненко

6238. Некоторые $\mathfrak{G}$-алгебры с делением. Земмер (Some G division algebras. Zemmer Joseph L.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 1, 51—58 (англ.)

Алгебра K над полем F, обладающая ассоциативной $[h(xy, z) = h(x, y, z)]$ билинейной формой $h(x, y) \in F$, называется G-алгеброй, если в ней для любых $x, y, z \in K$ выполняется тождество $(xy)z - x(yz) = h(y, z)x - h(x, y)z$.

Пусть $u = 1, e_1, e_2, \ldots$ — базис ассоциативной алгебры K^* над полем F, K — линейное подпространство, натянутое на $e_1, e_2, \ldots$. Для любых $x, y \in K$, $xy = au + a$, где $a \in K$. Если положить $x \cdot y = a$, то K превращается в G-алгебру с ассоциативной билинейной формой $h(x, y) = \alpha$. Обратно, всякая G-алгебра K может быть получена из некоторой (единственной) ассоциативной алгебры K^* с единицей. K^* называется присоединенной ассоциативной алгеброй и изоморфна множеству пар (ξ, x), $\xi \in F$, $x \in K$ с покоординатным сложением и умножением по правилу $(\xi, x)(\eta, y) = (\xi\eta + h(x, y),\ \xi y + \eta x + xy)$.

Очевидно, всякая ассоциативная алгебра автоматически G-алгебра. Статья касается существования неассоциативных G-алгебр. Показано, что некоторые появившиеся в литературе (Bruck R. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1944, **56**, 141—199; Albert A. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **72**, 296—309; Dickson L. E., Trans. Amer. Math. Soc., 1906, **7**, 370—390) неассоциативные алгебры с делением являются изотопами G-алгебр с делением. (Алгебра $K(\circ)$ называется изотопом алгебры $L(*)$, если существуют три отображения φ, ψ, χ K на L такие, что $(x \circ y)\varphi = x\psi * y\chi$). Это приводит к главному результату — построению новой центральной алгебры с делением размерности 9. Доказано, что если G-алгебра с делением K имеет над F размерность $n > 2$, то либо K^*-алгебра с делением, либо $K^* = Fu^* \oplus A^*$, где A^* — алгебра с делением. Автор ставит вопрос, существуют ли G-алгебры с делением K такие, что K^* — алгебра с делением, ибо во всех рассмотренных примерах осуществляется вторая возможность. Кроме того, неизвестно, верно ли это утверждение, если алгебра K бесконечномерна.

В заключение строятся 5 примеров G-алгебр с делением. Пусть A — ассоциативная алгебра с делением и с единицей 1 над полем F, $f(x) \in F$ — линейный функционал, определенный на A. С помощью умножения $x \circ y = f(x)y + f(y)x + xyA$ превращается в G-алгебру $A(\circ)$ с $h(x, y) = -f(xy) - f(x)f(y)$. Пусть далее $xU = x \circ 1$. Изотоп $A(*)$ определяется с помощью умножения $x * y = xU^{-1} \circ yU^{-1}$. В рассматриваемых примерах A и f выбираются так, что $A(\circ)$ — алгебра с делением, а $A(*)$ центральна над F. Две алгебры из пяти построены впервые.

В. Г. Дорофеев

6239. Матричные признаки для однозначности числа образующих элементов и эквивалентности алгебр над кольцом. Бомонт (Matric criteria for the uniqueness of basis number and the equivalence of algebras over a ring. Beaumont Ross A.), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 469—480 (англ.)

Пусть R — кольцо с единицей. Матрица $A \in {}_mR_n$ (где ${}_mR_n$ — совокупность всех $m \times n$-матриц над R) называется единицей (unit), если существует такая матрица $B \in {}_nR_m$, что $AB = I_m$, $BA = I_n$. Пусть $N(R)$ — свободный R-модуль с конечным числом образующих $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. $N(R)$ называется левосторонней алгеброй ранга n над R, если $N(R)$ является кольцом относительно умножения $*$, причем $(r\alpha) * \beta = r(\alpha * \beta)$, $\varepsilon_i * (r\varepsilon_j) = r(\varepsilon_i * \varepsilon_j)$, где $r \in R$; $\alpha, \beta \in N(R)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Умножение в алгебре $N(R)$ определяется системой структурных констант $\gamma_{jk}^{(i)} \in R$; $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Через Γ_i обозначим матрицу $(\gamma_{jk}^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а через Γ — $n^2 \times n$-матрицу

$$\begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Gamma_n \end{pmatrix}$$

Самую алгебру обозначим через $[N(R), \varepsilon_i, \Gamma]$. Если $M(R)$ — свободный R-модуль с m образующими η_i, то оказывается, что две алгебры $[N(R), \varepsilon_i, \Gamma]$ и $[M(R), \eta_i, \Delta]$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует такая единица $A \in {}_mR_n$, что $\Delta = (A \otimes A)\Gamma B$, где $B \in {}_nR_m$ — такая матрица, что $AB = I_m$, $BA = I_n$, а символ $\otimes$ обозначает кронекеровское произведение матриц.

А. Ф. Сулиньский

6240. Замечание о вещественных формах одной из простых алгебр Ли. Велдкамп (Note on the real forms of a simple Lie algebra. Veldkamp F. D.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 3, 300—303; Indagationes math., 1959, **21**, № 3, 300—303 (англ.)

Доказывается, что если $n = m^2 \geqslant 4$, то существуют ровно две неизоморфные вещественные формы комплексной алгебры D_n, сигнатура формы Киллинга которых равна $-n$. При остальных n такая вещественная форма единственна.

А. Л. Онищик

6241. Некоторые замечания о кольцах с элементарными делителями. Гилман, Хенриксен (Some remarks about elementary divisor rings. Gillman Leonard, Henriksen Melvin), Trans. Amer. Math. Soc., 1956, **82**, № 2, 362—365 (англ.)

Пусть S — коммутативное коль о с единицей. Рассмотрим следующие условия: E [H]. Для любой матрицы B над S найдутся такие невырожденные матрицы P и Q, что PBQ — диагональная [треугольная (нули над диагональю)] (кольцо, подчиненное этому условию, называется кольцом с элементарными делителями [эрмитовым кольцом]); F. Все идеалы кольца S с конечным числом образующих главные; T. Если $a, b \in S$, то существуют $a_1, b_1, d \in S$ такие, что $a = a_1 d$, $b = b_1 d$, $Sa_1 + Sb_1 = S$; D′. Если $Sa + Sb + Sc = S$, то найдутся такие $p, q \in S$, что $Spa + S(pb + qc) = S$; A. Если $a, b \in S$, $a \neq 0$, то существуют $a_1, d \in S$ такие, что $a = a_1 d$, $Sa_1 + Sb = S$, а из $d = d'd''$ для некоторого d'', где d' — не делитель единицы, вытекает $Sd' + Sb \neq S$. Если коммутативное кольцо регулярно (т. е. уравнение $axa = a$ всегда разрешимо) и обладает единицей, то в нем имеют место условия F и A. Оказывается, условие H эквивалентно условию T, а также одновременному выполнению условий E, F и A. Условие E имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия T и D′.

Л. А. Скорняков

6242. Некоторые замечания о кольцах с элементарными делителями. II. Хенриксен (Some remarks on elementary divisor rings. II. Henriksen Melvin), Michigan Math. J., 1955—1956, 3, № 2, 159—163 (англ.)

Ч. I см. реф. 6241. Коммутативное кольцо S с единицей 1 называется кольцом с элементарными делителями (соответственно эрмитовым кольцом), если для каждой матрицы A над S существуют такие неособенные матрицы P, Q, что матрица PAQ (соответственно матрица AQ) диагональна (соответственно треугольна). Каждое кольцо с элементарными делителями эрмитово; каждое эрмитово кольцо является F-кольцом, т. е. коммутативным кольцом с единицей, каждый идеал которого с конечным числом образующих является главным идеалом. F-кольцо S называется адекватным кольцом, если для любых элементов $a, b \in S$, $a \neq 0$, существуют такие элементы r и s, что $a = r \cdot s$, $(r, b) = 1$ и $(t, b) \neq (1)$ для любого необратимого делителя t элемента s. Указан пример неадекватного кольца с элементарными делителями.

Основные результаты: 1. Если радикал Перлис—Джейкобсона $R(S)$ (пересечение всех максимальных идеалов) F-кольца S содержит простой идеал, то кольцо S эрмитово. 2. Для того чтобы эрмитово кольцо S было кольцом с элементарными делителями, необходимо и достаточно, чтобы фактор-кольцо $S/R(S)$ было бы кольцом с элементарными делителями. 3. Каждый отличный от нуля собственный простой идеал адекватного кольца S содержится в единственном максимальном идеале. 4. Если каждый не принадлежащий радикалу $R(S)$ элемент эрмитова кольца S содержится только в конечном числе максимальных идеалов, то S — кольцо с элементарными делителями.

В конце сформулированы следующие проблемы: 1. Будет ли F-кольцо, являющееся областью целостности, кольцом с элементарными делителями? 2. Если S есть F-кольцо и $S/R(S)$ — эрмитово кольцо, то должно ли S быть эрмитовым кольцом? 3. Если S является F-кольцом, имеющим лишь конечное число различных максимальных идеалов, то должно ли S являться эрмитовым кольцом и, следовательно, кольцом с элементарными делителями?

В. И. Шнейдмюллер

6243. Теория некоммутативных нетеровых колец: одно свойство, характеризующее тертиарные идеалы. Лесьёр (Théorie noethérienne des anneaux non commutatifs: une propriété caractéristique des idéaux tertiaires. Lesieur Léonce), Sémin. P. Dubreil. M.-L. Dubreil—Jacotin et C. Pisot. Fac. Sci. Paris. 1957—1958, 11 année, Vol. 2. Paris, 1958, 14-1—14-7 (франц.)

Рассматривается ассоциативное кольцо U, вообще говоря, без единицы, удовлетворяющее условию обрыва либо возрастающих, либо убывающих цепочек левых идеалов. Двусторонний идеал P кольца U называется существенным частным левого идеала X, если $P = X \cdot Y$, где Y — некоторый левый идеал, строго содержащий идеал X, и если из соотношения $X \subseteq Z \subseteq Y$ следует, что $X \cdot Z = X \cdot Y$. Для того чтобы двусторонний идеал P был существенным частным левого идеала X, необходимо и достаточно, чтобы $P = X \cdot (y_0]$, где $(y_0]$ — такой главный левый идеал кольца U, порожденный элементом y_0, что из соотношений $z \notin X$, $z \in (y_0]$, $aU^* z \subseteq X$ следует, что $aU^* y_0 \subseteq X$ (через $aU^* b$ обозначается множество всех элементов вида $a u b$ ($u \in U$) и ab). Каждое существенное частное P левого идеала X является простым двусторонним идеалом (т. е. из соотношения $aU^* b \subseteq P$ следует, что либо $a \in P$, либо $b \in P$). Каждое максимальное собственное левое частное левого идеала X является существенным. Левый идеал X тогда и только тогда является тертиарным, когда для него существует лишь одно существенное частное P; в этом случае идеал X называется P-тертиарным. Если $X = X_1 \cap \ldots \cap X_n$ — некоторое несократимое представление левого идеала X в виде пересечения P_i-тертиарных идеалов X_i, то все существенные частные левого идеала X исчерпываются идеалами P_i ($i = 1, \ldots, n$).

Е. Г. Шульгейфер

6244. Строение первичных нетеровых слева колец. Лесьёр, Круазо (Structure des anneaux premiers noethériens à gauche. Lesieur Léonce, Croisot Robert), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 18, 2545—2547 (франц.)

Рассматривается первичное нетерово слева ассоциативное кольцо A с единицей. Левый идеал X кольца A называется замкнутым, если для любого элемента $b \in A$, не содержащегося в идеале X, в главном левом идеале $(b]$ (реф. 6243), порожденном элементом b, найдется по крайней мере один такой элемент $x \neq 0$, что $X_{(l}(x] = 0$. Формулируются (без доказательств) следующие утверждения: 1) левый аннулятор произвольного подмножества кольца A является замкнутым левым идеалом; 2) для каждого левого идеала X кольца A существует наименьший замкнутый левый идеал $\overline{X}$, содержащий идеал X (идеал $\overline{X}$ называется замыканием идеала X); 3) все замкнутые левые идеалы кольца A образуют дедекиндову структуру T конечной длины с дополнениями; 4) левый идеал X кольца A замкнут тогда и только тогда, когда он обладает дополнением, т. е. для идеала X существует такой единственный левый идеал Y, что $X_{(l} Y = 0$ и из соотношений $X'_{(l} Y = 0$, $X \subseteq X'$ следует, что $X = X'$; 5) каждый отличный от A максимальный замкнутый левый идеал является $(l$-неприводимой компонентой разложения нулевого идеала в пересечение $(l$-неприводимых левых идеалов; 6) между множеством E элементов $a \in A$, порождающих главные левые идеалы $(a]$, замыкание которых совпадает со всем кольцом A, множеством D' элементов кольца A, не являющихся правыми делителями нуля, и множеством G' элементов кольца A, не являющихся левыми делителями нуля, имеют место следующие соотношения: $D' = E \subseteq G'$. Отмечается, что в общем случае $E \neq G'$; 7) для кольца A существует левое кольцо отношений $Q(A)$ по мультипликативно замкнутому множеству D'; каждый элемент кольца $Q(A)$ имеет вид $b^{-1}a$, где $b \in D'$ и $a \in A$. Кольцо $Q(A)$ изоморфно кольцу матриц порядка n над некоторым телом K, причем n есть длина структуры T замкнутых левых идеалов кольца A. Кольцо $Q(A)$ является A-инъективной оболочкой самого кольца A.

Е. Г. Шульгейфер

6245. Одна разрешимая исключительная йорданова алгебра. Албert (A solvable exceptional Jordan algebra. Albert A. A.), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 2, 331—337 (англ.)

Доказывается, что прямое произведение простой неспециальной йордановой алгебры над полем характеристики $\neq 2$ на нильпотентную алгебру с одним образующим и индексом, большим 33, является разрешимой неспециальной йордановой алгеброй.

А. И. Ширшов

6246. Простота некоторых неассоциативных алгебр. Ри (The simplicity of certain nonassociative algebras. Ree Rimhak), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, 9, № 6, 886—892 (англ.)

Используя абелеву элементарную p-группу V порядка p^n, $n > 1$, и две (удовлетворяющие определенным условиям) билинейные кососимметрические функции φ, ψ на (V, V) со значениями в поле K характеристики p, автор приходит к некоторой неассоциативной алгебре L размерности $p^n - 2$ над полем K. Доказано, что все получающиеся таким образом алгебры являются простыми. Когда билинейная форма ψ записывается в виде $\psi(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u)$, где f и g — линейные функции на V, то L становится одной из алгебр Ли, рассмотренных Блоком (РЖМат, 1960, 1442), где следует положить $m = 1$). Автор намечает (без доказательства) возможный более общий путь построения простых алгебр Ли.

А. И. Кострикин

6247. О нильустойчивых алгебрах. Кокорис (On nilstable algebras. Kokoris Louis A.), Proc. Amer. Math. Soc., 1958, **9**, № 5, 697—701 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная простая коммутативная алгебра с ассоциативными степенями ранга два над некоторым полем $\mathfrak{F}$, характеристика которого отлична от 2. Тогда (РЖМат, 1956, 1144) единицу 1 алгебры $\mathfrak{A}$ можно представить в виде суммы $1 = u + v$ двух ортогональных идемпотентов u и v, а сама алгебра $\mathfrak{A}$ разлагается в сумму $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_2$, где $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_u(1) = \mathfrak{A}_v(0)$, $\mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{A}_u(1/2) = \mathfrak{A}_v(1/2)$ и $\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_u(0) = \mathfrak{A}_v(1)$ ($\mathfrak{A}_u(\lambda)$, $\lambda = 0, 1/2, 1$ есть множество всех тех элементов $x \in \mathfrak{A}$, для которых $ux = \lambda x$), причем $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ являются взаимно ортогональными подалгебрами, представимыми в виде $\mathfrak{A}_1 = u\mathfrak{F} + \mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{A}_2 = v\mathfrak{F} + \mathfrak{G}_2$ (где $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ — некоторые нильподалгебры), $\mathfrak{A}_{12}^2 \subseteq \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{A}_{3-i}$ для $i = 1,2$. Идемпотентный элемент u называется нильустойчивым, а алгебра $\mathfrak{A}$ называется u-нильустойчивой, если $\mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_{12} + \mathfrak{G}_{3-i}$ для $i=1,2$. Опираясь на результаты своей предшествующей работы (РЖМат, 1957, 4659), автор доказывает следующую теорему. Простая коммутативная алгебра $\mathfrak{A}$ с ассоциативными степенями ранга два над полем $\mathfrak{F}$, характеристика которого взаимно проста с 6, тогда и только тогда является йордановой алгеброй, когда она нильустойчива относительно двух таких идемпотентов u и f, что $u \neq 1$, $f \neq 1$, $u + f \neq 1$ и, кроме того, f нельзя представить ни в виде $f = u + w_{12} + w_1 + w_2$, ни в виде $f = v + w_{12} + w_1 + w_2$, где $w_{12} \in \mathfrak{A}_{12}$ $w_1 \in \mathfrak{A}_1$, $w_2 \in \mathfrak{A}_2$. Строится пример, показывающий, что без последнего предположения относительно идемпотента f теорема не верна. Е. Г. Шульгейфер

6248. Замечания о проективной группе плоскости Муфанг. Пиккерт (Bemerkungen über die projektive Gruppe einer Moufang-Ebene. Pickert Günter), Illinois J. Math., 1959, **3**, № 2, 169—173 (нем.)

Проективной группой G проективной плоскости называется подгруппа группы ее коллинеаций, порожденная всеми p-L-коллинеациями. Если ограничиться p-L-коллинеациями, у которых $p \in L$, то возникает малая проективная группа Γ. В дезарговой плоскости G и Γ совпадают, если мультипликативная группа координатизирующего тела порождается своим коммутантом и третьей степенью центра. Если в альтернативной плоскости выбраны неинцидентные точка p и прямая L, то для любого $\rho \in G$ имеет место $\rho = \sigma\tau$, где $\sigma \in \Gamma$, а τ — некоторая p-L-коллинеация. Если коллинеация σ хотя бы на одной прямой индуцирует преобразование, совпадающее с произведением перспектив, то $\sigma \in G$. При некоторых ограничениях на основное поле малая транзитивная группа недезарговой проективной плоскости оказывается транзитивной относительно четырехвершинников. Л. А. Скорняков

6249. Транзитивность малой проективной группы плоскости Муфанг относительно четырехугольников. Зальцман (Viereckstransitivität der kleinen projektiven Gruppe einer Moufang-Ebene. Salzmann Helmut), Illinois J. Math., 1959, **3**, № 2, 174—181 (нем.)

Доказывается, что каждое из следующих условий достаточно для того, чтобы малая проективная группа (реф. 6248) альтернативной плоскости была транзитивна относительно четырехвершинников: 1) каждый элемент соответствующего альтернативного тела представляется в форме $[(ab)c]\,[(ab^{-1}a)c]$; 2) малая проективная группа каждой максимальной дезарговой подплоскости транзитивна относительно четырехвершинников. Строится пример дезарговой плоскости, в которой малая проективная группа транзитивна относительно четырехвершинников, но не совпадает с проективной группой.

Л. А. Скорняков

6250. Одно алгебраическое соотношение, связанное с теорией кривых на неособенных поверхностях. Нортткотт (An algebraic relation connected with the theory of curves on non-singular surfaces. Northcott D. G.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 2, 195—202 (англ.)

Автор называет одномерное локальное кольцо кольцом типа S, если оно является несмешанным (т. е. если простые идеалы нуля имеют размерность 1) и служит гомоморфным образом двумерного регулярного локального кольца. Таким кольцом будет, например, локальное кольцо простой точки любой неприводимой кривой на неприводимой неособенной алгебраической поверхности. Если Q — локальное кольцо типа S и Λ — его целое замыкание в полном кольце частных, то Λ является Q-модулем. Доказывается, что длина $L_Q(\Lambda/Q)$ этого модуля связана с кратностями максимальных идеалов локальных колец окрестностей различных порядков (РЖМат, 1956, 5749) следующим соотношением:

$$2L_Q(\Lambda/Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha=1}^{l_n} e_{n\alpha}(e_{n\alpha} - 1)\,[K_{n\alpha} : K],$$

где K — поле вычетов Q по его максимальному идеалу, l_n — число локальных колец n-й окрестности кольца Q, $K_{n\alpha}$ и $e_{n\alpha}$ — поле вычетов и кратность максимального идеала α-го локального кольца окрестности n-го порядка кольца Q (при $n = 0$ само кольцо Q является единственным кольцом своей окрестности нулевого порядка). При доказательстве существенно используется развитая автором ранее теория локальных дилатаций (РЖМат, 1959, 5615). В качестве промежуточного результата получается следующая „теорема редукции к первой окрестности“: Имеет место соотношение

$$L_Q(\Lambda/Q) = L_Q(R/Q) + \sum_{\alpha=1}^{l_1} [K_{1\alpha} : K]\, L_{Q_{1\alpha}}(\Lambda_{1\alpha}/Q_1),$$

где R — первое окрестностное кольцо для Q, $\Lambda_{1\alpha}$ — целое замыкание α-го локального кольца первой окрестности Q в его полном кольце частных, а остальные обозначения те же, что и выше. А. И. Узков

6251. Алгебра. О структуре кольца с перспективой. Накано Такэо. Сугаку, 1959, **10**, № 3, 163—165 (японск.)

6252. Замечание о дистрибутивных законах. Саито (Note on the distributive laws. Saito Toru), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 4, 280—283

Система S с операциями сложения и умножения называется w-кольцом, если: 1) S — абелева группа по сложению и полугруппа по умножению; 2) для любых $x, y, z \in S$

$$x(y + z) = xy + xz - e, \quad (x + y)z = xz + yz + e,$$

где e — некоторый фиксированный элемент, называемый определяющим.

Полное описание w-колец дают следующие два утверждения: Если умножение в S заменить новой операцией: $x \circ y = xy - l$, то система S превращается в ассоциативное кольцо, причем $l \circ x = x \circ l = 0$ для всех $x \in S$. Обратно, если в ассоциативном кольце R отмечен такой элемент e, что $eR = Re = (0)$, то относительно сложения и композиции $x \circ y = xy - e$ R является w-кольцом с определяющим элементом e.

Если вместо 2) от S потребовать 2′) $(x + y)(u + v) = xu + xv + yu + yv$ для любых $x, y, u, v \in S$, то такая система называется c-кольцом. Доказано, что S является c-кольцом тогда и только тогда, когда оно ассоциативное кольцо или w-кольцо, определяющий элемент e которого имеет порядок 3 в аддитивной группе. Приводятся примеры. Е. Н. Кузьмин

6253. Обобщенные кольца бесконечных матриц. Маттьюс (Generalised rings of infinite matrices. Matthews G.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1958, **A61**, № 3, 298—306; Indagationes math., 1958, **20**, № 3, 298—306 (англ.)

По определению Кёте и Тёплица, кольцом бесконечных матриц называется такая их совокупность R, что для любых матриц A, B, C из R выполняются условия: 1) $A+B\in R$, $AB\in R$; 2) $(AB)C=A(BC)$; 3) ряды $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}b_{jk}$, являющиеся элементами матрицы AB, абсолютно сходятся. Автор вводит некоторые обобщения этого понятия. Класс матриц, удовлетворяющий условию 1), автор называет обобщенным кольцом матриц (g-кольцом). При этом, если условия 2) и 3) не выполняются, то g-кольцо называется неограниченным. Если же условие 3) выполнено, то g-кольцо называется ассоциативным. В работе изучаются свойства g-колец (в частности, ассоциативных), аналогичные, в известной части, свойствам обычных колец матриц. Рассматривается, в частности, класс $M(\alpha)$ матриц, переводящих пространство последовательностей α в себя, и указываются условия, при которых $M(\alpha)$ является ассоциативным g-кольцом, а также условия, достаточные для того, чтобы $M(\alpha)$ было максимальным g-кольцом (т. е. не являлось собственной частью другого g-кольца). Приводятся примеры максимальных g-колец и дается метод построения неограниченных g-колец. А. Л. Гаркави

6254 **О полноте фактор-алгебры полной булевой алгебры II. Дуингер** (On the completeness of the quotient algebras of a complete Boolean algebra. II. Dwinger Ph.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., Ser. A, **62**, № 1, 26—35; Indagationes math., 1959, **21**, № 1, 25—35 (англ.)

Ч. I; см. РЖМат, 1959, 7826. Пусть A — полная булева алгебра. Если A бесконечна и I — ее идеал, то A/I полна одновременно с $\overline{I}/I$, где $\overline{I}=\sum_{x\in I} x$. Условие $\overline{I}=A$ равносильности плотности идеала I (идеал I называется плотным, если для любого ненулевого $x\in A$ найдется такой $y\in I$, что $0<y<x$). Выводятся условия, достаточные для того, чтобы A/I, где I — плотный идеал, была неполной. Л. А. Скорняков

6255. **Стандартные идеалы. Гретцер** (Standard ideals. Grätzer György), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1959, **9**, № 1, 81—97 (венг.)

Элемент s структуры L называется стандартным, если для любых двух элементов $x, y\in L$

$$x\cup(s\cap y)=(x\cup s)\cap(x\cup y).$$

Идеал S структуры L называется стандартным, если для произвольных двух главных идеалов I и K

$$I\cap(S\vee K)=(I\cap S)\vee(I\cap K).$$

Автор дает ряд необходимых и достаточных условий, чтобы элемент (идеал) структуры был стандартным, и исследует зависимость между нейтральными и стандартными элементами. Для одного класса структур, содержащего в себе модулярные структуры, доказывается, что эти понятия эквивалентны. Если x — произвольный элемент, s_1 и s_2 — стандартные элементы структуры L, то подструктура $\{s_1, s_2, x\}$ дистрибутивна. Изучается зависимость между стандартными идеалами и ядрами гомоморфизмов, доказываются теоремы об изоморфизмах и теорема Жордана—Гёльдера—Шрейера—Цассенхауза для стандартных идеалов, обобщаются теоремы Биркгофа (Теория структур, М., Изд-во ин. лит., 1952) и Вана (Wang S., Acta math. sinica, 1953, **3**, 133—141) для структур с относительными дополнениями. А. А. Бовди

6256. **О топологических булевых структурах. Курихара.** Кокю дайгаку когаку кэнкю хоко, Technol. Repts Kyushu Univ., 1956, **29**, № 3, 179—182 (японск.)

6257. **Заметки к теории операций. Чулик** (Poznámky k teorii operací. Čulík Karel), Časop. pěstov. mat., 1958, **83**, № 4, 473—474 (чешск.)

Тернарное отношение Δ на множестве F определяется как подмножество Δ декартова куба $F\times F\times F$. Если $x, y, z\in F$, то $[x, y, z]\in\Delta$. Тернарное отношение Δ называется операцией (бинарной), если выполняются требования: 1) из $[x', y, z]$, $[x'', y, z]\in\Delta$ следует $x'=x''$; 2) для любых $y, z\in F$ существует такой x, что $[x, y, z]\in\Delta$. В последнем случае пишут $x=yz$. Наряду с отношением Δ рассматриваются отношения Δ_{ijk}, определяемые следующим образом: $[x_i, x_j, x_k]\in\Delta_{ijk}$ эквивалентно $[x_1, x_2, x_3]\in\Delta$ (i, j, k принимают значения 1, 2, 3). Следовательно, с каждым тернарным отношением (или бинарной операцией) связаны еще 5 тернарных отношений (бинарных операций). В теореме 1 формулируются ряд простых соотношений между отношениями Δ_{ijk}. Пусть Δ удовлетворяет условию (X). Тогда на Δ_{ijk} условию (X) соответствует условие $(X)_{ijk}$. С этой точки зрения изучение одной операции сводится к изучению другой, например, изучение группы $F(\Delta)$ с операцией Δ, подчиненной условию ассоциативности (A), можно свести к изучению квазигруппы F с операцией Δ_{ijk}, подчиненной условию $(A)_{ijk}$. В этом смысле формулируются несколько простых теорем относительно групп. Например, если $F(\Delta)$ — группа, то $F(\Delta)_{231}$ будет группой, если $a^2=1$ для любого $a\in F$. Доказательства теорем не приводятся.

Примечание референта. Автор, по-видимому, незнаком с работой Стейна (РЖМат, 1958, 153), в которой содержатся результаты реферируемой работы.

В. Д. Белоусов

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СХЕМ СВЯЗИ И УПРАВЛЕНИЯ

6258. **О структурной теории сетей связи. Поваров Г. Н.** В сб.: Пробл. передачи информ. Вып. 1. М., АН СССР, 1959, 126—140

Статья, наряду с обзорным материалом, содержит и оригинальные результаты по анализу связей в частично ориентированных графах. Множество ребер (звеньев) графа $i_0i_1, i_1i_2, \ldots, i_{r-1}i_r$ — называется путем из вершины $i=i_0$ в вершину $i=i_r$, если все вершины $i_0, i_1, \ldots, i_r$ различны, и серией ребер, ведущей из i_0 в i_r, в противном случае. По (квадратной) матрице непосредственных путей $\|a_{ij}\|$, где a_{ij} — число непосредственных путей из i в j и $a_{ii}=0$, ищут полную матрицу путей $\|a_{ij}\|$. Именно, $a_{kl}=|a_{ij}\nearrow lk|_{kl}$, где правая часть есть квазиминор элемента a_{lk} в матрице $\|a_{ij}\|$. (Определение и правила вычисления квазиминора даны в приложении к статье). Указан также прием нахождения числа $a_{kl}^{(r)}$ r-звенных путей из k в l.

Далее $\|x_{ij}^{(r)}\|=\|a_{ij}\|^r$, где $x_{ij}^{(r)}$ и число r-звенных серий ребер между вершинами i и j. Пусть d_{ij} — длина кратчайшего ребра ij, $\mathfrak{d}_{ij}$ — длина кратчайшего пути из i в j. При этом полагают: $d_{ij}=\infty$, если $i\neq j$ и $a_{ij}=0$; $d_{ii}=0$ и $\mathfrak{d}_{ij}=\infty$, если $a_{ij}=0$. Пусть далее D_{ij} — длина наидлиннейшего ребра ij, взятая со знаком минус, $\mathfrak{D}$ — длина наидлиннейшего пути из i в j, взятая со знаком минус. При этом полагают $D_{ij}=0$, $\mathfrak{D}_{ii}=0$ и если $a_{ij}=0$ и $a_{ji}=0$, то соответственно $D_{ij}=\infty$ и $\mathfrak{D}_{ij}=\infty$. Тогда $\|\mathfrak{d}_{ij}\|=\|d_{ij}\|^T=\|d_{ij}\|^{p-1}$, где $T<p-1$ есть такой показатель степени, что $\|d_{ij}\|^T=\|d_{ij}\|^{T+1}$ а также $\mathfrak{D}_{kl}=|D_{ij}\nearrow kl|_{kl}$. При этом „сложение“ двух чисел x и y понимается как $\min(x, y)$, а „умножение“ как обычное алгебраическое сложение, и символ ∞ при числяется к действительным числам. По смыслу T есть наибольшее число звеньев, которое содержится в каком-либо пути в данном графе. Выведенные формулы позволяют находить геометрические длины кратчайших и длиннейших путей, минимум и максимум звеньев в пути между двумя вершинами. Матрица непосредственных

связей графа $\|\delta_{ij}\|$ получается из матрицы $\|a_{ij}\|$, а полная матрица связей $\|\Delta_{ij}\|$ — из матрицы $\|a_{ij}\|$ заменой $a_{ij}>0$ и $a_{ij}>0$ на 1; δ_{ii} и $\Delta_{ii}=1$. Приводятся методы получения $\|\Delta_{ij}\|$, минуя $\|a_{ij}\|$. Автор предлагает более удобный метод, основанный на булевой алгебре, который сводится к использованию матричного метода А. Г. Лунца (Изв. АН СССР. Сер. матем., 195 , 16, № 5) в теории релейно-контактных схем. Ю. Л. Сагалович

6259. О построении минимальных дизъюнктивных нормальных форм для функций алгебры логики. Журавлев Ю. И., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 2, 263—266

Как заметил С. В. Яблонский (РЖМат, 1959, 9704), методы построения минимальной дизъюнктивной нормальной формы (д. н. ф.) состоят из двух этапов: 1) однозначного, приводящего к определенной д. н. ф.; 2) неоднозначного, в результате которого получаются, вообще говоря, многие д. н. ф., среди которых содержится минимальная д. н. ф.; для ее нахождения требуется значительный перебор. Методы минимизирующих карт Блэка, Нельсона, Куайна и др. в результате первого этапа приводят к сокращенной д. н. ф. Первое продолжение первого этапа за сокращенную д. н. ф. было получено Куайном (Quine W. V., Amer. Math. Monthly, 1952, 59, № 8, 5 1). Затем, как указывает автор, Э. И Нечипорук еще дальше продолжил однозначную часть процесса.

В статье приводится метод построения минимальных д. н. ф., позволяющий продолжить первый этап значительно дальше. Пусть $\mathfrak{N}$ — некоторая д. н. ф. функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{A}$ — член $\mathfrak{N}$. Точка x из $\mathfrak{A}$ (набор значений переменных $x_1, \ldots, x_n$, обращающий $\mathfrak{A}$ в 1) называется регулярной относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если после удаления из $\mathfrak{N}$ всех конъюнкций, содержащих x, за исключением $\mathfrak{A}$, получается д. н. ф., не реализующая f. Множество M точек из $\mathfrak{A}$ называется регулярным относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если все его точки регулярны относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$. Множество M точек из $\mathfrak{A}$ называется множеством первого типа относительно $(\mathfrak{A}, \mathfrak{N})$, если в $\mathfrak{N}$ существуют конъюнкции $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$, содержащие соответственно $r_1, \ldots, r_k$ букв, такие что в каждой из точек множества M дизъюнкция $\bigvee_{i=1}^{k} \mathfrak{A}_i$ обращается в единицу и $\sum_{i=1}^{k} r_i$ меньше числа букв в $\mathfrak{A}$. Определяется процесс отметки конъюнкций в д. н. ф. $\mathfrak{N}$. Конъюнкция $\mathfrak{A}_1$ из $\mathfrak{N}$ называется отмеченной, если ее точки можно разбить на два множества M_1 и M_2, такие что M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{N})$, M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{N})$. Пусть $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_k$ — отмеченные конъюнкции; конъюнкция $\mathfrak{A}_{k+1}$ из $\mathfrak{N}$ называется отмеченной, если все ее точки можно разбить на два множества M_1 и M_2, такие что M_1 — множество, регулярное относительно $(\mathfrak{A}_{k+1}, \mathfrak{N} \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \mathfrak{A}_i)$, M_2 — множество первого типа относительно $(\mathfrak{A}_{k+1}, \mathfrak{N})$. В результате удаления из $\mathfrak{N}$ всех отмеченных конъюнкций получается единственная д. н. ф. (хотя процесс отметки неоднозначен), называемая сильно сокращенной д. н. ф., соответствующей $\mathfrak{N}$. Связь между сильно сокращенной д. н. ф. и другими д. н. ф. устанавливается следующей теоремой:

Пусть $\mathfrak{N}_c$, $\mathfrak{N}_{\Sigma T}$, $\mathfrak{N}_{\Sigma M}$, $\mathfrak{N}_{cc}$, $\mathfrak{N}_k$ суть соответственно сокращенная д. н. ф., сумма тупиковых д. н. ф., сумма минимальных д. н. ф., сильно сокращенная д. н. ф. (полученная из сокращенной д. н. ф.), д. н. ф., получающаяся применением процесса Куайна. Тогда

$$\mathfrak{N}_c \equiv \mathfrak{N}_k \equiv \mathfrak{N}_{\Sigma T} \supseteq \mathfrak{N}_{cc} \equiv \mathfrak{N}_{\Sigma M}.$$

Автор указывает, что для построения минимальной д. н. ф. в описанном процессе следует исходить из сокращенной д. н. ф. О. Б. Лупанов

6260. Асимптотическая оценка сложности логических сетей с памятью. Трахтенброт Б. А., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 2, 281—284

Продолжение работы автора (РЖМат, 1958, 5468). Пусть $\theta_{n,m,k}$ — множество всех операторов веса не более k, преобразующих последовательности двоичных наборов $(x_1, \ldots, x_n)$ в последовательности двоичных наборов $(z_1, \ldots, z_m)$; $Q(n, m, k)$ — число элементов в $\theta_{n,m,k}$. Рассматривается реализация операторов из $\theta_{n,m,k}$ логическими сетями из истинностных ячеек и элементов задержки; ячейкам приписаны веса. Индекс простоты сети определяется как сумма весов ее элементов, а индекс простоты $L(T)$ оператора T как наименьший из индексов простоты сетей, реализующих T.

Основной результат: Пусть $L(n, m, k)$ — наименьшее число такое, что сетями с индексом простоты, не превосходящим $L(n, m, k)$, можно реализовать любой оператор из $\theta_{n,m,k}$. Тогда при $n+k \to \infty$, $\frac{\log_2 m}{n+k} \to 0$

$$L(n, m, k) \sim \rho \frac{\log_2 Q(n, m, k)}{\log_2 \log_2 Q(n, m, k)},$$

где ρ — некоторая константа, зависящая от весов исходных элементов (наименьший из удельных весов истинностных ячеек), причем для любого $\varepsilon > 0$ доля операторов T, для которых

$$L(T) < (1-\varepsilon)\rho \frac{\log_2 Q(n, m, k)}{\log_2 \log_2 Q(n, m, k)},$$

стремится к нулю.

Приведем некоторые представляющие самостоятельный интерес частные результаты, на которые опирается доказательство основного результата:

1. Истинностный оператор $(z_1, \ldots, z_n) = T(x_1, \ldots, x_n)$ называется монотонным, если индуцируемая им числовая функция

$$z = t(x) \; (x = 2^0 x_1 + 2^1 x_2 + \ldots + 2^{n-1} x_n,$$
$$z = 2^0 z_1 + 2^1 z_2 + \ldots + 2^{n-1} z_n)$$

является монотонной. Для истинностного оператора $(z_1, \ldots, z_n) = T(x_1, \ldots, x_n)$ справедливо соотношение (при $n \to \infty$)

$$L(T) < \frac{2\rho 2^n \log_2 n}{n}.$$

2. Для каждого отображения T алфавита $Q = \{q_0, \ldots, q_{\widetilde{k}-1}\}$ в себя существует такое кодирование букв этого алфавита наборами из нулей и единиц, что (при $\widetilde{k} \to \infty$)

$$L(T) < \frac{2\rho \widetilde{k} \log_2 \log_2 \widetilde{k}}{\log_2 \widetilde{k}}.$$

3. При $n+k \to \infty$

$$\log_2 Q(n, m, k) \sim 2^{n+k}(m+k) - k2^k.$$

О. Б. Лупанов

6261. О коммутационных схемах и их логической сущности. Харкевич А. Д. В сб.: Логические исследования. М., АН СССР, 1959, 415—428

Рассматривается дискретный Q-полюсник, каждой паре полюсов которого поставлены в соответствие одна или две характеристики воздействия между ними. В общем случае воздействиями могут быть многозначные функции многозначных переменных. Схемы, предназначенные для передачи воздействий между однородными объектами, называются коммутационными. Многополюс

ник называется ординарным, если возможны лишь попарные одновременные воздействия объектов. Ориентированный $N \times M$ полюсник $(N + M = Q)$ называется разделенным, если исключаются воздействия между входами (выходами). Рассматриваются три регулярные операции над коммутационными схемами, использующие матричный метод задания последних: а) объединение, б) каскадное построение, в) многоступенное построение. С помощью этих операций можно блочным образом строить сложные схемы из простых. Выясняются условия, при которых полученные схемы являются коммутационными. Ю. Л. Сагалович

6262. Моделирование операций исчисления высказываний посредством релейно-контактных схем. Шестаков В. И. В сб.: Логические исследования. М., АН СССР, 1959, 315—351

В первой части статьи излагаются результаты предыдущих работ автора (Изв. АН СССР. Сер. матем., 1946, 10, 529—544; РЖМат, 1955, 2095), посвященных моделированию операций исчисления предложений посредством двухполюсных и четырехполюсных релейно-контактных (р.-к.) схем, и вводятся новые („безрелейные") обозначения для однотактных р.-к. схем нормального типа. Алгебраические выражения такого рода р.-к. схем в безрелейных обозначениях не содержат символов реле и контактов вторичных реле. Вместо символов контактов вторичных реле используются заключенные в фигурных скобках алгебраические выражения контактных схем, управляющих данными вторичными реле. Например, после овательное соединение контакта z первичного реле Z с замыкающим контактом u некоторого вторичного реле U, соединенного после овательно с контактной схемой $x + y$, записывается в безрелейных обозначениях посредством выражения $\{x + y\}\cdot z$.

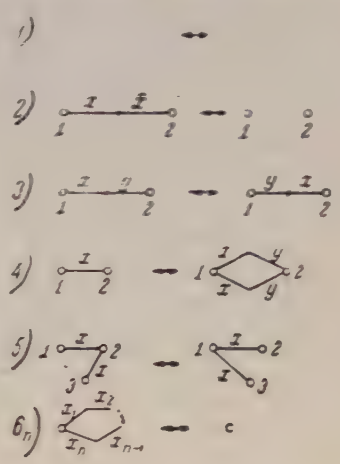
Во второй части рассматривается моделирование операций трехзначного исчисления высказываний — исчисления Бочвара (Матем. сб., 1938, 4 (46), 287—308; 1943, 12 (54), 353—369) посредством трехпозиционных коммутаторов. Моделируемое трехзначное исчисление излагается на основе двух основных операций: $p \vee q$ („или p или q") и $\vdash p$ („p — истинно"), а не трех: $\sim p$ („не p"), $p \mid q$ („p и q") и $\vdash p$ („p — истинно"), как это имело место у Бочвара. Указывается также на возможность расширения исчисления Бочвара до функционально полного исчисления посредством введения операции Шеффера $p \mid q$ и вспомогательной операции $\neg p = {}_D(p \mid p^2)\,|\,(p \mid p^2)^1$.

Подробно рассматривается моделирование различных функций трехзначного исчисления высказываний посредством двух- и трехпозиционных коммутаторов и их каскадных соединений. Указываются некоторые возможности упрощения схем, моделирующих рассматриваемые функции.

Опечатки: стр. 334, строка 3 сверху, следует читать: „четырехполюсник — $\overline{1}\,(p)$"; стр. 335, строка 14 сверху, следует читать: „замыкающим контактом y и одним размыкающим контактом y'". В. Д. Казаков

6263. **Об эквивалентных преобразованиях контактных схем. Мурский В. Л.**, Докл. АН СССР, 1959, 127, № 2, 262—265

Рассматриваются эквивалентные (т. е. сохраняющие полные проводимости между полюсами) преобразования контактных схем с помощью правил двух родов. Правило первого рода состоит в замене подсхемы эквивалентной ей подсхемой; при этом наряду с каждым правилом A рассматриваются все правила, получающиеся из A путем одновременного переименования переменных в обеих частях правила. Правило второго рода состоит также в замене подсхемы эквивалентной ей подсхемой, но кроме переименования переменных допускается подстановка одной и той же подсхемы вместо одноименных контактов. Показано, что следующая (счетная) система правил первого рода является полной (т. е. с ее помощью можно преобразовать друг в друга любые две эквивалентные контактные схемы) (здесь полюса обозначены кружками; соответствующие полюса занумерованы одинаковыми числами; схемы в правиле 1) бесполюсные, правая часть 1) — пустая схема), а также что система правил второго рода, получающаяся из приведенной выше заменой правила 6_n правилом $x/\!\leftrightarrow\!0$, является полной. Автор доказывает, что не существует полной конечной системы правил первого рода. В заключение приводится полная система правил, позволяющих преобразовывать связные схемы без отростков так, чтобы все промежуточные схемы были связными и не содержали отростков. О. Б. Лупанов



6264. **Минимальные контактные схемы для булевых функций четырех переменных. Васильев Ю. Л.**, Докл. АН СССР, 1959, 127, № 2, 242—245

Автор, исходя из каталогов Г. Н. Поварова (РЖМат, 1956, 3388 Д) и Игоннэ и Греа (РЖМат, 1956, 5145К) и упростив более 100 схем, получил минимальные схемы для всех 402 типов булевых функций четырех переменных (и доказал их минимальность). Для доказательства минимальности многих схем оказались достаточными следующие соображения: 1) если функция существенно зависит от переменной x, то всякая схема для нее должна содержать соответствующий контакт; 2) если функция не является ни монотонно неубывающей по аргументу x, ни монотонно невозрастающей по этому аргументу, то всякая схема для нее должна содержать как контакт x, так и контакт $\bar{x}$. Нижнюю оценку, получающуюся из этих соображений, автор называет тривиальной. Доказательство минимальности схем для большинства остальных типов основано на нескольких общих принципах, сформулированных в виде теорем. Для оставшихся 40 типов получены индивидуальные доказательства. Автор установил, что самая сложная минимальная схема для функции 4 переменных содержит 13 контактов и что не более 8 типов (из 402) не имеют минимальной плоской реализации. В статье приводится сводная таблица, по которой для всех типов, для которых оказалась недостаточной тривиальная оценка, можно установить способ доказательства минимальности предлагаемой автором схемы и число контактов в ней.

Приведена также таблица, в которой указано число типов, минимальные системы для которых содержат N контактов:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	1	2	4	12	16	39	57	104	84	53	18	9	2

Я. Б. Лупанов

6265. **Метод синтеза многополюсных контактных схем. Гребенщиков В. Н.,** Вестн. Моск. ун-та, Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 3, 117—127

Излагается разработанный автором метод синтеза многополюсных схем (РЖМат, 1959, 88.6). Метод заключается в последовательном построении искомой контактной схемы. С помощью анализа заданных булевых функций, соответствующих проводимостям между полюсами синтезируемого контактного многополюсника, последовательно выделяются так называемые „наружные" контакты (т. е. присоединенные хотя бы одним концом к полюсу) и путем решения специальных систем булевых уравнений определяются булевы функции, соответствующие контактным проводимостям между полюсами оставшейся схемы. Эта процедура повторяется до тех пор, пока булевы функции не превратятся в константы. Определяются три вида наружных контактов: продольные, поперечные и продольно-поперечные. Приводятся системы уравнений, позволяющие определить проводимость многополюсника после выделения контактов разного типа. Однако, рассматривая синтез схем общего вида, автор не указывает порядка выделения контактов, определение которого представляется порою весьма трудным. Это затруднение полностью снимается при синтезе бесповторных схем, на что указывает сам автор. Рассматриваются примеры синтеза бесповторных схем предлагаемым методом. В. Д. Казаков

6266 К. **Алгебраический метод синтеза многотактных релейных систем. Шестаков** (Algebraic method of designing sequential relay. Shestakow V. I. Transl. from the Russ. Newtonville, Mass., 1956, 6 pp.) (англ.)

Перевод с русского (РЖМат, 1955, 2904).

6267 К. **О функциональной разделимости булевых функций. Поваров** (On the functional separability of Boolean functions. Povarov G. N. Transl. from the Russ. Newtonville, Mass., 1956, 5 pp.) (англ.)

Перевод с русского (РЖМат, 1955, 459).

См. также: 6065 К, 6135, 6136, 6161, 6291, 6309, 6631, 6743, 6748, 6899.

ТОПОЛОГИЯ

Редактор *П. С. Александров*

6268. **О порядковом числе классов эйлеровых полиэдров. Билинский** (Über die Ordnungszahl der Klassen Eulerscher Polyeder. Bilinski Stanko), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 180—186 (нем.)

Автор исходит из соотношений: 1) $e - k + f = 2$, 2) $3e \leqq 2k$, 3) $3f \leqq 2k$, которым удовлетворяют элементы эйлеровых полиэдров: e, k, f, причем e означает число вершин, k — число ребер и f — число граней полиэдра. Придерживаясь классификации Эйлера, он считает два полиэдра принадлежащими одному и тому же классу, когда эти полиэдры имеют одинаковое число вершин, одинаковое число ребер и одинаковое число граней. Класс полиэдров с элементами e, k, f он обозначает через $\{e, k, f\}$, а порядковое число этого класса — через $K(e, k, f)$. На $K(e, k, f)$ он налагает условие А: требуется, чтобы было $K(e_1, k_1, f_1) < K(e_2, k_2, f_2)$ в тех случаях: 1) когда $k_1 < k_2$, или 2) когда при $k_1 = k_2$ $e_1 < e_2$. Это условие А позволяет установить взаимно однозначное соотношение между множеством классов эйлеровых полиэдров и натуральным рядом чисел как множеством значений $K(e, k, f)$ и дать формулы, выражающие e, k, f как однозначные функции параметра K:

$$e = -\left[\frac{\Phi(K)(\Phi(K) - 13)}{6}\right] + K - 4,$$

$$k = \Phi(K), \qquad (K = 1, 2, 3, \ldots)$$

$$f = \left[\frac{\Phi(K)(\Phi(K) - 7)}{6}\right] - K + 6,$$

где

$$\Phi(K) = \left[\frac{11 + \sqrt{24K - 23}}{2}\right].$$

Из формул автора, выражающих K как однозначную функцию от e, k, f, приводим лишь одну:

$$K = \left[\frac{k(k - 13)}{6}\right] + e + 4.$$

Х. Я. Яаксон

6269. **Несколько теорем о графах. Эрдёш** (Some theorems on graphs. Erdös Paul. Riveon Lematematika, 1955, **9**, 13—17) (иврит.; рез. англ.)

Граф G_n с n вершинами и $[n^2/4] + l$ ребрами, $l < n/2$, содержит $t \geqslant l\,[n/2]$ треугольников. То, что $t \geqslant 1$, было доказано Тураном (РЖМат, 1955, 311), а то, что при четном n $l = 1$ доказано Радемахером (не опубликовано). Все G_n с $l = 1$, $t\,[n/2]$ изоморфны. T. S. Motzkin

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 5, 408.

6270. **О теореме Брукса и гипотезе Хадвигера. Дирак** (A theorem of B. L. Brooks and a conjecture of H. Hadwiger. Dirac G. A.), Proc. London Math. Soc., 1957, **7**, № 26, 161—195 (англ.)

Изучается структура k-хроматических критических графов. Из предложений общего характера отметим прежде всего следующие: степень каждой вершины k-хроматического графа $\geqslant k - 1$; если после удаления всех вершин графа степени $> k - 1$ он остается связным, то он критический. Далее описывается структура всех k-хроматических графов, имеющих только одну вершину степени $> k - 1$. А именно: если d — степень этой исключительной вершины, то класс $D(d)$ таких графов состоит из окружности нечетной длины (нечетное число ребер) и вершины — „центра", соединенного с каждой вершиной этой окружности либо ребром, либо с помощью графа из класса $D(d_h)$ с $3 \leqslant d_h < d$. Число таких графов конечно; их легко описать. Для $k > 4$ нужно взять полный $\{k - 1\}$-граф и соединить „центр" с каждой вершиной $\{k - 1\}$ подобным же образом. Причем в этом случае класс $D(d)$ не пуст только тогда, когда d представимо в виде $p(k - 3) + 1$. С помощью этого описания доказывается гипотеза Хадвигера для графов, число вершин которого со степенью $> k - 1$ можно разбить на два таких класса, что один класс состоит из одной вершины, а для второго класса не существует в графе ребер, соединяющих его вершины. Гипотеза Хадвигера состоит в том, что всегда можно так последовательно „сокращать граф" (объединять две вершины, связанные ребром, в одну, которая будет сведена со всеми вершинами, соединенными хотя бы с одной из первых двух), что мы придем к полному $\{k - 1\}$-графу. Для $k = 5$ эта гипотеза сводится к гипотезе о четырех красках и, следовательно, доказана для карт, соответствующие

графы которых описанного выше типа. Теорема Брукса заключалась в том, что для k-хроматических критических графов существует соотношение $2E > (k-1)N+1$, где E — число ребер, N — число вершин. Автор доказывает более сильное утверждение $2E > (k-1)N + k - 3$.

Для дальнейших предложений, связанных с этим неравенством, необходимо делать те или иные ограничения о наличии полных подграфов, а именно: назовем $2E-(k-1)N$ избытком графа а через $e(k, n)$ обозначим для $k \geqslant 3$ и $0 \leqslant n \leqslant k-3$ наибольшее целое, обладающее тем свойством, что каждый критический k-хроматический граф который не содержит $\{k-n\}$ как подграф, имеет избыток. Хорошо известно и было доказано еще Унгаром и Таттом, что для всех k существует k-хроматический граф без треугольников, а из одного предложения Дирака следует существование графов, не содержащих $\{5\}$ в качестве подграфов.

Доказывается и более общий результат: $e(k, n) \geqslant k-3$ при $k \geqslant n$, или это перефразируется следующим образом — если k-хроматический граф не содержит $\{k-n\}$ в качестве подграфа, то $\sum_x [d(x) - k + 1] \geqslant k + n - 3$, где x пробегает все вершины графа. В частности, $e(k, 0) = n-3$. Р. Е. Кричевский

6271. Максимальные циклы в критических графах. Рид (Maximal circuits in critical graphs. Read R. C.), J. London Math. Soc., 1957, **32**, № 4, 456—462 (англ.)

Для k-хроматических графов с k-вершинами через $L_k(n)$ обозначим длину (число ребер) наибольшего цикла, содержащегося в нем. Эта функция на графах была введена в работе Келли и Келли (РЖМат, 1955, 4308) и там была дана оценка ее нижнего предела по n для 4-хроматических графов. Она была обобщена на случай любых k-хроматических графов Дираком (РЖМат, 1954, 5081). Автор дает следующую улучшенную оценку:

$$\underline{\lim}\, L_n(n)/\{\log n \cdot \log\log n \ldots \log(n-1)\, n \times$$

$$\times [\log_{k-3} n]^2\} \leqslant \left[\frac{2}{\log n}\right]^{k-2}.$$

($\log_{(l)}$ обозначает l-кратный логарифм).

Доказательство основано на построении последовательности $\{M_l\}$ критических i-хроматических графов, получаемых из первоначального графа некоторой конструкцией, в которой используется (p, s) раскраска. Будем называть граф (p, s) раскрашиваемым, если при любой раскраске его вершин эти краски можно так разделить на два подмножества, называемые примарными и вторичными, что в этой раскраске каждая вершина (но обязательно не все множество вершин) может быть закрашена разве лишь одной примарной краской. Из вышеуказанных работ следует, что каждый из графов M_l обладает $(l, i-2)$-раскраской. Р. Е. Кричевский

6272. Алгоритм для наименьшего покрытия графа. Норман, Рейбин (An algorithm for a minimum cover of a graph. Norman Robert Z., Rabin Michael O.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 315—319 (англ.)

Множество C ребер графа G называется покрытием G, если каждая вершина G является концом хотя бы одного ребра из C. Покрытие графа называется наименьшим, если у этого графа не существует покрытия с меньшим числом ребер (в отличие от минимального покрытия, никакая правильная часть которого не является покрытием). Доказывается, что C есть $C_{\text{наим.}}$, тогда и только тогда, когда в G не существует пути вида $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n}, e_{2n+1}$, где $e_1, e_{2n}, e_{2n+1}, e_{2k} \in C$, $e_{2k+1} \notin C (1 < k < n-1)$. Устанавливается, что два наименьших покрытия графа G всегда можно перевести друг в друга конечным числом преобразований T_1 и T_2 следующего типа: 1) пусть (e_1, e_2, e_3) — некоторый путь, в котором $e_2, e_3 \in C$, тогда $T_1(C) = C \cup (e_1, e_3) - (e_2, e_3)$; 2) пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_{2n})$ — некоторый контур, где $e_{2k-1} \in C$, $e_{2k} \notin C$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$, тогда $T_2(C)$ меняет концы ребер с e_{2k-1} на e_k.

Дается доказательство утверждения, аналогичного теореме Бержа (реф. 6271), но в терминах покрытия автора, и даются способы получения некоторого $V_{\text{наиб.}}$ из данного $C_{\text{наим.}}$ и некоторого $C_{\text{наим.}}$ из данного $V_{\text{наиб.}}$ А. А. Зыков

6273. Две теоремы в теории графов. Берж (Two theorems in graph theory. Berge Claude), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1957, **43**, № 9, 842—844 (англ.)

Возьмем граф (X, U). Множество $A \subseteq X$ называется устойчивым, если никакие две его вершины не соединены ребром. Множество $B \subseteq X$ называется покрытием, если у всякого ребра из U хотя бы один конец $\in B$. Множество $V \subseteq U$ называется паросочетанием (matching; фр. couplage), если никакие два его ребра не имеют общей вершины. Чередующейся цепью (alternating chain) графа G с заданным в нем паросочетанием V называется последовательность ребер из U, в которой никакое ребро не содержится дважды, каждые два последовательных ребра имеют общую вершину и одно из них $\in V$, а другое $\notin V$. Для произвольного конечного графа G формулируются задачи: 1) построить устойчивое множество с наибольшим числом вершин; 2) построить покрытие с наименьшим числом вершин; 3) построить паросочетание с наибольшим числом ребер (обозначаемое нами через $V_{\text{наиб.}}$ *Реф.*).

Доказывается теорема: Паросочетание V есть $V_{\text{наиб.}}$ тогда и только тогда, когда никакие две вершины, не являющиеся концами ребер из V, нельзя соединить чередующейся цепью. На этой основе дается следующий способ построения некоторого $V_{\text{наиб.}}$ для заданного графа G: строим произвольное паросочетание V; ищем цепь $(u_1, u_2, \ldots, u_{2n+1})$ со свойствами, указанными в теореме; строим паросочетание $V' = V \cup \{u_1, u_3, \ldots, u_{2n+1}\} - \{u_2, u_4, \ldots, u_{2n}\}$, число ребер которого на единицу больше, чем у V; этот процесс продолжаем до полного исчезновения цепей указанного вида. Вторая теорема, доказанная в работе, позволяет сводить задачи 1) и 2) к задаче 3).

Примечания референта. 1) Сведение задач 1), 2) и 3) к задаче выявления и переделки цепей определенного вида к другим задачам (например, о выделении связной компоненты данного подграфа) еще нельзя считать решением задач 1), 2) и 3), так как это существенно зависит от выбора способа задания графов, а об этом в работе ничего не сказано; по мнению референта, без такого уточнения формулировка задач некорректна, ввиду неопределенности термина „построить". 2) При доказательстве теоремы 2 нужно пользоваться некоторым покрытием, а не максимальным А. А. Зыков

6274. Оболочки двусторонних графов. Далмидж, Мендельсон (Coverings of bipartite graphs. Dulmage A. L., Mendelsohn N. S.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 4, 517—534 (англ.)

1. Пусть S и T — два произвольных множества и $S \times T$ — их прямое произведение. Подмножество K произведения $S \times T$ называется двусторонним графом и его элементы (s, t) — ребрами. В дальнейшем A_i обозначает подмножества S, а символы B_j — подмножества T. Число элементов любого множества D называется его порядком $\nu(D)$. Через $[A, B]$ обозначаем внешнее покрытие графа K, если для каждого $(s, t) \in K$ имеет место $s \in A$ или $t \in B$ (или оба). Число $\nu(A) + \nu(B)$ есть размерность покрытия. Внешняя размерность $E(K)$ графа K определяется как $\min(\nu(A) + \nu(B))$ по всем внешним покрытиям $[A, B]$ графа K. Пара, для которой этот минимум достигается, называется минимальной внешней парой, сокращенно m. e. p. (minimal exte-

rior pair). Расчлененным графом называется граф, у которого нет пары инцидентных ребер. Расчлененный граф конечной внешней размерности $E(K^*)$ содержит точно $E(K^*)$ ребер и обратно. Всякий граф K содержит расчлененный подграф K^* такой, что $E(K)=E(K^*)$. Ребро графа K называется неприемлемым, если оно является ребром какого-либо расчлененного подграфа K^* такого, что $E(K)=E(K^*)$; иначе ребро приемлемо. Множество K_c приемлемых ребер графа K называется его сердцевиной. Присоединение к графу или удаление из него неприемлемых ребер не меняет сердцевины. Ребро графа K является неприемлемым тогда и только тогда, когда оно входит в объединение всех множеств $A\times B$ таких, что $[A, B]$ есть m. e. p. для K.

2. Внутренним покрытием графа K называется пара $\{A, B\}$, если $(A\times B)\supseteq K$. Пусть $\overline{A}$, $\overline{B}$ и $\overline{K}$ суть дополнения A, B и K соответственно до S, T и $S\times T$. Тогда, если $[A, B]$ — внешнее покрытие для K и $A\neq S$, $B\neq T$, то $\{\overline{A}, \overline{B}\}$ — внутреннее покрытие для $\overline{K}$, и обратно. Внутренняя размерность $I(K)$ графа K определяется как $\max(\nu(A)+\nu(B))$, по всем внутренним покрытиям $\{A, B\}$ графа K. Связь между $E(K)$ и $I(K)$ не обязательна; однако устанавливается связь внешней размерности графа с внутренней размерностью его дополнения. Результат формулируется в терминах матриц.

3. Граф K называется неразложимым, если для каждой его m. e. p $[A, B]$ либо $A\neq 0$, либо $B\neq 0$; иначе K разложим. Неразложимый граф не имеет неприемлемых ребер. Если $[A_1, B_1]$ и $[A_2, B_2]$ — m. e. p., то $[A_1\cup A_2, B_1\cap B_2]$ и $[A_1\cap A_2, B_1\cup B_2]$ являются m. e. p.; если $A_1\supseteq A_2$, то $B_2\supseteq B_1$. Эти свойства обобщаются в теореме 7: Всякий граф конечной внешней размерности имеет единственно определенные крайние m. e. p. $[A_*, B^*]$ и $[A^*, B_*]$ такие, что если $[A, B]$ — любая другая m. e. p. графа K, то $A_*\subseteq A\subseteq A^*$ и $B_*\supseteq B\supseteq B^*$. В соответствии с этим всякий граф определяет разложение произведения $S\times T$ на три части:

$$R_1=(A_*\times\overline{B}^*)\cup\bigcup_{i=1}^{k}(S_i\times T_i)\cup(\overline{A}^*\times B_*);$$

$$R_2=(A_*\times B^*)\cup(A^*\times B_*)\cup\bigcup_{i<j}(S_i\times T_j);$$

$$R_3=(\overline{A}_*\times\overline{B}^*)\cup(\overline{A}^*\times\overline{B}_*)\cup\bigcup_{i>j}(S_i\times T_j),$$

где множества S_i, T_i строятся индуктивно следующим образом. Если $\nu(A^*)-\nu(A_*\cup S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_{i-1})>0$, то S_i — такое множество, что $S_i\subseteq(A_*\cup S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_{i-1})=\emptyset$ и $A_i=A_*\cup S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_{i-1}\cup S_i$ — первый член m. e. p. для K, причем $\nu(S_i)$ минимально среди всех возможных множеств S_i. Тогда для A_i однозначно определяется второй член m. e. p. — B_i, и $T_i=B_{i-1}-B_i$. Процесс идет до тех пор, пока $S_{k+1}\neq\emptyset$. Доказывается, что $\nu(S_i)=\nu(T_i)=u_i$ и $E(K)=\nu(A_*)+\nu(B_*)+\sum_{i=1}^{k}u_i$.

Это разложение называется каноническим. Оно обладает следующими свойствами: 1) каждый элемент из K, R_2 — приемлем, $K\cap R_3$; 2) подграфы $K\cap(A_*\times B^*)$ и $K\cap(A^*\times B_*)$ несократимы, их единственные m. e. p. суть $(A_*\times\emptyset)$ и $(\emptyset\times B_*)$ соответственно; подграфы $K\cap(S_i\times T_i)$ несократимы для всех i; 3) если граф K изменить добавлением или удалением ребра из R_2, то новый граф имеет ту же сердцевину, что и K, и области R_1, R_2, R_3 неизменны; 4) если к K прибавить ребро из R_1, то разбиение сохраняется. Рассматривается вопрос о числе m. e. p. графа, а также некоторые другие разложения произведения $S\times T$, связанные с данным графом.

4. Пусть C — матрица с неотрицательными членами порядка $p\times q$ ранга ρ, S — сумма всех ее членов, M и m — соответственно максимум и минимум сумм членов в любой строке или столбце. Изучаются оценки $\rho:\rho\geqslant\frac{S}{M}$, $\rho\geqslant p+q-\frac{S}{m}$ и др. (теоремы 13—15). Дается способ повышения оценок разложением матрицы C на матрицу с тем же рангом, но с меньшей величиной $\frac{S}{m}$ и большей $\frac{S}{M}$.

5. Множество m. e. p графа K образует дистрибутивную структуру, если положить $[A, B]\leqslant[A', B']$ тогда и только тогда, когда $A\supseteq A'$, $B\subseteq B'$, и положить

$$[A, B]\cup[A', B']=(A\cup A',\ B\cap B')\text{ и }[A, B]\cap[A', B']=(A\cap A',\ B\cup B').$$

Если за дополнение к $[A, B]$ принять $[(A^*-A)\cup A_*, (B^*-B)\cup B_*]$, то структура будет дополнительной тогда и только тогда, когда K не содержит неприемлемых ребер. Указывается также, что область R_2 можно разбить на подобласти так, что для каждой из них присутствие элемента графа K запрещает дополнению к m. e. p. для K быть m. e. p. для K. Для множества A образуем множество $B=\psi_k(A)$ элементов в таких, что $(a, b)\in K$ для всех $a\in A$. Аналогично определяется $A=\varphi_k(B)$. Известно, что $\varphi_k\psi_k(A)\supseteq A$, $\psi_k\varphi_k(B)\supseteq B$. Если $\varphi_k\psi_k(A)=A$, то A замкнуто (аналогично B). Пара (A, B) называется полюсной по отношению к K, если $B=\psi_k(A)$ и $A=\varphi_k(B)$. При этом A и B всегда замкнуты. Внешнее покрытие $[A, B]$ называется несжимаемым, если не существует отличного от него внешнего покрытия $[A_1, B_1]$ такого, что $A_1\supseteq A$, $B_1\supseteq B$. Отсюда m. e. p. для K есть несжимаемое покрытие минимальной размерности. Аналогично определяется нерастяжимое внутреннее покрытие. Устанавливается связь между понятием полюсной пары и понятиями внешней и внутренней пар.

Ф. Я. Ветухновский

6275. Заметка о накрывающих пространствах. Кураната, Като (A note on covering spaces. Kuratata Y., Kato M. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 1956, Ser. I, 13, 65—67) (англ.)

В замечании после положения I Шевалле (Chevalley, Theory of Lie groups, v. I, Princeton, 1946, 51) заметил, что это его предложение можно вывести из принципа монодромии (там же, стр. 46) в случае, если пространство $\mathfrak{B}$ нормально. Авторы предлагают модификацию принципа монодромии, из которого это предложение следует без всяких предположений. А именно, пусть $\mathfrak{B}$ — просто связное пространство, $\mathfrak{U}$ — открытый базис, $\mathfrak{B}$ — состоящий из связных множеств и каждой точкой $p\in\mathfrak{B}$ связывается непустое множество E_p. Каждой тройке $(U; p, q)$ соответствует отображение $\varphi^{(U)}_{p,q}E_p$ в E_q с выполнением следующих условий:

1) Если $U\in\mathfrak{U}$ и $p, q, r\in U$, то $\varphi^{(U)}_{p,r}=\varphi^{(U)}_{q,r}\cdot\varphi^{(U)}_{p,q}$;

2) если $U, V\in\mathfrak{U}$ и $U\supseteq V$ имеем $\varphi^{(U)}_{p,q}=\varphi^{(V)}_{p,q}$ для всех $p, q\in V$;

3) каждое $\varphi^{(U)}_{p,p}$ тождественно. Тогда существует отображение ψ, которое ставит в соответствие каждой точке $p\in\mathfrak{B}$ элемент $\psi(p)\in E_p$ так, что $\psi(q)=\varphi^{(U)}_{p,q}(\psi(p))$, где $U\in\mathfrak{U}$ и $p, q\in U$. Более того, если $p_0\in\mathfrak{B}$ и $e^0_{p_0}\in E_{p_0}$ заданы, то отображение ψ единственным способом можно выбрать так, что $\psi(p_0)=e^0_{p_0}$.

W. W. S. Clayton

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 7, 589.

6276. Об односвязных компактных трехмерных многообразиях. Пуанкаре (Sur les variétés simplement connexes, compactes à trois dimensions. Poénara

Valentin), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 6, 624—626 (франц.)

Представлением $(F(K_3), \Phi)$ некоторого трехмерного многообразия K_3 автор называет расположенный в евклидовом пространстве E^3 размерно-однородный комплекс $F(K_3)$ вместе с заданным на его границе отношением эквивалентности Φ, склеивающим гомеоморфно граничные симплексы по два таким образом, чтобы $F(K_3)/\Phi = K_3$. Граничные симплексы α, α' комплекса $F(K_3)$ называются отмеченным элементом рассматриваемого представления, если $\Phi(\alpha) = \alpha'$ и при $p \in \alpha$, α', $\Phi(p) = p$. Пусть $(F(K_3), \Phi)$ — некоторые представления многообразия K_3. Обобщенное представление $((\alpha_1\beta_1)F(K_3), (\alpha_1\beta_1)\Phi)$ состоит из пространства $(\alpha_1\beta_1)F(K_3)$, полученного из $F(K_3)$ склеиванием при помощи Φ симплексов α_1 и β_1, образующих отмеченный элемент, и отношения эквивалентности, которое действует на незаклеенной части границы согласно Φ. Из обобщенного представления $((\alpha_1\beta_1)F(K_3), (\alpha_1\beta_1)\Phi)$ аналогичным образом можно получить обобщенное представление $((\alpha_2\beta_2)(\alpha_1\beta_1)F(K_3), (\alpha_2\beta_2)(\alpha_1\beta_1)\Phi)$ и т.д.

С помощью некоторых теорем о положении гомотопной нулю простой замкнутой кривой в трехмерном многообразии (формулировки приводятся) автор излагает план доказательства следующей основной теоремы: Всякое компактное односвязное трехмерное многообразие K_3 имеет такое обобщенное представление

$$((\alpha_n\beta_n)\dots(\alpha_1\beta_1)F(K_3), (\alpha_n\beta_n)\dots(\alpha_1\beta_1)\Phi),$$

что $F(K_3)$ стягиваемо в точку, все симплексы $(\alpha_i\beta_i)$ двумерны и $(\alpha_n\beta_n)\dots(\alpha_1\beta_1)F(K_3) = K_3$. А. М. Виноградов

6277. Об односвязных компактных трехмерных многообразиях. Поенару (Sur les variétés simplement connexes, compactes à trois dimensions. Poénaru Valentin), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 21, 1818—1820 (франц.)

Производится уточнение результатов предыдущей заметки (реф. 6 76) и с их помощью намечается доказательство следующей теоремы: Пусть K_3 — односвязное компактное трехмерное многообразие. Тогда для любой клетки $I_3 \subset K_3$ произведение $(K_3 \setminus I_3) \times I_2$ гомеоморфно I_5, где через I_j обозначена j-мерная клетка.

Автор отмечает, что доказательство гомеоморфности пространств $(K_3 \setminus I_3) \times I_1$ и I_4 позволило бы с помощью одной теоремы Александера доказать гипотезу Пуанкаре. А. М. Виноградов

6278. Несколько предложений об односвязных трехмерных многообразиях. Поенару (Considérations sur les variétés simplement connexes à 3 dimensions. Poénaru Valentin), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, **3**, № 1, 139—156 (франц.)

Изложение некоторых результатов Мойза (Moise E. E., Ann Math., 1952, 1953) и Папакариокопулоса (РЖМат, 1954, 7848).

6279. Об односвязных трехмерных многообразиях. Поенару (Sur les variétés simplement connexes à trois dimensions. Poénaru Valentin), Rend. mat. e applic., 1959, **18**, № 1—2, 25—94 (франц.)

Подробное содержание и доказательства результатов, опубликованных в двух заметках (реф. 6277).

6280. Теорема адекватного описания. Эллис (A theorem on description adequacy. Ellis David), Publs math., 1956, **4**, № 3-4, 180—183 (англ.)

Сеть есть отображение направленного множества Δ в топологическое пространство S: $\mathfrak{n}: \Delta \to S$. Точка $p \in S$ является пределом сети $\mathfrak{n}$, если всякая окрестность U точки p содержит образ множества $\{n : n \geqslant n_0(U), n \in \Delta\}$. Класс сетей $\mathfrak{N}$ в пространстве S адекватно описывает топологию, если выполнено условие: точка $p \in S$ является точкой, предельной для множества $T \subset S$ тогда и только тогда, когда существует сеть $\mathfrak{n}: \Delta \to T \setminus \{p\}$, $\mathfrak{n} \in \mathfrak{N}$, пределом которой будет точка p. Если $\mathfrak{S}$ — множество всех непустых подмножеств пространства S, то оператор отбора в S есть отображение $f: \mathfrak{S} \to S$ такое, что для каждого множества $T \in \mathfrak{S}$ имеем $f(T) \in T$. Если $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{A}$ упорядочено обратно включению так, что пересечение двух множеств из $\mathfrak{A}$ содержит множество из $\mathfrak{A}$, то $f \mid \mathfrak{A}$ называется сетью отбора. Сети отбора, образованные из f, адекватно описывают топологию пространства S (пространство является T_2-пространством).

Б. Т. Левшенко

6281. Одно замечание о ранжированном пространстве. II. Сираи (A remark on the ranked space. II. Shirai Tameharu), Proc. Japan Acad., 1957, **33**, № 3, 139—142 (англ.)

Изменяя надлежащим образом понятие нигде не плотного множества (так, что оно совпадает с обычным при выполнении аксиомы С Хаусдорфа), автор обобщает на случай полных ранжированных пространств (в смысле Кунуги, см. ГЖМат, 1956, 2034; 1957, 228) известную теорему Бэра: Всякое негустое открытое множество является множеством второй категории.

Ю. М. Смирнов

6282. О коллективно-нормальных и сильно паракомпактных пространствах. Шедива Вера, Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 1, 50—62 (рез. англ.)

Доказаны следующие утверждения: 1. Нормальное пространство X коллективно-нормально и счетно-паракомпактно тогда и только тогда, когда для любой локально конечной системы $\{B_\lambda\}$, $B_\lambda \subset X$, существует локально конечная система $\{G_\lambda\}$ открытых в X множеств, для которой $B_\lambda \subset G_\lambda$ (при любом λ). 2. Произведение счетно-паракомпактного и коллективно-нормального пространства X на компакт Y будет также счетно-паракомпактным и коллективно-нормальным. 3. Коллективная нормальность наследственна по F_σ-множествам. 4. Если коллективная нормальность пространства X наследственна по его открытым множествам, то она будет наследственна по всем множествам. 5. Локально финально-компактное F_σ-множество паракомпактного пространства X будет сильно паракомпактным. 6. Сильно паракомпактное метризуемое пространство X веса τ гомеоморфно подмножеству произведения гильбертова кирпича счетного веса на бэровское пространство веса τ. 1. Если $X = X_1 \times X_2$, где X_1, X_2 — метризуемые пространства со счетным локальным весом, то X наследственно сильно паракомпактно; если один из сомножителей имеет несчетный локальный вес, а другой — положительную малую индуктивную размерность, то X не является наследственно сильно паракомпактным. 8. Пусть $X = X_1 \times X_2$, X_1 имеет счетный локальный вес, $\dim X_2 = 0$. Тогда для наследственной сильной паракомпактности пространства X необходимо и достаточно выполнение каждого из следующих условий: а) X не содержит подпространств определенного вида, б) или $\dim X = 0$, или X имеет счетный локальный вес. В. И. Пономарев

6283. Несколько примеров топологических пространств, в которых не выполняется аксиома F. Шедива (Několik příkladů topologických prostorů nesplňujících axiom F. Šedivá Věra), Časop. pěstov. mat., 1959, **84**, № 4, 461—466 (чешск.; рез. русск., англ.)

На четырех примерах показано, что пространства, в которых замыкание множества может не быть замкнутым множеством, обладают некоторыми необычными свойствами. Все конструкции используют чеховское компактное расширение счетного дискретного пространства. Так, например, построено пространство, которое являет-

ся объединением локально конечной системы нигде не плотных множеств, но не является множеством первой категории в себе. Z. Frolik

6284. Об отделимости в топологических пространствах, вес в каждой точке которых больше мощности. Паровиченко И. И. Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1959, **39**, 185—187

В предыдущей работе (РЖМат, 1959, 6566) автор для любой мощности m строит T_3-пространство этой же мощности, вес которого в каждой точке больше мощности пространства. В этой статье автор доказывает, что для любой мощности m можно построить (наследственно нормальное по любым множествам) T_5 — пространство этой мощности, вес которого в каждой точке превосходит m. Далее доказывается следующая теорема: Пусть E — такое T_4-пространство, что в нем пересечение всякой системы открытых множеств, мощность которой $< \overline{\omega}_\alpha$, открыто в E. Пусть P, Q — произвольная пара множеств из E, представимых в виде соединения систем мощности $\leqslant \overline{\omega}_\alpha$ замкнутых множеств. Тогда, если $\overline{P} \setminus Q = \wedge$ и $P \setminus \overline{Q} = \wedge$, то P и Q отделимы открытыми множествами. Ю. С. Очан

6285. Пространства функций. Мрувка (On function spaces. Mrówka S.), Fundam. math., 1958, **45**, № 3, 273—282 (англ.)

Пространства предполагаются вполне регулярными. Базис k-топологии $k(Y^X)$ пространства функций Y^X состоит из всех множеств вида $W(C_1 \ldots C_k; U_1 \ldots U_k) = \{f \in Y^X;\ f(C_i) \in U_i,\ i = 1, \ldots, k\}$, где C_i — бикомпактное подмножество пространства X, U_i — открытое подмножество пространства Y. Пространство X $\mathfrak{m}$-псевдометризуемо, если существует семейство $P = \{\rho_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ ($\Xi = \mathfrak{m}$) псевдометрик пространства X таких, что $\overline{A} = \{x \in X : \rho_\xi(x, A) = 0$ для каждого $\xi \in \Xi\}$ для любого $A \subset X$. Пространство X $\mathfrak{m}$-семикомпактно, если является объединением $\mathfrak{m}$ бикомпактов. Пространство принадлежит классу (W_D), если всякая D-сеть его элементов бикомпактна, т. е. существует $n_0 \in D$, что $\{x_n\}_{n \geqslant n_0}$ имеет бикомпактное замыкание (где D — направленное множество; в случае, когда D — направленное по включению множество конечных подмножеств множества мощности $\leqslant \mathfrak{m}$, пишут $(W_{\mathfrak{m}})$). Верны следующие утверждения:

1. Если характер $\chi(X) \leqslant \mathfrak{m}$ и $X \in (W_{\mathfrak{m}})$, то X локально $\mathfrak{m}$-семикомпактно, а если к тому же X семикомпактно, то оно и локально бикомпактно.

2. Если Y имеет $\mathfrak{m}$-базис (т. е базис представляется в виде суммы $\leqslant \mathfrak{m}$ локально конечных систем) и X имеет базис мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ из бикомпактных множеств (т. е. для любого бикомпактного множества C пространства X существует такой бикомпакт C_0 из базиса, что $C \subset C_0$), то $\chi(Y^X) \leqslant \mathfrak{m}$; если Y $\mathfrak{m}$-псевдометризуемо, то и Y^X $\mathfrak{m}$-псевдометризуемо. Если $\chi(I^X) \leqslant \mathfrak{m}$ ($I = (0,1)$), то X имеет базис мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ из бикомпактных множеств.

3. Если $X \in (W_{\mathfrak{m}})$ и $\chi(X) \leqslant \mathfrak{m}$, то k-топология $k(Y^X)$ индуцируется непрерывно сходящимися $\mathfrak{m}$-сетями в Y^X при произвольном Y (сеть $\{f_n,\ n \in D\}$ $f_n \in Y^X$) непрерывно сходится к $f \in Y^X$, если для каждой сети $\{x_n,\ n \in D\}$ ($x_n \in X$), сходящейся к точке $x \in X$, сеть $\{f_n(x_n),\ n \in D\}$ сходится к $f(x)$). Если пространство X имеет базис мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ из бикомпактных множеств и k-топология в I^X индуцируется непрерывно сходящимися $\mathfrak{m}$-сетями, то $X \in (W_{\mathfrak{m}})$.

4. Если X, T, Y — топологические пространства и $\mathfrak{I}$ — топология в Y^X, то пишут $[X, Y, T, \mathfrak{I}]$, если для всякой функции $f: X \times T \to Y$ непрерывность f эквивалентна непрерывности функции $g \in (Y^X)^T$, где g определяется тождеством $[g(t)](x) = f(x, t)$. Если $\chi(X) \leqslant \mathfrak{m}$, $\chi(T) \leqslant \mathfrak{m}$, $X \in (W_{\mathfrak{m}})$, то $[X, Y, T, k(Y^X)]$ при произвольном Y. Если X имеет базис мощности $\leqslant \mathfrak{m}$ из бикомпактных множеств, $\chi(X) \leqslant \mathfrak{m}$ и $[X, I, T, k(Y^X)]$ для T таких, что $\chi(T) \leqslant \mathfrak{m}$, то $X \in (W_{\mathfrak{m}})$. Б. Т. Левшенко

6286. Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикомпактах. Архангельский А., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 2, 239—241

Автор доказывает следующее утверждение: Если бикомпакт (локально бикомпактное пространство) X есть сумма множества мощности $\leqslant \tau$ своих подпространств X_α, каждое из которых имеет вес $\leqslant \tau$, то и вес всего X не превосходит τ.

Для доказательства этого предложения автор вводит понятие сети пространства: совокупность γ произвольных множеств, лежащих в пространстве X, называется сетью X, если для любой точки $x \in X$ и любой окрестности O_x найдется множество $\Gamma \in \gamma$ такое, что $x \in \Gamma \subset O_x$. Доказывается, что из существования в бикомпакте сети мощности $\leqslant \tau$ следует существование базы мощности $\leqslant \tau$. Теорема обобщается на случай, когда X есть инициально-компактно (соответственно, локально инициально-компактно) вплоть до мощности τ. В. И. Пономарев

6287. О конечномерных равномерных пространствах. Исбелл (On finite-dimensional uniform spaces. Isbell J. R.), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 1, 107—121 (англ.)

Изучаются равномерные ретракты и равномерная размерность. Наиболее интересны результаты второй части:

1. „Малая" равномерная размерность δdP Ю. Смирнова (определенная с помощью конечных равномерных покрытий — см. РЖМат, 1957, 3874, 7738) или совпадает с „большой" равномерной размерностью ΔdP Исбелла (определенной при помощи любых равномерных покрытий), или же, при $\delta dP < \infty$, существует такое равномерное покрытие, в которое нельзя вписать ни одного конечномерного равномерного покрытия. Дан пример неметризуемого равномерного пространства малой размерности нуль, удовлетворяющего второму утверждению предыдущей теоремы. Отметим лемму: В равномерное покрытие можно вписать равномерное конечнократное покрытие тогда и только тогда, когда можно вписать равномерное покрытие, являющееся суммой конечного числа равномерно дискретных систем.

2. $\delta dP = \Delta dP$, если пространство „локально тонко" в том смысле, что всякое его равномерно локально равномерное покрытие просто равномерно (покрытие γ называется равномерно локально равномерным, если существует такое равномерное покрытие $\omega = \{U\}$, на каждом элементе U которого покрытие γ равномерно).

Равномерное пространство P называется равномерным (соответственно равномерным окрестностным) ретрактом, если для любого объемлющего равномерного пространства $\widetilde{P}$ само $\widetilde{P}$ (соответственно некоторая равномерная окрестность пространства P в $\widetilde{P}$) равномерно ретрагируется на P.

Результаты: Всякий равномерно окрестностный ретракт является полным пространством. Всякий конечно-

мерный равномерный полиэдр (РЖМат, 1959, 8926) является равномерно окрестностным ретрактом. Прямая ни в одной совместимой равномерной топологии не является равномерным ретрактом. Каждое равномерно локально бикомпактное и равномерно сжимаемое в точку пространство бикомпактно. Ю. М. Смирнов

6288. Пространства смежности и бикомпактные расширения топологических пространств. Иванова В. М., Иванов А. А., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 1, 20—22

Пространством смежности называется всякое T_1-пространство, в котором для каждой конечной системы замкнутых множеств известно, находятся ли данные множества в отношении смежности σ или нет. Отношение смежности подчинено ряду аксиом, аналогичных аксиомам пространства близости. Система замкнутых множеств называется системой σ-смежности, если любая ее конечная подсистема находится в отношении σ. Отношение смежности σ_1 следует за σ_2 ($\sigma_1 \geqslant \sigma_2$), если каждая система σ_1-смежности есть система σ_2-смежности. Отношение смежности σ в пространстве E согласовано с близостью, если два множества близки тогда и только тогда, когда они близки.

Авторами доказано, что среди отношений смежности, согласованных с данной близостью, имеется максимальное и минимальное (называемое главным) и дано непосредственное описание этих отношений. Установлено, что существует „естественное" взаимно однозначное соответствие между множеством всех правильных бикомпактных T_1-расширений пространства E и совокупностью отношений смежности на E. При этом всякое бикомпактное расширение σE есть определенным образом конструируемое расширение пространства смежности (E, σ), где отношение смежности σ соответствует данному σE. Дается также непосредственная характеристика главных бикомпактных расширений, соответствующих главным отношениям смежности. И. А. Шведов

6289. Некоторые условия, при которых однородный континуум является простой замкнутой линией. Берджесс (Some conditions under which a homogeneous continuum is a simple closed curve. Burgess C. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 613—615 (англ.)

Однородный континуум M (реф. 6290) называется n-близостно однородным, если для любой совокупности из n точек и n открытых множеств существует $g \in G$ (группа гомеоморфизмов), переводящий эти точки в точки открытых множеств. Если все гомеоморфизмы такого типа можно распространить на некоторое объемлющее пространство S, то M n-однородно вкладывается в пространство S. В этих терминах даются условия, чтобы M являлся простой замкнутой кривой. Для этого необходимо либо 1) невырожденный M близостно однороден и не является триодом, либо 2) разложимый компактный M 2-близостно однороден и не является триодом, либо 3) невырожденный ограниченный M однородно вкладывается в плоскость E. А. С. Пархоменко

6290. Из слабой n-однородности вытекает слабая n—1-однородность. Браун (Weak n-homogeneity implies weak $(n-1)$-homogeneity. Brown Morton), Proc. Amer. Math Soc., 1959, **10**, № 4, 644—647 (англ.)

Топологическое пространство слабо n-однородно, если оно обладает слабо n-транзитивной группой гомеоморфизмов. Группа преобразований G множества $\widetilde{S}$ называется слабо n-транзитивной на $S \subset \widetilde{S}$, если для каждых двух множеств X_1 и $X_2 \subset S$, содержащих по n точек, найдется элемент $g \in G$ такой, что $g(X_1) = X_2$. Доказывается, что если S содержит k точек, G слабо n-транзитивна на S и n и C_k^{n-1} взаимно просты, то G слабо n—1-транзитивна на S. Отсюда выводится, что для бесконечного S всегда из слабой n-транзитивности вытекает слабая n — 1-транзитивность. А. В. Чернавский

6291. Непрерывные гомоморфные образы действительных кланов с нулем. Коэн, Крул (Continuous homomorphic images of real clans with zero. Cohen Haskell, Krule I. S.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 1, 106—109 (англ.)

Кланом называется компактная связная топологическая полугруппа с единицей. Действительный клан — это клан, топологическое пространство которого есть замкнутый отрезок с обычной топологией действительных чисел. Авторы показывают, что гомоморфный образ действительного клана, имеющего нуль, либо опять такой же клан, либо „триода", т. е. клан, тело которого гомеоморфно букве T.

Изложен пример. Пусть $s = [-1, 1]$ с обычными топологией и умножением — это первый клан. Второй клан T — это пара отрезков $[-1; 1/2]$ и $[0; 1]$, топология на котором определена отображением

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \text{ или } x < -1/2, \\ -x, & \text{если } -1/2 \leqslant x < 0. \end{cases}$$

Композиция $\circ$ в T определяется по следующей формуле (ab — обычное умножение)

$$a \circ b = \begin{cases} ab, & \text{если } 0 \leqslant ab \text{ или } ab < -1/2, \\ -ab, & \text{если } -1/2 \leqslant ab < 0. \end{cases}$$

Отображение h — очевидно непрерывный гомоморфизм действительного клана с нулем на клан с нулем, являющийся триодой. С. С. Рышков

6292. О разбиении трехмерного евклидова пространства при отображении в него цилиндрической поверхности. Йонеда, Сугаку, 1954, **6**, № 3, 168—171 (японск.)

Возьмем часть трехмерного пространства, заключенную между двумя параллельными плоскостями, и в ней круговой цилиндр, перпендикулярный этим плоскостям. Рассматриваются отображения этого топологического пространства в себя такие, что в сечении произвольной параллельной плоскостью отображение окружности сечения является непрерывным отображением в эту плоскость сечения. Решается задача о разбиении этого пространства при таком отображении, возникающая в дифференциальных уравнениях.

6293. Об отображениях произведения топологического пространства на евклидово в евклидово пространство. Роднянский А. М., Матем. сб., 1958, **46**, № 1, 27—60

Пусть G — открытое множество в топологическом произведении пространства X на q-мерное евклидово пространство E^q, G_x — множество всех точек из G с фиксированной первой координатой $x \in X$; G_x называется сечением. Рассматриваются непрерывные отображения G в E^q, дифференцируемые по $y \in E^q$ в каждом сечении. Основным аппаратом исследования является изучение поведения степени отображения на близких сечениях. Приведен ряд теорем, доказанных ранее Л. Д. Кудрявцевым для случая дифференцируемых отображений открытого множества пространства E^{p+q} в E^q, и получен ряд новых результатов. Среди приведенных теорем отметим теоремы о локальном постоянстве степени отображения относительно всех сечений и о свойстве Дарбу якобиана. Р. Л. Фрум-Кетков

6294. Замечания о неизометричных отображениях. Нитка (Bemerkungen über nichtisometrische Abbildungen. Nitka W.), Colloq. math., 1957, **5**, № 1, 28—31 (нем.)

Фрёйденталем и Гуревичем было замечено (Freudenthal H., Hurewicz W., Fundam. Math., 1936, 26), что ес-

ли отображение f вполне ограниченного пространства X на себя увеличивает расстояние между какими-нибудь двумя точками, то найдется и такая пара точек, расстояние между которыми f уменьшает. Автор дает количественную оценку этой компенсации. Пусть n_ε — наименьшее число точек, составляющих ε-сеть вполне ограниченного пространства X, и пусть $n_\varepsilon > 1$, тогда, если $\overline{f(X)} = X$ и для некоторой пары точек a, b этого пространства $\rho(a, b) = \rho(f(a), f(b)) \pm \varepsilon$, то существует пара $a', b' \in X$ такая, что соответственно:

$$\rho(a', b') < \rho(f(a'), f(b')) - \varepsilon/n_\varepsilon\,(n_\varepsilon - 1)\,.$$

Если $n_\varepsilon = 1$, то последняя дробь должна быть заменена на $\varepsilon/2$. Отображение f может быть и многозначным, тогда $f(x)$ обозначает какой-нибудь один из образов точки x. В. А. Ефремович

6295. Об *ANR* для метрических пространств. Кодама (On *ANR* for metric spaces. Kodama Yukihiro), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1955, **A5**, 30 Nov., 96—98 (англ.)

Для пространства X типа, указанного в заглавии, существует счетный обратный спектр $\Phi = \{N_i, \pi_i^{i+1}\}$ симплициальных комплексов таких, что:

$$H_p(X) \approx \operatorname{Inv\,lim} H_p(N_i)\,,\quad p = 0, 1, 2 \ldots,$$
$$H^p(X) \approx \operatorname{Dir\,lim} H^p(N_i)\,,\quad p = 0, 1, 2 \ldots,$$
$$\pi_p(X) \approx \operatorname{Inv\,lim} \pi_p(N_i)\,,\quad p = 1, 2, \ldots,$$
$$\pi^p(X) \approx \operatorname{Dir\,lim} \pi^p(N_i),\ \dim(X) < p - 1\,.$$

(Inv и Dir обозначают обратный и прямой предел). Более того, если X локально бикомпактно, то существует замкнутое отображение $\operatorname{Inv\,lim} N_i$ на X_i, а следовательно, любые две теории гомологий на *ANR* для метрических пространств, удовлетворяющих аксиомам 1—7 Стинрода—Эйленберга, совпадают. И. А. Шведов

6296. О замкнутых отображениях в классе пространств *ANR*. Кодама (On a closed mapping between *ANR*'s. Kodama Y.), Fundam. math., 1958, **45**, № 3, 217—227 (англ.)

Пусть X — абсолютный окрестностный ретракт относительно метрических пространств, пусть также Y — n-мерный окрестностный ретракт относительно метрических пространств; x_0 и y_0 — точки пространств X и Y соответственно. f — замкнутое непрерывное отображение пары (X, x_0) в пару (Y, y_0), причем такое, что прообраз $f^{-1}(y)$ каждой точки y пространства Y есть связный абсолютный окрестностный ретракт (относительно метрических пространств), асферичный в размерности s (т. е. C^s-пространство), где $s \geqslant n - 1$. Тогда существует такое непрерывное отображение g пары (Y, y_0) в (X, x_0), что: 1) $fg \simeq 1 : (Y, y_0) \to (Y, y_0)$; (т. е. отображение fg гомотопно тождественному), 2) для каждого числа $i = 0, 1, 2, \ldots$, индуцированный гомоморфизм $g_*: \pi_i(Y, y_0) \to \pi_i(X, x_0)$ есть изоморфизм на, а индуцированный гомоморфизм $g_* f_* : \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_0)$ есть тождественный гомоморфизм. Если же X и Y — конечномерные абсолютные окрестностные ретракты относительно метрических пространств, а f — такое замкнутое отображение пространства X на Y, что $f(x_0) = y_0$ и прообразы всех точек пространства Y суть абсолютные ретракты относительно метрических пространств. Тогда f имеет гомотопически обратное „отображение g, т. е. существует такое непрерывное отображение $g : Y \to X$, что

$$g(y_0) = x_0\,,$$

$$gf \simeq 1 : (X, x_0) \to (X, x_0) \quad \text{и} \quad fg \simeq 1 : (Y, y_0) \to (Y, y_0)\,.$$

В первом случае гомотопические, гомологические, когомотопические, когомологические группы пространства X содержат соответствующие группы пространства Y в качестве прямого сомножителя (для каждой размерности), а для $i \leqslant S$ гомоморфизм, индуцированный отображением f, является изоморфизмом. Во втором случае гомотопические, гомологические, когомотопические и когомологические группы пространства X изоморфны соответствующим группам пространства Y во всех размерностях.

В конце работы замечается, что условие „f — замкнутое отображение“ отброшено быть не может, условие „X есть абсолютный окрестностный ретракт“ не может быть заменено условием“ X — компактное метрическое пространство“, но условие „Y есть n-мерный абсолютный окрестностный ретракт“ может быть заменено условием „Y — локально связное в размерности n метрическое n-мерное пространство“. С. С. Рышков

6297. Абсолютные окрестностные ретракты и локальная связность в произвольных метрических пространствах. Дугунджи (Absolute neighborhood retracts and local connectedness in arbitrary metric spaces. Dugundji J.), Compositio math., (1958), **13**, № 3, 229—246 (англ.)

Для любых метрических пространств исследуются связи между понятиями локальной связности и связности (в размерностях $\leqslant n$ или в любой размерности), абсолютного ретракта, абсолютного окрестностного ретракта, стягиваемости, локальной стягиваемости и т.п.

Переход от известного случая метрических пространств со счетной базой (Kuratowski C., Topologie, II, Warszawa, 1952, Chap. VII) к случаю любых метрических пространств заставляет автора в ряде случаев отказаться от способа доказательства с помощью включения в евклидово или гильбертово пространства; кроме того, он находит целесообразным пользоваться понятием размерности, основанным на покрытиях. Особенно подробно изучаются пространства, локально связные в размерностях $\leqslant n$ и абсолютные окрестностные ретракты в классе метрических пространств, для каждого из которых дается большое число различных характеристик.

В частности, доказываются следующие включения и эквивалентности: если метрическое пространство X есть абсолютный окрестностный ретракт в классе метрических пространств (абсолютный ретракт в классе метрических пространств), то оно является локально стягиваемым (локально стягиваемым и стягиваемым) и поэтому локально связным в любой размерности (локально связным и связным в любых размерностях); для конечномерных пространств эти включения превращаются в эквивалентности, причем эквивалентным с ними является также свойство быть локально связным в размерностях $\leqslant n$ для некоторого $n \geqslant \dim X$ (связным и локально связным в размерностях $\leqslant n$ для некоторого $n \geqslant \dim X$). Для любого метрического пространства эквивалентны также свойства быть в классе метрических пространств абсолютным ретрактом, быть стягиваемым абсолютным окрестностным ретрактом и быть связным во всех размерностях абсолютным окрестностным ретрактом.

Г. С. Чогошвили

6298. Эквивалентность сингулярной и чеховской теории гомологий для абсолютных окрестностных ретрактов. Приложение к уникогерентности. Мардешич (Equivalence of singular and Čech homology for *ANR-s* application to unicoherence. Mardešić S.), Fundam. math., 1958, **46**, № 1, 29—45 (англ.)

Показывается, что для абсолютных окрестностных ретрактов (*ANR*) группы сингулярных гомологий (когомологий) совпадают с группами чеховских гомологий (когомологий), основанными на произвольных открытых покрытиях (группа коэффициентов предполагается дискретной). Этот результат был получен также Дугунджи (реф. 6297) и Кодама (реф. 6296).

Доказывается, что нормальное, паракомпактное, связное и локально связное пространство уникогерентно

тогда и только тогда, когда его одномерная целочисленная чеховская группа когомологий тривиальна (ранее это утверждение было известно в менее общих предположениях). Комбинируя это утверждение с теоремой о совпадении сингулярных и чеховских групп когомологий для ANR, автор исследует уникогерентность пространства отображений k-мерного компакта в сферу размерности $> k$. А. С. Шварц

6299. Кольца гомологий незамкнутых множеств. Антоновский М. Я., ЎзССР Фанлар Акад. докладлари, Докл. АН ЎзССР, 1959, № 7, 3—5 (рез. узб.)

6300. Кольца гомологий незамкнутых множеств. Антоновский М. Я., ЎзССР Фанлар Акад. ахбороти, Изв. АН ЎзССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, № 4, 47—54 (рез. узб.)

Для произвольного множества A, лежащего на сфере S^n, определены группы $\nabla^p A$, $\nabla^p_{\text{вн}} A$, $\Delta^{n-p}_{\text{вн}} A$, ∇^{n-p-1} $(S^n \setminus A)$ и доказана их изоморфность (РЖМат, 1954, 476). Произведение Колмогорова — Александера превращает предельную группу прямого спектра $\nabla^p A$ в кольцо. Автор переносит пересечение Гордона (Gordon I., Ann. Math, 1936, 37, № 3), определенное для полиэдральных циклов открытых подмножеств сферы, на сильные циклы в смысле Ситникова произвольного подмножества и строит в $S^n \setminus A$ кольцо гомологий Гордона. Изоморфизм $\Gamma : \Delta^p_{\text{вн}} A \to \Delta^{n-1}(S \setminus A)$ осуществляет теперь изоморфизм кольца Гордона множества $S \setminus A$ и кольца, в которое превращает пересечение Лефшеца прямую сумму $\sum_p \Delta^p_{\text{вн}} A$. А. А. Мальцев

6301. Теория гомологий в категории взвешенных многозначных отображений. Дарбо (Teoria dell'omologia in una categoria di mappe plurivalenti ponderate. Darbo Gabriele), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1958, 28, № 1, 188—220 (итал.)

Пусть X и Y — два хаусдорфовых пространства, а Λ — коммутативное кольцо с единицей. Взвешенным отображением X в Y называется отображение f каждой точки пространства X в линейную комбинацию конечного числа точек пространства Y с коэффициентами из Λ, для которого существует такое многозначное отображение $t : X \to Y$, называемое носителем взвешенного отображения f, что: 1) множество $t(x)$ конечно для каждого x; 2) отображение t полунепрерывно сверху; т. е. для каждой точки $x_0 \in X$ и каждого открытого множества $A \supset t(x_0)$ существует окрестность W точки x_0, для которой $t(x) \subset A$ при $x \in W$; 3) для каждого x имеем $f(x) = \sum_i \lambda_i y_i$, $y_i \in t(x)$, $\lambda_i \in \Lambda$; 4) для каждого открытого множества $B \subset Y$ и каждой точки $x_0 \in X$, для которой $t(x_0)$ не пересекается с границей B, сумма тех коэффициентов λ_i линейной комбинации $f(x) = \sum_i \lambda_i y_i$, для которых $y_i \in B$ не меняется при изменении x в некоторой достаточно малой окрестности точки x_0. Оказывается, что для каждого взвешенного отображения f существует минимальный носитель $t_f(x) = \bigcap_t t(x)$, $x \in X$ (t — всевозможные носители f). Обычные отображения могут рассматриваться как частный случай взвешенных и будут называться однозначными отображениями.

Рассматривается категория всех хаусдорфовых пространств и их взвешенных отображений, в которую естественно вводится аддитивная структура, состоящая в сложении отображений и их умножении на элементы кольца Λ, билинейная относительно произведения (т. е. суперпозиции) отображений, так что множество взвешенных отображений X в Y становится Λ-модулем, который обозначается $\mathrm{Map}(X, Y)$ (или $\mathrm{Map}_\Lambda(X, Y)$) и который можно рассматривать как функтор, ковариантный относительно Y и контравариантный относительно X. Топологическое произведение $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ двух отображений $f : X \to X'$ и $g : Y \to Y'$ тоже можно рассматривать как функтор, но уже ковариантный относительно обеих переменных. Два взвешенных отображения f_0 и f_1 пространства X в пространство Y называются σ-гомотопными, если существует взвешенное отображение $h : X \times I \to Y$ (I есть отрезок $[0, 1]$), называемое σ-гомотопией, связывающее f_0 и f_1 так же, как в определении обычной гомотопии; однако даже для однозначных отображений f_0 и f_1 это понятие шире понятия обычной гомотопности отображений.

Пусть Δ_q — q-мерный симплекс. Определяется однозначное отображение $d^i_q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$, являющееся вложением в качестве i-й грани, т. е. переводящее точку с барицентрическими координатами $t_0, \ldots, t_{q-1}$ в точку с барицентрическими координатами $t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{q-1}$, а затем строится взвешенное отображение $d_q = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i d^i_q$. Полученная последовательность $\Delta_0 \xrightarrow{d_1} \Delta_1 \xrightarrow{d_2} \Delta_2 \xrightarrow{d_3} \ldots$ называется фундаментальной последовательностью. Для нее будет $d_q d_{q-1} = 0$. Всякое взвешенное отображение $c : \Delta_q \to X$ называется q-цепью в X. Λ-модуль всех q-цепей в X есть $C_q(X) = \mathrm{Map}(\Delta_q, X)$. Отображение $d_q : \Delta_{q-1} \to \Delta_q$ естественно порождает гомоморфное отображение $\partial^X_q : C_q(X) \to C_{q-1}(X)$. Имеем $\partial^X_{q-1} \partial^X_q = 0$. Λ-комплекс $C(X) = \{C_q(X), \partial^X_q\}$ называется каноническим комплексом пространства X. Всякое взвешенное отображение $f : X \to Y$ порождает гомоморфизм $C_q(f) : C_q(X) \to C_q(Y)$. При этом гомомо физму вложения $i : A \to X$ отвечает мономорфизм $C_q(i)$, что позволяет считать $C(A)$ подкомплексом $C(X)$. Модули гомологий канонического комплекса пространства X называют я модулями гомологий $H_q(X)$ самого пространства X. Аналогично определяются модули гомологий $H_q(X, A)$ пары (X, A) $(A \subset X)$, за которые принимаются модули гомологий факторкомплекса $C(X)/C(A)$. Тогда каждой паре (X, A) будет отвечать гомологическая последовательность

$$\ldots \to H_q(A) \xrightarrow[i_*]{} H_q(X) \xrightarrow[j_*]{} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial} H_{q-1}(A) \to \ldots$$

Для так построенной теории гомологий в категории пар хаусдорфовых пространств и их взвешенных отображений справедливы следующие предложения, обобщающие аксиомы Эйленберга — Стинрода, где через f_* обозначено гомоморфное отображение групп гомологий, отвечающее взвешенному отображению пар $f : (X, A) \to (Y, B)$ (аналогично для g_* и i_* и т. п.): 0) $(\lambda f + \mu g)_* = \lambda f_* + \mu g_*$; 1) если i есть тождественное отображение, то i_* — тождественный изоморфизм; 2) $(gf)_* = g_* f_*$; 3) $\partial f_* = f''_* \partial$; где f'' есть отображение A в B при отображении $f : (X, A) \to (Y, B)$; 4) гомологическая последовательность всякой пары (X, A) точна; 5) если отображения f и g σ-гомотопны, то $f_* = g_*$; 6) если $\overline{U}$ содержится во внутренности множества A (относительно пространства X), а i есть отображение пар $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$, то i_* есть изоморфизм; 7) для одноточечного пространства P_0 будет $H_0(P_0) \approx \Lambda$, $H_q(P_0) = 0$ $(q \neq 0)$. Предложения 0) — 4) являются предложениями гомологической алгебры, а 7) непосредственно проверяется. Для доказательства инвариантности σ-гомотопий и теоремы вырезания (предложения 6) и 7) производятся (соответственным образом формализованные) разбиение призмы на симплексы в первом слу-

чае и построение последовательности все более мелких барицентрических подразделений симплекса во втором. Для подкатегории, состоящей из пар хаусдорфовых пространств и их однозначных отображений, эти предложения показывают справедливость аксиом Эйленберга — Стинрода для построенной теории гомологий, причем, как нетрудно видеть, существует естественный гомоморфизм этой теории в сингулярную теорию гомологий (с коэффициентами из Λ). В силу теоремы единственности Эйленберга — Стинрода для триангулируемых пар и их однозначных отображений обе теории будут совпадать. Опечатка: На стр. 190, строка 10 снизу, слово „пересечение" следует заменить словом „объединение". М. Ф. Бокштейн

6302. Понятие степени и коэффициента зацепления для взвешенных отображений. Даль-Сольо (Sulla nozione di grado e di coefficiente di allacciamento per mappe ponderate. Dal Soglio Letizia), Rend. Semin. mat. Univ. Padova, 1958, 28, № 2, 280—289 (итал.)

Некоторые понятия и результаты, касающиеся непрерывных отображений пространств, переносятся на случай взвешенных отображений (реф. 6301).

Пусть $f(x) = \sum \lambda_i y_i$, $\lambda_i \in \Lambda$, $y_i \in Y$ есть взвешенное отображение хаусдорфова пространства X в хаусдорфово пространство Y, а t_f — его наименьший носитель (кольцо Λ предполагается фиксированным). Сумма коэффициента λ_i такого взвешенного отображения есть локально постоянная функция от x, а потому постоянна в случае связности пространства X. Она будет называться индексом отображения f и обозначаться $\mathrm{In}(f)$. Дается следующее обобщение теоремы Брауэра о неподвижной точке: Если t — носитель взвешенного отображения f n-мерного элемента E^n в себя, для которого $\mathrm{In}(f) \neq 0$, то существует точка $x_0 \in E^n$, для которой $x_0 \in t(x_0)$. Взвешенное отображение $f: X \to Y$ называется локально постоянным, если $f = \psi\varphi$, где $\varphi: X \to P_0$, $\psi: P_0 \to Y$, P_0 — одноточечное пространство. Взвешенное отображение, σ-гомотопное локально конечному, называется несущественным. В противном случае говорят, что отображение существенно. Легко видеть, что для всякого взвешенного отображения f сферы S^{n-1} в себя существует вполне определенный элемент $\varkappa \in \Lambda$ такой, что $f_* u = \varkappa u$ для любого $u \in H_{n-1}(S^{n-1})$, где f_* — порожденный отображением f гомоморфизм классов гомологий. Такой элемент $\varkappa$ называется степенью отображения f и обозначается $\mathrm{grad}(f)$. Доказывается, что взвешенное отображение f сферы S^{n-1} в себя, имеющее отличную от нуля степень, существенно, вследствие чего его минимальный носитель t_f отображает сферу S^{n-1} на всю эту сферу. Два взвешенных отображения (f, g) образуют по определению непересекающуюся пару, если для их минимальных носителей t_f, t_g множество $t_f(x) \cap t_g(x)$ пусто при любом $x \in X$. Две таких пары (f_0, g_0) и (f_1, g_1) называются σ-гомотопными, если существуют две σ-гомотопии — h, связывающая f_0 с f_1, и k, связывающая g_0 с g_1, образующие сами непересекающуюся пару $(h, k): X \times I \to Y$. Если (f, g) — непересекающаяся пара взвешенных отображений сферы S^{n-1} в n-мерное евклидово векторное пространство R^n $(n > 1)$, $f(x) = \sum \lambda_i y_i$, $g(x) = \sum \mu_j z_j$ (мы предполагаем при этом, что S^{n-1} есть единичная сфера в R^n с центром в нулевой точке), то определяется коэффициент зацепления $\omega(f, g) \in \Lambda$ этой пары отображений посредством формулы $\omega(f, g) = \mathrm{grad}(\Phi_{f,g})$, где $\Phi_{f,g}$ есть взвешенное отображение сферы S^{n-1} в себя: $\Phi_{f,g} = \sum \lambda_i \mu_j (y_i - z_j) : \| y_i - z_j \|$ (здесь через $\| y_i - z_j \|$ мы обозначаем модуль вектора $y_i - z_j$). Доказывается, что σ-гомотопные пары имеют одинаковые коэффициенты зацепления. Коэффициент зацепления оказывается билинейным относительно обоих отображений пары, а при перестановке f и g он умножается на $(-1)^n$. Доказывается теорема: Если φ и ψ — два взвешенных отображения элемента E^n в R^n, определяющих на ограничивающей этот элемент сфере S^{n-1} непересекающуюся пару отображений $(\varphi \mid S^{n-1}, \psi \mid S^{n-1})$, и если $\omega(\varphi \mid S^{n-1}, \psi \mid S^{n-1}) \neq 0$, то существует точка $x_0 \in E^n$, для которой множества $t_\varphi(x_0)$ и $t_\psi(x_0)$ не пересекаются. Наконец, доказывается следующее предложение. Пусть $A \subset R^n$ — n-мерная клетка, являющаяся гомеоморфным образом $\rho(E^n)$ элемента E^n. Если f — какое-либо взвешенное отображение клетки A в R^n, а j — отображение вложения A в R^n, причем соответствующие отображения на границе $\dot{A}$ клетки A образуют непересекающуюся пару $(f \mid \dot{A}, j \mid \dot{A})$ и если $t_f(x) \subset \dot{A}$ при $x \in \dot{A}$, то $\omega(f\rho i_n, j\rho i_n) = \pm \mathrm{In}(f)$, где i_n — отображение вложения границы E^n в E^n; поэтому, если, кроме того, $\mathrm{In}(f) \neq 0$, то в силу предыдущей теоремы существует неподвижная точка, т. е. такая точка $y_0 \in A$, что $y_0 \in t_f(y_0)$.

М. Ф. Бокштейн

6303. О когомологиях алгебры Стинрода. Новиков С. П., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 5, 893—895

Определив в алгебре когомологий H алгебры Стинрода некоторые „когомологические операции", формально аналогичные известным операциям Стинрода, автор уточняет известные результаты Адамса о строении алгебры H. Отсюда, пользуясь установленной Адамсом связью между алгеброй H и стационарными гомотопическими группами сфер, автор выводит существование сколь угодно „длинных" нетривиальных композиций отображений сфер, понижающих размерности. Кроме того, он воспроизводит результаты Тода (РЖМат, 1960, 1498) о строении 2-компонент стационарных групп $\pi_{n+q}(S^n)$ при $q \leqslant 14$.

М. М. Постников

6304. О гомотопической классификации продолжений фиксированного отображения. Баркус, Барратт (On the homotopy classification of the extensions of a fixed map. Barcus W. D., Barratt M. G.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 1, 57—74 (англ.)

Пусть K — произвольное клеточное разбиение и $L = K \cup e^{q+1}$ — его расширение при помощи одной $(q+1)$-мерной клетки e^{q+1}, подклеенной к K своей границей S согласно некоторому отображению $g: S \to K$, принадлежащему классу $\alpha \in \pi_q(K, k_0)$. В заметке решается задача гомотопической классификации таких отображений $u: (L, k_0) \to (X, x_0)$ относительно базисной точки k_0, что $u \mid K$ есть заданное отображение $u: (K, k_0) \to (X, x_0)$. Именно, авторы строят некоторый гомоморфизм

$$\alpha_u: \pi_1(X^K, u) \to \pi_{q+1}(X, x_0),$$

где X^K — пространство отображений $(K, k_0) \to (X, x_0)$, снабженное компактно-открытой топологией, и доказывают, что гомотопические классы описанного вида находятся во взаимнооднозначном соответствии с элементами коядра гомоморфизма α_u.

Авторы применяют эту теорему к ряду задач, в частности к вопросу о вычислении произведения Уайтхеда вида $[\alpha \circ \gamma, \beta]$, где $\alpha \in \pi_m(X)$, $\beta \in \pi_n(X)$, $\gamma \in \pi_q(S^m)$. Гомоморфизм α_u определяется следующим образом. Пусть v — произвольное отображение $(S, s_0) \to (X, x_0)$, где S есть q-мерная сфера. Определим тогда отображение: $vb: (S \times I, s_0 \times I) \to (X, x_0)$, где $I = [0, 1]$, положив $vb(s, t) = v(s)$. Любое отображение F класса $\{F\} \in \pi_1(X^S, v)$ определяет некоторое отображение

$$F^b : (S \times I,\ s_0 \times I) \to (X,\ x_0).$$

Положим $v\{F\} = d(F^b,\ vp)$, где $d(F^b,\ v^b)$ — значение различающей на клетке $e^q \times e^1$, $e^q = S^r/s_0$, $e^1 = I - \dot{I}$. Далее, отображение $g : (S,\ s_0) \to (K,\ k_0)$ порождает естественное отображение $g^* : \pi_1(X^K,\ u) \to \pi_1(X^S,\ ug)$, зависящее только от гомотопического класса α отображения g. Гомоморфизм α_u определится теперь формулой $\alpha_u = (ug)\,g^*$. А. М. Виноградов

6305. О некоторых инвариантах шаровых расслоений. У Вэнь-цзюнь (On certain invariants of cell-bundles. Wu Wen-tsün), Sci. Rec., 1959, **3**, № 4, 137—142 (англ.)

Пусть $(E,\ \varphi,\ B)$ — локально тривиальное расслоение со слоем R^n (на структурную группу не наложено никаких ограничений). Определяется система инвариантов $Q_p^i \in H^i(B,\ Z_p)$ (p — простое) (в случае, когда $p = 2$, более общие инварианты определены Карвалью, реф. 6306). Если структурная группа рассматриваемого расслоения есть ортогональная группа, то $Q_2^i = W^i$, а если $p > 2$, то $Q_p^{4k} = R_p^{4k}$, где W^i — характеристические классы Штиффеля — Уитни,

$$R_p^{4k} = (-1)^k \sum_{k_1+\ldots+k_q=k} 1^{n-2k_1} \cdot 2^{n-2k_2} \cdot \ldots$$

$$\ldots q^{n-2k_q} \cdot p_p^{4k_1} \cup p_p^{4k_2} \cup \ldots \cup p_p^{4k_q},$$

p_p^{4k} — приведенные по модулю p классы Понтрягина.

Пусть V — окрестность диагонали в декартовом квадрате $M \times M$ многообразия M, $f : V \to M$ — ограничение на V проекции $M \times M$ на первый сомножитель. Если f есть локально тривиальное расслоение со слоем R^n, то V называется ячеечной окрестностью диагонали. Если каждая окрестность диагонали содержит ячеечную, то M называется ячеечным многообразием. Классы $Q_p^i \in H^i(M,\ Z_p)$ расслоения f в этом случае не зависят от выбора V и являются топологическими инвариантами M. Если M есть дифференцируемое многообразие, D — некоторое его дифференцируемое строение, то определена ячеечная окрестность V такая, что соответствующее расслоение f эквивалентно тангенциальному косому произведению над M по отношению к D. Отсюда следует, что характеристические классы структуры D, $R_p^{4k}(D)$, суть топологические инварианты многообразия M.

Последний параграф работы посвящен вопросу о вложимости n-мерного многообразия M^n в евклидово пространство R^N. Строится система инвариантов $Q_p^{i,\ j}$ таких, что если M^n вложимо в R^N, то $Q_p^{i,\ j} = 0$ для $j \geqslant (N-n)(p-1)$. Автор отмечает, что $Q_2^{i,\ j} = \overline{W}^{i+j}$, где $\overline{W}^k$ означает нормальный класс Уитни, т. е. при $p = 2$ полученное им необходимое условие для вложимости эквивалентно известному условию Уитни.

Д. Б. Фукс

6306. Классы Смита, ассоциированные с расслоенным пространством. Карвалью (Classes de Smith associées à un espace fibré. Classes caractéristiques. Carvalho Carlos A. A. de), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 22, 1947—1950 (франц.)

В работе определяются три системы характеристических классов расслоений со слоем сферой. Вторая из них вводится следующим образом. Пусть p — простое число, большее двух, $(E,\ \varphi,\ B)$ — расслоение в смысле Серра со слоем S^{2n-1} и структурной группой $U(n)$. На сфере естественным образом действует группа Z_p. Отождествив во всех слоях точки, эквивалентные относительно этой группы, получаем расслоенное пространство $(E',\ \varphi',\ B)$, слой которого L_p^{2n-1} — линзовое пространство. Пусть $x \in H^2(L_p^{2n-1},\ Z_p)$ — образующий элемент, $x^k = x \cup x \cup \ldots \cup x$. Тогда уравнение $\sum_{i+k=n} \varphi'^* X_p^{2i} \cup X^k = 0$ определяет в когомологиях базы характеристические классы $X_p^{2i} \in H^{2i}(B,\ Z_p)$. Утверждается, что они совпадают с приведенными по mod p классами Чжэнь Шэнь-Шеня. (Черна).

Первая и третья системы характеристических классов вводятся при помощи следующей конструкции. Пусть расслоение $(E,\ \varphi,\ B)$ имеет линейно связный слой F со счетной базой и базу B. Естественным образом строится расслоение $(\widetilde{E},\ \widetilde{\varphi}',\ B)$ с той же базой и слоем $F^p \setminus \widetilde{F}$, где F^p — p-я декартова степень F и $\widetilde{F}$ — образ F при диагональном вложении. Как на самом пространстве $\widetilde{E}'$, так и на слое расслоения $\widetilde{\varphi}'$ действует группа Z_p, поэтому в когомологиях соответствующих факторпространств E' и F' определены классы Смита

$$^E_F Sm_p^k \in H^k(E',\ Z_p) \text{ и } {}^F Sm_p^k \in H^k(F',\ Z_p)$$

(реф. 6307). Через φ' обозначим факторизованное отображение $E' \to F'$, через $^E_F I_p$ (соответственно через $^F I_p$) — минимум тех k, для которых $^E_F Sm_p^k = 0$ (соответственно $^F Sm_p^k = 0$).

Пусть $p = 2$ и выполняются следующие условия: а) $^F I_2 = N_2$ конечно, в) $H^*(F',\ Z_2)$ образуемо классами $^F Sm_p^k$. Тогда формула

$$\sum_{j+k=N_2} (\varphi')^*\, X_2^j \cup {}^E_F Sm_2^k = 0$$

определяет систему характеристических классов $X_2^j \in H^j(B,\ Z_2)$. Утверждается, что в случае, когда слой исходного расслоения есть S^{n-1}, структурная группа $O(n)$, то эти классы совпадают с классами Штиффеля — Уитни.

Пусть p — простое нечетное, $^F I_p = 2N(p-1)$, $H^*(F',\ Z_p)$ образуемо классами Смита и $\pi(B)$ тривиально действует на $H^*(F',\ Z_p)$. Тогда формула

$$\sum_{j+k=N} (\varphi'^*)\, X^{2j(p-1)} \cup {}^E_F Sm_p^{2k(p-1)} = 0$$

определяет систему характеристических классов $X_p^{2r(p-1)}$. Рассматривается случай со слоем R^{2n}, паракомпактной базой и структурной группой $SO(2n)$. Обозначим через A' комплекс Тома, через $\varnothing : H^q(B,\ Z_p) \to H^{q+2n}(B',\ Z_p)$ — изоморфизм Тома. Доказывается, что $P_p^j \varnothing(1) = \varnothing X_p^{2j(p-1)}$, т. е. $X_p^{2j(p-1)}$ в этом случае совпадают с характеристическими классами У (Wu Wen-tsun, Colloq. de Strasbourg, 1951). Существование и единственность характеристических классов во всех случаях следует из теоремы Лере — Хирша.

Д. Б. Фукс

6307. Классы Смита и существование секущей поверхности. Карвалью (Classes de Smith. Existence des sections. Carvalho Carlos A. A. de), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 23, 2081—2083 (франц.)

В терминах классов Смита для некоторой вспомогательной конструкции сформулировано и доказано необходимое условие для того, чтобы данное локально тривиальное расслоение имело секущую поверхность. Это условие непосредственно следует из определения секущей поверхности.

Д. Б. Фукс

6308. Векторные косые произведения над эллиптической кривой. Атия (Vector bundles over an elliptic

curve. Atiyah M. F.), Proc. London Math. Soc., 1957, 7, № 27, 414—452 (англ.)

Пусть X — алгебраическая кривая, определенная над алгебраически замкнутым полем k, $E(X)$ — множество всех векторных косых произведений (или, что то же, локально свободных пучков) над X. В $E(X)$ имеется две операции: прямая сумма $\oplus$ и тензорное произведение $\otimes$. Относительно операции $\oplus$ $E(X)$ есть свободная полугруппа, а потому может быть вложена в свободную группу $\hat{E}(X)$, образующими которой являются неразложимые векторные косые произведения. Операция $\otimes$ распространяется на группу $\hat{E}(X)$, которая становится коммутативным кольцом с единицей (тривиальным одномерным пучком). Работа посвящена описанию строения этого кольца в случае, когда X есть эллиптическая кривая. Получены некоторые результаты, относящиеся к произведениям над кривой произвольного рода g. Размерностью произведения называется размерность его слоя. Степенью произведения E называется степень дивизора, соответствующего одномерному косому произведению $\det E$. $E(r, d)$ обозначает множество неразложимых косых произведений степени d и размерности r. Доказывается, что существует число $N(g, r, d)$ такое, что для всякого пучка $E \in E(r, d)$ пучок $E(n)$ удовлетворяет условиям теорем A и B А. Картана (РЖМат, 1 57, 84 0); здесь g — род рассматриваемой кривой. Далее описывается аддитивная структура $\hat{E}(X)$ для эллиптической кривой над полем произвольной характеристики. Для каждого $r \geqslant 1$ существует единственное косое произведение $F_r \in E(r, 0)$ такое, что группа сечений $\Gamma(F_r) \neq 0$. Фиксируется произвольное одномерное косое произведение A степени 1 (т. е. фиксируется произвольная точка кривой X). Тогда устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками кривой X и косыми произведениями размерности 1 и степени 0. Если $L \in E(1, 0)$, то $L \to L \otimes F_r$ есть взаимно однозначное отображение $E(1, 0)$ на $E(r, 0)$. Наконец, если $h = (r, d)$, то существует взаимно однозначное отображение $\alpha_{r,d}: E(h, 0) \to E(r, d)$ (в случае $r = 1$ это есть умножение на A^d).

В третьей части дается описание мультипликативного строения кольца $\hat{E}(X)$ в предположении, что характеристика основного поля равна 0. Кольцо $\hat{E}(X)$ рассматривается как Λ-модуль над подкольцом $\Lambda(X)$, порожденным одномерными векторными косыми произведениями. $\Lambda(X)$ есть групповое кольцо группы классов дивизоров кривой X. Каждое $E \in E(r, d)$ имеет вид $E \cong L \otimes E_A \times (r, d)$, где L—одномерно, а $E_{A(r,d)} = \alpha_{r,d} F_h$, $h = (r, d)$, причем если $L \otimes E_A(r, d) \cong E_A(r, d)$, то $L^{r/h} \cong 1$. Если A есть множество пар (r, d) таких, что $0 \leqslant d < r$, то для $\alpha \in A$ $\hat{E}_\alpha$ означает Λ-подмодуль, порожденный $E_A(r, d)$, $(r, d) = \alpha$. Тогда как Λ-модуль $\hat{E} \cong \sum_{\alpha \in A} \hat{E}_\alpha$. Далее вводятся следующие обозначения: A_0 есть подмножество из A таких пар, что $d = 0$; A_p состоит из таких пар, что $r = p^k$, где p — простое число и $(p, d) = 1$. Рассматриваются следующие подкольца в $\hat{E}$: $\hat{E}_0 = \sum_{\alpha \in A_0} \hat{E}_\alpha$, $\hat{E}_p = \sum_{\alpha \in A_p} \hat{E}_\alpha$. Кольцо $\hat{E}$ есть тензорное произведение своих подколец $\hat{E}_0$ и $\hat{E}_p$ (по всем простым p). Кольцевая структура $\hat{E}_0$ определяется следующим законом умножения для косых произведений F_r, $r \geqslant 1$:

$$F_r F_s = F_{r-s+1} + F_{r-s+3} + \ldots + F_{r+s-1} \quad (r \geqslant s).$$

Кольцевая структура $\hat{E}_p$ описывается следующими двумя формулами: если $l > k$, $(p, d) = (p, d') = 1$, то

$$E_A(p^l, d) \otimes E_A(p^k, d') \cong I_{pk} \otimes E(p^l, d''),$$

где $d'' = p^{l-k} d' + d$, I_{pk} — p^k-мерное тривиальное произведение, $E(p^l, d'') \in E(p^l, d'')$;

$$E_A(p^l, d) \otimes E_A(p^l, d') \cong I_{pk} \otimes \left(\sum L_i\right) \otimes E(p^k, d'')$$

где

$p^{l-k} = (p^l, d + d')$, $(d, p) = (d', p) = 1$, $d'' = d + d'/p^{l-k}$;

L_i — одномерные косые произведения, соответствующие представителям смежных классов группы дивизор, степень которых делит p^l, по подгруппе дивизоров, степень которых делит p^k; $E'(p^k, d'') \in E(p^k, d'')$.

Е. С. Голод

6309. Об алгебраических и аналитических когерентных пучках. Гротендик (Sur les faisceaux algébriques et les faisceaux analytiques cohérents. Grothendieck A.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1956—1957, 9. Paris, 1958, 2-1—2-16 (франц.)

Работа содержит обобщение основных теорем Серра об алгебраических когерентных пучках и об их связи с аналитическими кегерентными пучками. Обобщение происходит в двух направлениях: вместо проективных рассматриваются произвольные полные абстрактные алгебраические многообразия и теоремы, доказанные для одного многообразия, доказываются для отображения одного многообразия в другое (если второе многообразие есть точка, то получаем ранее известный результат).

Пусть $f: X \to Y$ — регулярное отображение абстрактного алгебраического многообразия X в Y. f называется собственным (propre), если для любого алгебраического многообразия Z график отображения $f \times i: X \times Z \to Y \times Z$ замкнут. Если многообразия рассматриваются над полем комплексных чисел, то это эквивалентно тому, что прообраз компакта компактен.

Если A — когерентный алгебраический пучок над X, то для $q \geqslant 0$ через $R^q f_*(A)$ обозначается пучок на Y, для которого $\Gamma(V, R^q f_*(A)) = H^q(f^{-1}(V), A)$, где V — область на Y, а Γ обозначает группу сечений. В частности, $R^0 f_*(A) = f_*(A)$ является прямым образом пучка A, и функторы $R^q f_*$ являются производными функторами функтора $R^0 f_*$.

Доказывается, что если отображение f собственное, то для любого когерентного алгебраического пучка A на X алгебраические пучки $R^q f_*(A)$ когерентны на Y. Если Y — точка, а X полно, то это означает, что группы $H^q(X, A)$ являются векторными пространствами конечного числа измерений. Для случая проективного многообразия это доказал Серр (РЖМат, 1957, 5147).

Пусть X — алгебраическое многообразие над полем комплексных чисел, а X^h — оно же, рассмотренное как аналитическое многообразие. X и X^h состоят из одних и тех же точек, но топология их различна — в X топология Зариского, а в X^h — „обычная". Пучок A на X, рассмотренный на X^h, обозначим через A^h. Аналогичные обозначения употребляются для отображений. Если $f: X \to Y$ — регулярное отображение, то естественно определяется гомоморфизм

$$(R^q f_*(A))^h \to R^q f_*^h(A^h), \qquad q \geqslant 0.$$

Доказывается, что если отображение f собственное, то все эти гомоморфизмы являются изоморфизмами на. Если Y — точка, а X полно, то это означает, что группы гомологий алгебраического когерентного пучка A на X не изменятся, если их вычислять как группы гомологий аналитического пучка A^h на аналитическом многообразии X^h. Для случая проективного многообразия это доказал Серр (РЖМат, 1958, 2405).

Другие следствия этой теоремы также обобщают результаты Серра. А именно, доказывается, что в прежних предположениях $f^h(A^h)$ — аналитический когерентный

пучок и что любой аналитический когерентный пучок на X^h, где X — полное алгебраическое многообразие, может быть представлен в виде $f^h(A^h)$, где A — алгебраический когерентный пучок на A, определенный однозначно с точностью до изоморфизма. Доказательства только намечены. И. Р. Шафаревич

6310. О теории Кана. Картан (Sur la théorie de Kan. Cartan H.), Sémin H. Cartan, École norm. supér. 1956—1957, 9. Paris, 1958, 1-1—1-19 (франц.)

Краткое изложение результатов Кана (РЖМат, 1957, 4680; 1959, 5679, 216, 1330). Излагается: 1) общее определение полусимплициальных комплексов над произвольными категориями; 2) теория гомотопических групп полусимплициальных комплексов и их связь с группами гомологий; в частности, „симплициальный вариант" известной теоремы Дольда и Тома (РЖМат, 1959, 5653); 3) связь гомотопических групп комплексов с гомотопическими группами их геометрических реализаций; 4) теория расслоений полусимплициальных комплексов; в частности, „симплициальный аналог" теоремы Гуревича о гомотопических группах пространства петель; 5) „симплициальный аналог" теоремы Гуревича о гомотопических группах. М. М. Постников

6311. Функтор Hom (X, Y) и теория полусимплициальных комплексов. Картан (Sur le foncteur Hom (X, Y) en théorie simpliciale. Cartan H.), Sémin H. Cartan. École norm. supér. 1956—1957, 9. Paris, 1958, 3-1—3-12 (франц.)

Рассматривается функтор Hom, относящий любым двум полусимплициальным комплексам X и Y полусимплициальный комплекс Hom (X, Y), симплексами размерности n которого являются симплициальные отображения $\Delta_n \times X \to Y$. Доказывается ряд свойств этого функтора; например, следующее: отображение Hom $(X, E) \to$ $\to$ Hom (X, B), индуцированное расслаивающим (в смысле Кана) отображением $E \to B$, также является (для любого полусимплициального комплекса X) расслаивающим отображением (Отсюда, в частности, вытекает, что если комплекс E удовлетворяет условию Кана, то комплекс Hom (X, E) также удовлетворяет этому условию). Доказывается также следующий принцип двойственности: если $Y \subset X$, то для любого комплекса E, удовлетворяющего условию Кана, отображение Hom $(X, E) \to$ Hom (Y, E) является расслоением. М. М. Постников

6312. Теория главных расслоений. Картан (Théorie des fibrés principaux. Cartan Henri), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1956—1957, 9. Paris, 1958, 4-1—4-12 (франц.)

Топологическая теория главных расслоенных пространств переносится на случай полусимплициальных комплексов. В частности, подробно изучается W-конструкция Эйленберга и Маклейна, оказывающаяся аналогом классифицирующего пространства. М. М. Постников

6313. Особенности дифференцируемых отображений. Хефлигер (Les singularités des applications différentiables. Haefliger A.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1956—1957, 9. Paris, 1958, 7-1—7-8 (франц.)

Основные определения, результаты и проблемы теории особенностей дифференцируемых отображений, построенной Уитни и Томом, формулируются в терминах теории струй Эресмана (РЖМат, 1954, 5721). Как замечает автор, этот способ изложения придает основным понятиям теории бо́льшую четкость и делает их с самого начала не зависимыми от выбора координатных систем. Струей порядка r из гладкого класса r многообразия V^n в гладкое класса r многообразие W^p называется класс эквивалентных пар (f, x), где f — дифференцируемое класса r отображение некоторого открытого множества $N \subset V^n$ в W^p, а x — точка из U; пары (f, x) и (f', x') считаются эквивалентными, если $x = x'$ и функции, задающие отображения f и f' в локальных координатах, имеют в точке x одинаковые частные производные порядков $\leqslant r$. Множество всех струй порядка r из V^n в W^p есть многообразие, обозначаемое через $J^r(V^n, W^p)$. Часть пространства $J^r(R^n, R^p)$ (R^n и R^p — евклидовы пространства), состоящая из струй, переводящих начало координат в начало координат, обозначается через $L^r_{n,p}$, а часть пространства $L^r_{n,n}$, состоящая из обратимых струй, — через L^r_n. В общем случае многообразие $J^r(V^n, W^p)$ есть косое произведение с базой $V^n \times W^p$, слоем $L^r_{n,p}$ и структурной группой $L^r_n \times L^r_p$. Применения этой системы понятий к изучению отображений многообразия в многообразие основаны на том, что каждому отображению f класса r многообразия V^n в W^p отвечает определенное отображение f^r многообразия V^n в $J^r(V^n, W^p)$, а именно отображение, относящее точке $x \in V^n$ струю, определяемую парой (f, x). В. А. Рохлин

6314. Одна теорема Тома об особенностях дифференцируемых отображений. Хефлигер, Косинский (Un théorème de Thom sur le singularités des applications différentiables. Haefliger A., Kosinski A.), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1956—1957, 9. Paris, 1958, 8-1—8-6 (франц.)

Доказывается следующая теорема, сообщенная автором Р. Томом. Пусть V^n и W^p — гладкие класса r паракомпактные многообразия и S — алгебраическое подмногообразие многообразия $L^r_{n,p}$, инвариантное относительно группы $L^r_n \times L^r_p$ (т. е. множество общих нулей полиномов некоторого идеала, инвариантного относительно $L^r_n \times L^r_p$). Пусть S_y — подпроизведение косого произведения $J^r(V^n, W^p)$ с той же базой $V^n \times W^p$ и слоем S. Пусть f — дифференцируемое класса r отображение многообразия V^n в W^p, f^r — отвечающее ему отображение многообразия V^n в $J^r(V^n, W^p)$ и Σ — прообраз множества S_y относительно f^r. Доказывается, что если S_y есть подмногообразие многообразия $J^r(V^n, W^p)$ и отображение f^r трансверсально на S_y, то класс когомологий mod 2, двойственный в V^n основному классу многообразия Σ, есть полином от классов Штифеля—Уитни многообразия V^n и образов при отображении f^* классов Штифеля—Уитни многообразия W^p. Этот полином — один и тот же для всех отображений f, удовлетворяющих предыдущим условиям. Теорема распространяется, после надлежащего уточнения понятий трансверсальности отображения и основного класса, на более общий случай, когда множество S_y не предполагается многообразием, но Σ предполагается абсолютным окрестностным ретрактом. В. А. Рохлин

6315. О когомологиях гладких многообразий. Аллендёрфер, Илс (On the cohomology of smooth manifolds. Allendoerfer Carl B., Eells James, Jr), Comment. math. helv., 1958, 32, № 3, 165—179 (англ.)

Пусть X — гладкое (а именно, класса C^∞) многообразие, A — подкольцо поля действительных чисел R. (A, r)-парой на X называется пара (θ, ω), состоящая из двух гладких форм θ и ω, определенных на множествах $X \setminus e(\theta)$ и $X \setminus e(\omega)$, где $e(\theta)$ и $e(\omega)$ — замкнутые нигде не плотные подмножества в X, причем требуется выполнение следующих условий: θ и ω имеют соответственно степени r и $r-1$; $e(\theta) \leqslant e(\omega)$; $\theta = d\omega$ на $X \setminus e(\omega)$; $e(\theta)$ и $e(\omega)$ лежат на гладких локально конечных полиэдрах размерности, не превосходящей соответственно $n-r-1$ и $n-r$; для всякой гладкой r-мерной цепи c, допустимой для пары (θ, ω) (т. е. $|c| \,|\, e(\theta) = \varnothing$,

$|\partial c| \cap e(\omega) = \varnothing$), выражение $R[(\theta, \omega), c] = \int_c \theta - \int_{\partial c} \omega$, называемое вычетом пары (θ, ω) принимает значения из A. Две (A, r)-пары называются эквивалентными, если для всякой цепи, допустимой для обеих пар, их вычеты одинаковы. Классы эквивалентных (A, r)-пар образуют A-модуль $\mathfrak{C}^r(X, A)$. В $\mathfrak{C}(X, A) = \sum \mathfrak{C}^r(X, A)$ вводится дифференциал $d: \mathfrak{C}^r(X, A) \to \mathfrak{C}^{r+1}(X, A)$ по формуле: $d[\theta, \omega] = [0, \theta]$, где $[\theta, \omega]$ означает класс пар, эквивалентных (θ, ω). Затем определяется внешнее произведение классов пар, превращающее $\mathfrak{C}(X, A)$ в дифференциальную градуированную алгебру.

Основной результат работы заключается в том, что алгебра когомологий $\mathfrak{H}(X, A)$ этой дифференциальной алгебры изоморфна алгебре когомологий многообразия X. Аналогичный результат справедлив и для когомологий с компактными носителями. Связь с классической теоремой Де Рама устанавливается предложением: если θ — замкнутая гладкая форма на X степени r с периодами (относительно базы целочисленных r-мерных циклов) из A, то существует гладкая форма ω степени $r-1$ на $X \setminus e(\omega)$, где $e(\omega)$ лежит на $(n-r)$-мерном цикле такая, что (θ, ω) есть (A, r)-пара. Наконец, если на X задана риманова метрика, то в каждом классе когомологий из $\mathfrak{H}^r(X, A)$ содержится (A, r)-пара (θ, ω) такая, что форма θ гармоническая на X, причем θ определяется единственным образом. Е. С. Голод

6316. Гомологическая алгебра в абелевых категориях. **Хеллер** (Homological algebra in abelian categories. Heller Alex), Ann. Math., 1958, 68, № 3, 484—525 (англ.)

Как показал Буксбаум (РЖМат, 1959, 1302), систему понятий и результатов, известную под названием „гомологической алгебры", можно построить не только для категории модулей, но и для любых так называемых „точных" категорий. Однако многие категории, для которых естественно ожидать наличия в них „гомологической алгебры", не являются точными категориями в смысле Буксбаума. Автор определяет некоторый класс категорий, по существу содержащий все точные категории, и показывает, что для этих категорий (которые он называет абелевыми категориями) возможно построение гомологической алгебры. Отличие абелевых категорий от точных состоит в том, что в абелевых категориях основное внимание концентрируется не на всех отображениях, а лишь на некоторых так называемых собственных отображениях. Точные категории в классе абелевых категорий характеризуются тем, что в них все отображения являются собственными отображениями. Примером абелевой, но не точной категории является категория всех банаховых пространств и их непрерывных линейных отображений (операторов); собственными отображениями этой категории являются отображения на замкнутые подпространства. М. М. Постников

6317. Произведения скольжения и кручения для модулей. **Мак-Лейн** (Sleide and torsion products for modules. MacLane Saunders. Univ. e Politec. Torino. Rend. Sem. Mat., 1955—1956, 15, 281—309) (англ.)

Основная задача автора — определить функтор $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(C, G)$ через образующие и соотношения. Для этого введем общее понятие n-кратного „произведения скольжения" $\langle C, n\Omega, G \rangle$ для правого модуля C и левого модуля G над кольцом Ω. $\langle C, n\Omega, G \rangle$ определяется как абелева группа, образуемая элементами $\langle x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \rangle$ $x_0 \in C$, $x_i \in \Omega$, $x_{n+1} \in G$ такими, что $x_0 x_1 = 0$, $x_1 x_2 = 0, \ldots, x_{n-1} x_n = 0$, $x_n x_{n+1} = 0$ со следующими соотношениями:

$$\langle x_0, \ldots, x_i y, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1} \rangle = \langle x_0, \ldots, x_i, yx_{i+1}, \ldots, x_{n+1} \rangle,$$

$$\langle x_0, \ldots, x_i + x_{i'}, \ldots, x_{n+1} \rangle =$$

$$= \langle x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1} \rangle + \langle x_0, \ldots, x_{i'}, \ldots, x_{n+1} \rangle,$$

если выражения в обеих частях имеют смысл. С точной последовательностью правых Ω-модулей $0 \to A \to B \to C \to 0$ связывается гомоморфизм

$$\theta_n: \langle C, (n+1)\Omega, G \rangle \to \langle A, n\Omega, G \rangle$$

и показывается, что если в Ω каждый левый идеал с конечным числом образующих главный и каждый левый Ω-модуль с конечным числом образующих является прямой суммой циклических модулей, то $\{\langle C, n\Omega, G \rangle; \theta_n\}$ — в точности проективная резольвента ковариантных функторов.

Автор показывает, что для произвольного кольца Λ с группой операторов Ω допустимые матрицы над Λ (бесконечные матрицы, у которых столбцы и строки состоят из последовательностей с конечным числом отличных от нуля элементов) удовлетворяют перечисленным выше условиям. Записывая через A^{ω} прямую сумму не менее чем счетного числа экземпляров правого (левого) Λ-модуля A, автор доказывает, что $\mathrm{Tor}_n^{\Lambda}(A, G) \approx \approx \langle A^{\omega}, n\Omega, G^{\omega} \rangle \approx \langle A^{\omega}, n\Omega', G^{\infty} \rangle$, где Ω' — кольцо всех бесконечных матриц с допустимыми строками над Λ и G^{∞} — прямая сумма счетного числа экземпляров G. Изоморфизм, вводимый при этом, — естественный.

D. A. Buchsbaum

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 7, 558

6318 К. Алгебраическая топология и теория пучков. **Годман** (Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Godement Roger. (Actual. scient. et industr., № 1252, Publs Inst. math. Univ. Strasbourg, 13). Paris, Hermann, 1958, 283 p., ill., 3600 fr.) (франц.)

Излагая основные положения теории пучков, автор широко пользуется языком гомологической алгебры с понятиями категорий и функторов и проективных резольвент (см., например, семинар Картана, РЖМат, 1960, 5068—5089). Основная цель книги — дать такое изложение теории пучков, которое наиболее употребительно в приложениях к смежным областям топологии: теории функций многих комплексных переменных, дифференциальной геометрии и др. А. Б. Жижченко

См. также: 6378, 6683, 6684, 6686, 6743, 6748, 6837, 6868.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *С. М. Никольский, П. С. Новиков, С. И. Адян, А. А. Конюшков*

6319. Об измеримости некоторых функций. **Шрагин И. В.**, Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 181—186

Пусть $\varphi(u)$ $(0 \leqslant u < \infty)$ — неубывающая, непрерывная слева функция, $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(u) \not\equiv 0$, $\psi(v) = \sup\{u : \varphi(u) < v\}$ $(0 < v < \infty)$, $\psi(0) = 0$. Если

$\lim_{u\to\infty}\varphi(u)=l$, то $\psi(v)=\infty$ при $v>l$ (или при $v\geqslant l$).

Функции

$$\Phi(u)=\int_0^u\varphi(t)\,dt\ (0<u<\infty)\ \text{и}$$

$$\Psi(v)=\int_0^v\psi(t)\,dt\ (0<v<\infty)$$

называются взаимно дополнительными функциями Юнга. Пусть B — измеримое множество конечномерного евклидова пространства конечной или бесконечной лебеговой меры; $g(u,x)$ $(x\in B,\ -\infty<u<\infty)$ — измеримая по x при каждом u и непрерывная по u почти при всех $x\in B$ функция; $M(u)$ и $M_1(u)$ — две функции Юнга. Пусть, наконец, $a>0$ такое, что $M(a)<\infty$, а λ, μ, ν — некоторые положительные числа и

$$f(x)=\sup\{u\mid g(u,x)\mid :u\in E_x\cup\{0\}\},\qquad(1)$$

где

$$E_x=\{u:\lambda u\in[-a,a],\quad M_1[\mu\mid g(u,x)\mid]>\nu M(\lambda\mid u\mid)\}.$$

Доказываются теоремы:

1. Функция $f(x)$, определенная равенством (1), измерима на множестве B.

2. Существует измеримая функция $u(x)$ такая, что почти всюду на B имеют место соотношения

$$f(x)=\mu\mid g(u(x),x)\mid,$$

$$M_1[\mu\mid g(u(x),x)\mid]\geqslant\nu M(\lambda\mid u(x)\mid).$$

Я. Б. Рутицкий

6320. О развитии понятия интеграла со времени Римана. Хаупт (Über die Entwicklung des Integralbegriffes seit Riemann. Haupt Otto), Schr. Forschungsinst. Math., 1957, 1, 303—317 (нем.)

Статья является в основном кратким изложением материала, содержащегося в книге автора, Аумана и Пока (РЖМат, 1959, 6764К).

Из Math. Revs, 1957, 18, № 11, 881.

6321. Об абсолютной интегрируемости функций, интегрируемых в обобщенном смысле. Гашпар (Despre integrabilitatea absolută a funcţiilor integrabile în sens generalizat. Gaşpar Toma), Comun. Acad. RPR, 1959, 9, № 4, 305—308 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается обобщение понятия интеграла Римана на неограниченные функции в бесконечных областях, изучавшееся Николеску, и доказывается абсолютная интегрируемость функций, интегрируемых в этом обобщенном смысле. По резюме автора

6322. Дифференциальные свойства функции действительной переменной, удовлетворяющей условию Дарбу. Иосифеску (Propriétés différentielles des fonctions réelles d'une variable réelle, jouissant de la propriété de Darboux. Iosifescu Marius), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 13, 1918—1919 (франц.)

Пусть $D^+f(x)$, $D_+f(x)$, $D^-f(x)$, $D_-f(x)$ суть производные числа Дини. $D^+f(x)$ и $D_-f(x)$; $D^-f(x)$ и $D_+f(x)$ называются противоположными производными числами. Введем обозначение $E_t=E\{x,a<x<b,f(x)=t\}$. Точка $x\in E_t$ будет первого (второго) рода, если x есть односторонняя (двусторонняя) точка накопления множества E_t. Формулируются, в частности, теоремы:

I. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условию Дарбу на (a,b). Тогда, исключая, быть может, множество меры нуль значений t, для всех точек $x\in E_t$ существует производная (конечная или бесконечная), которая равна противоположной производной.

Функция $f(x)$ обладает свойством T_1, если множество значений, принимаемых функцией $f(x)$ бесконечное число раз, имеет меру нуль.

II. Необходимое, но не достаточное условие, чтобы функция $f(x)$, обладающая свойством Дарбу, имела T_1-свойство, состоит в том, чтобы множество значений, принимаемых функцией $f(x)$ в точках, где не существует производная, имело меру нуль.

А. Г. Джваршейшвили

6323. Симметрические первые производные. Данжуа (Les dérivées premières symétriques. Denjoy Arnaud), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 109—111 (франц.; рез. русск.)

Пусть $f(x)$ определена на (a,b) и является первой симметрической производной измеримой функции $F(x)$, т. е. $\lim_{h\to0}\dfrac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}=f(x)$. Тогда $f(x)$ будет обычной производной функции $F(x)$ на множестве полной меры. Из резюме автора

6324. Обобщение понятия производной. Витербо (Su una estensione del concetto di derivata. Viterbo Guido), Ricerca, Napoli, 1955, 6, 11—21 (итал.)

Пусть f определена на множестве X с конечной или бесконечной предельной точкой c. Если существует конечный предел $\lim_{x\to c}f(x)$, то автор называет его производной порядка нуль функции f в точке c и обозначает $f^0(c)$. Пусть ε обозначает $x-c$, если c конечна, и $1/(a-x)$ (a — конечная постоянная), если c бесконечна. Если $\lim_{x\to c}[f(x)-f^0(c)]/\varepsilon$ существует и конечен, то он называется первой производной $f'(c)$ функции f в точке c. Аналогично $f''(c)$ определяется как конечный

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{f(x)-f^0(c)}{\varepsilon}-f'(c)\right],$$

и по индукции $f^{(n)}(c)$ определяется как конечный

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left\{\dots\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{f(x)-f^0(c)}{\varepsilon}-f'(c)\right)-f''(c)\right)\dots\right\}-f^{(n-1)}(c)\right].$$

Производные высшего порядка функции f в точке c могут существовать и в случае, если производные низших порядков существует только в c и не обязательно в окрестности точки c. Автор обозначает обыкновенную n-ю производную функции f в c через $\overline{f^{(n)}(c)}$. $\overline{f'(c)}$ общее, чем $\overline{f'(c)}$. Если $\overline{f^{(n)}(c)}$ существует, то $\overline{f^{(n)}(c)}=n!f^{(n)}(c)$. A. Rosenthal

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 8, 644.

6325. О некоторых свойствах регулярно монотонных функций. Сендов (Върху някои свойства на регулярно-монотонните функции. Сендов Бл.), Изв. Матем. ин-т, Българ. АН, 1959, 3, № 2, 63—80 (болг.; рез. русск., нем.)

Рассматривается тот же класс регулярно монотонных функций, что и в других работах автора (РЖМат, 1959, 4580, 4581), но вместо периодичности последовательности $\{\varepsilon_n\}$ предполагается, что эта последовательность содержит неограниченное число раз комбинацию ε, $-\varepsilon$, $-\varepsilon,\dots,-\varepsilon,\varepsilon$ $(\varepsilon=\pm1)$, имеющую по крайней мере 4 элемента. Результаты прежних работ автора при этих предположениях остаются в силе. Б. А. Рымаренко

6326. О некоторых интерполяционных разложениях регулярно монотонных функций. Тагамлицкий (Върху някои интерполационни развития на регулярно-монотонните функции. Тагамлицки Я.), Изв. Матем. ин-т. Българ. АН, 1959, 3, № 2, 187—204 (болг.; рез. русск., нем.)

Пусть K — класс регулярно монотонных, бесконечно дифференцируемых на $[0,1]$ функций $f(x)$ $(\varepsilon_nf^{(n)}(x)\geqslant0;$ $n=0,1,\dots,$ $\varepsilon_n=\pm1;$ $x\in[0,1])$ и пусть $P_0(x)=\varepsilon_0$,

$$P_n(x) = \varepsilon_0 \int_{x_0}^{x} \tau_0 dt_1 \int_{x_1}^{t_1} \tau_1 dt_2 \ldots \int_{x_{n-1}}^{t_{n-1}} \tau_{n-1} dt$$

$$(n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$x_n = \frac{1 - \varepsilon_n \varepsilon_{n+1}}{2}, \quad \tau_n = 1 - 2x_n.$$

Доказывается теорема: Любая функция $f(x) \in K$ представима в виде

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu P_\nu(x) + AP(x), \qquad (1)$$

где $A \geqslant 0$ — некоторая постоянная, $a_\nu = \varepsilon_\nu f^{(\nu)}(x_\nu) \geqslant 0$, а $P(x) \in K$ — функция, которая удовлетворяет условиям $P^{(m)}(x_m) = 0$ $(m = 0, 1, \ldots)$ и не зависит от $f(x)$. При этом, если $\lim_{m\to\infty} x_m = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$, то $P(x) \equiv 0$; в остальных случаях $P(x) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_0 \frac{P_n(x)}{P_n(1-x_0)}$ равномерно для $x \in [0,1]$.

Справедливо и обратное: Если для функции $f(x)$ имеет место разложение (1) на $[0,1]$ при $a_\nu \geqslant 0$ и $A \geqslant 0$, то $f(x) \in K$.

Работа представляет собою обобщение работ Сендова (РЖМат, 1959, 4580, 4581; 1960, 6325).

Б. А. Рымаренко

6327. Монотонные функции двух переменных. Маркус (Fonctions monotones de deux variables. Marcus S.), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1956, 1, № 2, 17—36 (франц.)

Автор исследует и сравнивает различные понятия монотонной функции f двух переменных (определенной на квадрате J), которые характеризуются одним из следующих условий: а) (Тонелли) каждая из разностей

$$f(x + \Delta x, y) - f(x, y), f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

порознь опускает (avoid) некоторый знак при $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$; б) аналогично для $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y) + f(x, y)$; в) (Янг и Николеску) разности в а) и б) опускают одинаковый знак при $\Delta x > 0$, $\Delta y > 0$; в этом случае f называется „вполне монотонной", г) (Лебег) в каждой замкнутой области f достигает своих граней на границе; д) каждый уровень E_t функции f (т. е. множество всех точек, в которых f принимает значение t) является связным; е) функция f монотонна в смысле А. С. Кронрода (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 1, 24—134). Например, доказываются следующие теоремы: Функции со свойствами д) и е) совпадают. Функции со свойством г) характеризуются свойством, что каждая компонента множества E_t, которая разделяет J, пересекает границу J. Каждая функция со свойством а) обладает свойствами г) и д). С другой стороны, показывается, что свойство б) не сравнимо со свойствами а), г), д) или е), а также, что свойства г) и е) не сравнимы.

A. Rosenthal

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 11, 877—878.

6328. О критерии компактности для гиперболически непрерывных функций. Добреску, Сэлэджан (Asupra unui criteriu de compacitate pentru funcţiile hiperbolic continue. Dobrescu Eug., Sălăgean I.), Comun. Acad. RPR, 1959, 9, № 5, 419—424 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается полное метрическое пространство C_H гиперболически непрерывных и ограниченных функций с метрикой $\rho(f, g) = \sup_{x,y\in I} |f(x, y) - g(x, y)|$.

Теорема. Необходимым и достаточным условием компактности множества функций $\{f(x,y)\}$, равностепенно гиперболически непрерывных и равномерно ограниченных в замкнутом промежутке I, является вполне ограниченность множества $\{f(x, b) + f(a, y)\}$, где (a,b) — произвольная точка, фиксированная в I.

Частным случаем этой теоремы является критерий компактности предыдущей работы авторов (РЖМат, 1960, 2813).

По резюме авторов

6329. Теорема покрытия для отображений. Рейкелдерфер (A covering theorem for transformations. Reichelderfer Paul V.), Math. Japon, 1956, 4, 13—19 (англ.)

Пусть T — непрерывное ограниченное отображение ограниченной области D в евклидовом n-мерном пространстве R^n в R^n. Теорема покрытия, установленная в статье для отображения T, содержит много понятий, точные определения которых можно найти в книге Радо и автора (РЖМат, 1957, 533 К).

Из Math. Revs, 1957, 18, № 9, 723.

6330. Заметка о спрямляемых кривых. Ньюнс (A note on rectifiable curves. Newns W. F.), Edinburgh, Math. Notes, 1956, № 40, 12—14 (англ.)

Пусть f — непрерывная комплекснозначная функция на действительном интервале (a, b), действительная и мнимая части которой имеют ограниченные изменения. Показывается, что если s — длина дуги графика функции f, то в случае абсолютно непрерывной на (α, β) функции f имеем $s(\beta) - s(\alpha) \leqslant \int_\alpha^\beta |f'(t)|\, dt$. Эта простая лемма используется для получения двух известных результатов:

I (Тонелли). Для каждой спрямляемой кривой $\int_\alpha^\beta |f'(t)|\, dt \leqslant s(\beta) - s(\alpha)$, причем равенство имеет место для всех α, β $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$ тогда и только тогда, когда f абсолютно непрерывна в (a, b).

II (Поллард). Если f' существует в некоторой окрестности t_0 и $|f'|$ полунепрерывна сверху в t_0, то s дифференцируема в t_0 и $s'(t_0) = |f'(t_0)|$.

Указаны различные обобщения.

E. A. Coddington

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 10, 794—795.

6331. О лебеговой площади замкнутых поверхностей. (Предварит. сообщение). Краль (в подл. Крал Иосеф) (Král Josef), Чехосл. матем. ж., 1959, 9, № 3, 470—471 (рез. англ.)

Формулируются без доказательств три теоремы, связанные с одним вопросом, поставленным Федерером (РЖМат, 1959, 7882). В случае трехмерного пространства утвердительный ответ на этот вопрос дается теоремой 2.

По резюме автора

6332 К. Интеграл Лебега — Стилтьеса. Камке (Das Lebesgue—Stieltjes-Integral. Kamke E. Leipzig, B. G. Teubner Verlogsges., 1956, vi, 226 S., 20.00 DM) (нем.)

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

6333. О системах и видах множеств. Экономидис (Sur les systèmes et les formes des ensembles. Economidis Nicolas), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 16, 2274—2276 (франц.)

Пусть $\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ есть система множеств, где E_γ — подмножество метрического пространства X, и $\{P_\gamma : P_\gamma \in E_\gamma\}$ есть множество выбора этой системы, т. е. множество точек P_γ, где P_γ — одна из точек множества E_γ. Если для всякого множества выбора $\{P_\gamma : P_\gamma \in E_\gamma\}' \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma$,

то система $\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ называется замкнутой системой. Известно, что $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right)' \supseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma$.

Автор формулирует теорему: Для того чтобы имело место $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right)' = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma$, необходимо и достаточно, чтобы система $\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ была замкнутой.

Система $\{E_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ называется изолированной системой, если для каждого E_γ существует положительное число ξ_γ такое, что для всякого множества $E \neq E_\gamma$ этой системы наименьшее расстояние $\delta(E_\gamma, E) > \xi_\gamma$. Утверждается, что если система $\{E_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ изолирована и замкнута, то $\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right)^{(k)} = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma^{(k)}$ для всякого порядкового числа k, где $E^{(k)}$ — производное множество порядка k множества E.

Система $\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ называется компактной, если множество $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ компактно. Если система $\{E_i : i \in \Phi\}$, где Φ — множество натуральных чисел, изолирована и компактна, то последовательность множеств E_i называется регулярной. Утверждается, что если регулярная последовательность $\{E_n\}$ сходится к точке P, то $\left(\bigcup_{i\in\Phi} E_i\right)^{(k)} = (P) \cup \left(\bigcup_{i\in\Phi} E_i^{(k)}\right)$ для всякого порядкового числа k. Все подмножества метрического пространства автор делит на три вида. Подмножество E пространства X будет: а) первого вида, если существует порядковое число k первого или второго числового класса такое, что $E^{(k)} = 0$, б) второго вида, если $E^{(k)} = E^{(k+1)} \neq 0$, в) третьего вида, если для всякого порядкового числа k первого или второго класса $E^{(k)} \neq E^{(k+1)}$.

Для множеств первого вида имеют место следующие теоремы: 1) Если X есть совершенное множество, то существуют подмножества первого вида;) Всякое множество первого вида не более чем счетно; 3) Всякое множество первого вида неплотно (т. е. его производное множество E' разрознено); 4) Сумма, произведение и разность двух множеств первого вида есть также множества первого вида.

Для множеств второго вида имеют место теоремы: 1′) Всякое множество второго вида не является неплотным; 2′) Всякое замкнутое множество второго вида есть сумма совершенного множества и не более чем счетного множества; 3′) Сумма конечного числа множеств второго вида есть множество второго вида; 4′) Сумма конечного числа множеств первого и второго вида, где по крайней мере одно слагаемое второго вида, есть множество второго вида.

Рассматриваются необходимое и достаточное условие представления множества E метрического пространства в виде суммы множества первого вида и плотного в себе и достаточное условие представления множества E в виде суммы множества неплотного и плотного в себе. Доказано, что в метрическом сепарабельном пространстве множества третьего вида не существуют, т. е. всякое множество такого пространства первого или второго вида. Для того чтобы в метрическом сепарабельном пространстве множество E было неплотным, необходимо и достаточно, чтобы оно было множеством первого вида. Рассмотрено также необходимое и достаточное условие представления множества E в таком пространстве в виде суммы множества, плотного в себе, и множества первого вида. З. И. Козлова

6334. Некоторые примеры борелевских множеств. Сикорский (Some examples of Borel sets. Sikorski R.), Colloq. math., 1958, 5, № 2, 170—171 (англ.)

Используя метод математической индукции, автор строит примеры борелевских множеств M_α и A_α, лежащих в гильбертовом кубе H, строго мультипликативного и соответственно аддитивного класса α $(0 \leqslant \alpha < \Omega)$. M_0 есть одноточечное подмножество H и $A_0 = H - M_0$. Если множества M_ξ и A_ξ определены для всех порядковых чисел $\xi < \alpha$, то $M_\alpha = A_\beta \times A_\beta \times \ldots \subset H^{\aleph_0}$, когда $\alpha = \beta + 1$, и $M_\alpha = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_\xi \times \ldots = \underset{\xi<\alpha}{P} A_\xi \subset H^{\aleph_0}$, когда α — трансфинитное число второго рода. Так как $H^{\aleph_0}$ гомеоморфно H, то M_α можно рассматривать как подмножество H, и множество $A_\alpha = H - M_\alpha$. Из определения следует, что M_α — борелевское множество мультипликативного класса α в H, а A_α — аддитивного класса α в H. Автор доказывает, что если X есть метрическое пространство и $B \subset X$ есть борелевское множество мультипликативного (аддитивного) класса α в X, то существует непрерывное отображение φ пространства X в H такое, что $\varphi^{-1}(M_\alpha) = B$ (соответственно $\varphi^{-1}(A_\alpha) = B$).

Используя известную теорему о существовании борелевских множеств сколь угодно высоких классов, автор доказывает, что M_α не является множеством аддитивного класса α, а A_α — мультипликативного класса α. Прямое доказательство этого утверждения автору неизвестно.

Ставится вопрос о необходимости решения следующей проблемы: Пусть A_n есть борелевское множество аддитивного класса α в метрическом пространстве X_n, не являющееся множеством мультипликативного класса α в том же пространстве $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать или опровергнуть, что множество $A = A_1 \times A_2 \times \ldots$ (которое, конечно, мультипликативного класса $\alpha + 1$) не аддитивного класса $\alpha + 1$ в пространстве $X = X_1 \times X_2 \times \ldots$.

З. И. Козлова

6335. О представлении произвольной функции функциями, обладающими свойством Дарбу. Маркус (Sur la représentation d'une fonction arbitraire par des fonctions jouissant de la propriété de Darboux. Marcus Solomon), C. r. Acad. sci., 1959, 249, № 1, 25—26 (франц.)

Следующим образом обобщается свойство Дарбу: вещественная функция, определенная на метрическом пространстве Z, обладает свойством Дарбу, если она всякое замкнутое связное непустое подмножество из Z отображает на связное множество действительных чисел. Серпинским (РЖМат, 1957, 7108, 7109) было доказано, что каждая вещественная функция, определенная на Z, есть сумма двух функций, обладающих свойством Дарбу, а также есть предел последовательности функций, обладающих свойством Дарбу. Эта теорема обобщает одно утверждение, сформулированное в 1927 г. без доказательства Линденоаумом.

Автор ставит целью исследовать, в какой мере топологические свойства пространства Z существенны для справедливости приведенной выше теоремы. В работе без доказательства формулируется ряд теорем, показывающих, что топологические свойства пространства Z не играют никакой роли в рассматриваемом вопросе.

Пусть X — множество мощности $\geqslant a$, где a — бесконечная мощность, и F — некоторое семейство мощности a множеств мощности a, содержащихся в X. Одна из сформулированных теорем гласит:

Если Y — аддитивная группа мощности a и p — целое число > 1, то каждая функция f, определенная на X и принимающая значения из Y, есть сумма p функций,

каждая из которых отображает всякое множество $E \in F$ на группу Y. Ф. А. Кабаков

6336. Об одной проблеме Штейнхауса, касающейся точечных множеств на плоскости. Серпинский (Sur un problème de H. Steinhaus concernant les ensembles de points sur le plan. Sierpiński W.), Fundam. math., 1959, **46**, № 2, 191—194 (франц.)

С помощью аксиомы произвольного выбора положительным образом решается следующая проблема, поставленная Штейнхаусом: существуют ли такие два плоских множества A и B (исключая тот тривиальный случай, когда одно из них есть сама плоскость, а другое — точка), что всякое множество в плоскости, конгруэнтное с A, имеет и притом единственную общую точку с каждым множеством, конгруэнтным с B?

Для построения множеств A и B, обладающих указанным свойством, аксиома произвольного выбора применяется дважды, причем один раз для доказательства следующей леммы: Если мощность плоского множества E меньше $2^{\aleph_0}$, то существует в плоскости такая точка g, что расстояние от нее до любой точки из E положительно и отлично от расстояний между любыми двумя точками из E.

Приводится также доказательство теоремы, доказанной Сверчковским (S. Swierczkowski): Не существует непустого множества E (отличного от плоскости), которое содержит одну и только одну общую точку с каждым множеством, конгруэнтным с E.

Остается пока открытой другая проблема Штейнхауса: Существует ли плоское множество такое, что оно само, а так же каждое конгруэнтное с ним множество содержит и притом единственную точку с целыми координатами? Ф. А. Кабаков

6337. Некоторые замечания по теории множеств. VI. Эрдёш, Фодор (Some remarks on set theory. VI. Erdős P., Fodor G.), Acta scient. math., 1957, **18**, № 3-4, 243—260 (англ.)

Часть V см. РЖМат, 1960, 5106. Пусть E есть непустое множество мощности $\mathfrak{m}$ и между его элементами установлено некоторое отношение R. $R(x)$ обозначает множество всех $y \in E$, для которых xRy верно. Два элемента x и y называются независимыми, если отношения xRy и yRx неверны одновременно. Подмножество множества E называется свободным, если элементы его попарно независимы. Пусть $\mathbf{B}$ есть система подмножеств множества E. Непустая система $\mathbf{I} \subset \mathbf{B}$ называется $\mathfrak{p}$-аддитивным идеалом, $\mathfrak{p} \leqslant \mathfrak{m}$, если из $X \in \mathbf{I}$, $Y \in \mathbf{B}$ и $Y \subset X$ следует $Y \in \mathbf{I}$ и система $\mathbf{I}$ инвариантна относительно операции суммирования меньше, чем $\mathfrak{p}$ слагаемых. Предполагается, что для каждого $x \in E$ $\{x\} \in \mathbf{B}$, $\{x\} \in \mathbf{I}$ и для множества $R(x)$ выполняется одно из условий:

(A) Существует такое $\mathfrak{n} < \mathfrak{m}$, что $\overline{\overline{R(x)}} < \mathfrak{n}$.

(B) E есть метрическое пространство и $d(x, R(x)) > 0$.

В реферируемой статье рассматривается вопрос: (i) если $\mathbf{A}$ есть система множеств, входящих в $\mathbf{B} - \mathbf{I}$, то существует ли подмножество E' множества E такое, что для каждого $x \in \mathbf{A}$ $(X, E') \in (\mathbf{B} - \mathbf{I})$? В некоторых частных случаях этот вопрос исследовался ранее Фодором.

Авторы сначала доказывают, что если мощность $\aleph_\gamma$ множества E больше, чем $\aleph_0$, но меньше, чем первый недостижимый в слабом смысле алеф, $\mathbf{I}$ есть $\aleph_{\lambda+1}$-аддитивный идеал, содержащий все одноэлементные подмножества множества E, и $F \notin \mathbf{I}$, то F может быть разложено на сумму последовательности типа $\omega_{\lambda+1}$ попарно непересекающихся подмножеств F_ξ множества E, также не входящих в $\mathbf{I}$.

Далее доказывается ряд теорем, относящихся к вышеуказанному вопросу (i). Например, ответ на него положителен в следующих случаях:

1. Мощность $\mathfrak{m}$ множества E больше, чем $\aleph_0$, но меньше, чем первый недостижимый в слабом смысле алеф, $\mathbf{B}$ есть множество всех подмножеств множества E, $\mathbf{I}$ есть $\aleph_{\gamma+1}$-аддитивный идеал ($\aleph_{\gamma+1} \leqslant \mathfrak{m}$), $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \aleph_\gamma$ и $\overline{\overline{R(x)}} < \aleph_0$ для каждого $x \in E$.

2. E есть метрическое пространство, содержащее плотное подмножество, мощность которого меньше, чем первый недостижимый в слабом смысле алеф, $\mathbf{B}$ есть множество всех борелевских подмножеств множества E, $\mathbf{I}$ есть σ-идеал всех подмножеств меры нуль на $\mathbf{B}$, $\overline{\overline{\mathbf{A}}} = \mathfrak{m}$ и выполняется, кроме условия (B), еще следующее условие (C): существует такое действительное число $i > 0$, что множество всех $x \in E$, для которых $d(x, R(x)) \geqslant i$, содержит в $\mathbf{B}$ подмножество положительной меры.

Если для каждого $x \in E$ множество $R(x)$ есть дополнение сферы с центром в точке x, то условие (C) не только достаточно, но и необходимо для существования свободного подмножества множества E, входящего в $\mathbf{B}$.

Ответ на вопрос (i) отрицателен, если $\overline{\overline{\mathbf{B} - \mathbf{I}}} = \mathfrak{m}$ и каждый элемент системы $\mathbf{B} - \mathbf{I}$ имеет также мощность $\mathfrak{m}$. Б. С. Содномов

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

6338. Множители для сильной сходимости рядов Фурье. II. Гёс (Multiplikatoren für starke Konvergenz von Fourierreihen II. Goes G.), Studia math., 1958, **17**, № 3, 309—311 (нем.)

Часть I см. РЖМат, 1960, 3907.

Пусть E есть одно из пространств L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, L_Φ или C периодических периода 2π функций. Последовательность λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ преобразует любой ряд Фурье — Стилтьеса с коэффициентами a_n, b_n в ряд Фурье — Лебега с коэффициентами $\lambda_n a_n$, $\lambda_n b_n$ функции $f(t) \in E$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \| f(t) - \frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \|_E = 0,$$

тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \cos kt$ есть ряд Фурье — Лебега некоторой функции $K(t) \in E$ и

$$\lim_{n\to\infty} \| K(t) - \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu \cos \nu t \|_E = 0.$$

А. Ф. Тиман

6339. Некоторые теоремы о рядах Фурье из L^p. Госселин (Some theorems on L^p Fourier series. Gosselin Richard P.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **92**, № 2, 291—301 (англ.)

Обобщаются опубликованные ранее результаты автора (РЖМат, 1957, 3913), касающиеся сходимости некоторых подпоследовательностей частных сумм ряда Фурье. Доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L^p$, $1 < p \leqslant 2$. Тогда существует сходящаяся почти всюду к $f(x)$ подпоследовательность $S_{m_\nu}(x; f)$ частных сумм ряда Фурье функции $f(x)$; индексы m_ν которой удовлетворяют условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1}\sigma(n) (\log n)^{(2-p)/2(p-1)} \geqslant 1, \qquad (1)$$

где через $\sigma(n)$ обозначено количество индексов m_ν не превосходящих n.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in L^p$, $1 < p < 2$, $\gamma > 3q/2 - 2$ $(q = p/(p-1))$, $\{n_k\}$ — лакунарная последовательность (т. е. $n_{k+1}/n_k \geqslant \lambda > 1$). Тогда существует сходя-

щаяся почти всюду к $f(x)$ подпоследовательность $S_{m_\nu}(x; f)$, имеющая не менее

$$\left[\frac{n_{k+1}-n_k}{(\log n_{k+1})^\tau}\right]$$

индексов m_ν в интервале (n_k, n_{k+1}) $(k=1,2,\ldots)$.

Теорема 3 является аналогом теоремы 1 для интеграла Фурье.

Теорема 4. Если $f(x)\in L^p$, $1<p\leqslant 2$, и

$$\sup_{0<h<\delta}\left\{\int_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}=o\{(\log 1/\delta)^{-\alpha}\},\quad \alpha\geqslant 0,$$

то существует последовательность индексов m_ν, удовлетворяющая условию (1), для которой почти всюду

$$S_{m_\nu}(x; f)-f(x)=o\{(\log m_\nu)^{-\alpha}\}.$$

Хотя теоремы 1 и 2 можно перенести на систему функций Уолша (по крайней мере для случая L^2), но на любые системы ортонормированных функций они не переносятся. Именно, автор утверждает, что, видоизменив конструкцию в одной теореме Д. Е. Меньшова, можно построить ортонормированную систему $\{\varphi_n(x)\}$ и функцию $f(x)\in L^2$ такие, что у разложения $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$ расходится почти всюду любая подпоследовательность частных сумм с индексами m_ν, удовлетворяющими условию $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1}\sigma(n)=1$. А. А. Шнейдер

6340. Заметка о классе *Hz*. Такэда (Takeda Kazuaki), Гифу дайгаку когакубу кэнкю хококу, Res. Repts. Fac. Engng Gifu Prefect. Univ., 1957, № 7, 11—15 (японск.; рез. англ.)

Автор определяет класс Hz как класс функций $F(z)$, регулярных в круге $|z|<1$, для которых интеграл

$$Z[F(\rho e^{i\theta})]=\int_0^{2\pi}|F(\rho e^{i\theta})|\log^+|F(\rho e^{i\theta})|\,d\theta$$

(где $\log^+ x=\max(0,\log x)$) ограничен при $0\leqslant\rho<1$. В реферируемой заметке устанавливаются следующие неравенства:

$$\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n^{-1}|S_n(e^{i\theta})-\tau_n(e^{i\theta})|^2\right\}^{1/2}d\theta\leqslant A\cdot Z[F(e^{i\theta})]+A, \quad (1)$$

$$\int_0^{2\pi}\max_k|S_{n_k}(e^{i\theta})|\,d\theta\leqslant B\cdot Z[F(e^{i\theta})]+B, \quad (2)$$

где $n_{k+1}/n_k>\alpha>1$, A, B (и ниже C) — абсолютные постоянные.

Доказательства основываются на обобщенном неравенстве Зигмунда

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{\sum_{\nu=1}^{N}|f_\nu(\theta)|^2}\,d\theta\leqslant 2C\cdot Z\left[\sum_{\nu=1}^{N}|f_\nu(\theta)|^2\right]^{1/2}+C \quad (3)$$

и неравенстве Литлвуда и Пейли (Littlewood J. E., Paley R. E. A. C., J. London Math. Soc., 1931, **6**, 230—233) для функций $F(z)\in H^p$ $(p<1)$ и $g^2(\theta)=\int_0^{2\pi}(1-\rho)|F'(\rho e^{i\theta})|^2\,d\rho$. Из (3) автор выводит

$$\int_0^{2\pi}\left[\sum_0^{\infty}|S_{n_k}(e^{i\theta})-\tau_{n_k}(e^{i\theta})|^2\right]^{1/2}d\theta\leqslant$$

$$\leqslant C_\alpha\cdot Z[F(e^{i\theta})]+C_\alpha. \quad (4)$$

Соотношение (4) обеспечивает существование максимальной функции в (2). При помощи неравенства

$$\int_0^{2\pi}\sigma^*(\theta)\,d\theta\leqslant A\cdot Z[F(e^{i\theta})]+A$$

Харди и Литлвуда (Hardy G. H., Littlewood J. E., Acta math., 1930, **54**, 81—116) (2) следует из (4) и соотношения

$$\max|S_{n_k}(\theta)|\leqslant\sigma^*(\theta)+\sqrt{\sum_1^{\infty}|S_{n_\kappa}-\tau_{n_\kappa}|^2}.$$

[Chen Kien-Kwong

6341. О приближении непрерывных действительных функций обыкновенными полиномами. Фрёйд (Über die Approximation reeller stetigen Funktionen durch gewöhnliche Polynome. Freud G.), Math. Ann., 1959, **137**, № 1, 17—25 (нем.)

Пусть $f(x)$ на $[-1,1]$ r (r — целое $\geqslant 0$) раз непрерывно дифференцируема и пусть

$$\omega_2^{(r)}(\delta)=\sup_{\substack{|x_1-x_2|<\delta,\\ x_1,x_2\in[-1,1]}}\left|f^{(r)}(x_1)+f^{(r)}(x_2)-2f^{(r)}\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right|.$$

Доказывается, что найдется последовательность алгебраических полиномов $P_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ степени $\leqslant n$, для которых

$$|f(x)-P_n(x)|\leqslant C(r)\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^r\times$$

$$\times\left[\omega_2^{(r)}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n}\right)+\omega_2^{(r)}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

$$-1\leqslant x\leqslant 1.$$

Этот результат ранее был получен В. К. Дзядыком (РЖМат, 1 59, 57 6). Г. К. Лебедь

6342. Об ограниченности ортогональных полиномов. I. Фреи (Ortogonális polinomok korlátosságáról. I. Frey Tamás), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1958, **8**, № 1, 67—87 (венг.)

Пусть $\omega_n(x)$, $\pi_n(x)$ — системы ортогональных полиномов соответственно с весами $w(x)$, $p(x)$ на $[-1,1]$. Автор находит условия для $w(x)$, $p(x)$, которые обеспечивают, что $\omega_n(x)$, $\pi_n(x)$ имеют сходное поведение при $n\to\infty$, причем устанавливаются границы вида

$$|\omega_n(\xi)|\leqslant C\sum_{\nu=0}^{s}|\pi_{n-\nu}(\xi)|,\quad |\pi_n(\xi)|\leqslant$$

$$\leqslant C'\sum_{\nu=0}^{s}|\omega_{n-\nu}(\xi)|,$$

где s, C, C' не зависят от n. В результате Короуса (см. Szegö G., Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc., New York, 193) $s=1$ и $w(x)/p(x)$, $p(x)/w(x)$ ограничены и удовлетворяют условию Липшица. В обобщениях реферируемой статьи может быть конечное число точек, в которых эти отношения не удовлетворяют условию Липшица и могут быть бесконечными. В такой точке x_j требуются неравенства вида

$$p|x-x_j|^{A_j}\leqslant p(x)\leqslant P|x-x_j|^{a_j},$$

$$w|x-x_j|^{B_j}\leqslant w(x)\leqslant W|x-x_j|^{b_j},$$

где w, W, p, P — положительные постоянные и $-1<a_j\leqslant A_j<a_j+1$, причем $-1<a_j\leqslant A_j<a_j+\frac{1}{2}$, если $x_j=\pm 1$, и аналогично для b_j, B_j. Случай полиномов на единичном круге также рассматривается и играет

роль в доказательстве. Наконец, автор доказывает результаты, в которых ослабляется условие Липшица. Например, если $k(x) = w(x)/p(x)$, то можно взять

$$|k(x) - k(x_0)| \leqslant |x - x_0|^{1/2} \; g(|x - x_0|)$$

для $x_0 - \lambda < x < x_0 + \lambda$, где $k(x_0) > 0$ и $\int_0^\lambda t^{-1} g^2(t)\,dt < \infty$.

F. V. Atkinson

Перевод из Math. Revs, 1959, 20, № 3, 296.

6343. Приближение и квазианалитические функции. Хорват (Approximation and quasi-analytic functions. Horváth Juan), Publ. Sec. Mat. Fac. Cienc., Univ. Madrid, 1956, 1, № 1, 93 p. (исп.)

Содержится текст лекций в Мадридском университете в 1955 г., касающихся результатов, полученных по проблеме С. Н. Бернштейна. Даны основные идеи и обобщения, рассматриваются приложения и связи с другими вопросами анализа, квазианалитическими функциями и проблемой моментов. E. Frank

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 389.

6344. О некоторых процессах приближения функций. Гельфонд (Über einige Prozesse der Approximation von Funktionen. Gelfond A. O.), Leonhard Euler 250. Geburtstag. Berlin, Akad. Verl., 1959, 120—129 (нем.; рез. русск.)

Исследуется вопрос о приближении непрерывных на полуоси функций с помощью процессов, аналогичных процессу С. Н. Бернштейна для интервала $(0, \infty)$. В частности, рассмотрен процесс приближения $f(x)$ на $(0, \infty)$ с помощью функций $\{e^{-k^x} x^n\}$ $(k, n = 1, 2, \ldots)$ и найдены условия сходимости суммы

$$\frac{x}{\Gamma(t+1)} \sum f\left(\frac{t}{k}\right) e^{-kx} (kx)^t$$

к $f(x)$ при неограниченно растущем t. Резюме автор

6345. О взвешенно-наилучшем приближении функций многих переменных при помощи многочленов. Джафаров А. С., Физ. вә ријазијјат инст. әсәрләри. АзәрбССР. Елмләр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1959, 8, 117—133 (рез. азерб.)

Доказывается несколько теорем относительно связи между взвешенно-наилучшими равномерными приближениями функций многих переменных при помощи многочленов и структурно-дифференциальными свойствами функций. Часть из них является обобщениями соответствующих теорем М. М. Джрбашяна.

6346. Приближение функции при помощи рациональных дробей. Рошкэу (Aproximarea funcţiilor prin fracţii raţionale. Roşcău H.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Cluj. Cluj, 1959, 95—100 (рум.; рез. русск., франц.)

В первой части работы дается метод для определения выражения рациональной дроби

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \Big/ \sum_{i=0}^{m} b_i x^i,$$

данного Коши, когда известны $m + n$ значений функции $u(x)$. Во второй части дается выражение остатка в случае приближения функции $f(x)$ при помощи дроби $u(x)$, значения которой совпадают со значениями $f(x)$ при $m + n$ значениях x. Резюме автора

6347. Об одной экстремальной задаче для некоторых монотонно-возрастающих функций. Рымаренко Б. А., Подольный И. П., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 2, 217—220

Рассматривается задача о нахождении $\inf g_{2n}(x)$, $g_{2n} \in G_{2n}$, где G_{2n} — класс функций вида

$$g_{2n}(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2} y_{2n}(z)\,dz,$$

причем $y_{2n}(x)$ — многочлен степени $2n$ с вещественными коэффициентами, неотрицательный на всей вещественной оси и подчиненный условиям

$$y_{2n}(\xi_k) = s_k^2 \quad (k = 1, 2, \ldots, p \leqslant n).$$

Дается асимптотическое решение этой задачи (при $n \to \infty$ и фиксированном p) и точное решение в том частном случае, когда заданные абсциссы $\{\xi_k\}_1^n$ являются корнями многочлена Эрмита степени n.

Я. Л. Геронимус

6348. Интерполяционные полиномы. Раис (Interpolációs polinomok. Raisz Iván), Nehézipari musz. egyet. közl., 1957, № 1, 287—293 (венг.)

Рассматриваются интерполяционные полиномы Эрмита, для которых заданы в узлах значения первых $n - 1$ производных (а также значения функции). Для $n = 3$ указываются явные формулы. В случае узлов в нулях полинома Якоби и произвольном n изучается положение нулей вспомогательных полиномов; из этого следует, что при четном n лебегова функция процесса равномерно ограничена внутри основного интервала, при нечетном n это никогда не имеет места. Доказательства не приводятся.

T. Frey

См. также: 6012, 6091, 6094, 6099, 6161, 6281, 6497, 6518, 6624, 6632, 6646, 6653, 6672.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Редакторы *А. И. Маркушевич, Г. Ц. Тумаркин*

6349. О бесконечных условно сходящихся произведениях комплексных чисел. Бентон (Sur les produits infinis complexes semi-convergents. Benneton Gaston), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 17, 1284 (франц.)

Рассматривается бесконечное произведение $\prod_1^\infty (1 + u_n)$.

Из разложения

$$\ln(1 + u_n) = u_n - \frac{1}{2} u_n^2 + \ldots + \frac{(-1)^k}{k-1} u_n^{k-1} - \frac{(-1)^k}{k} \lambda_{k,n} u_n^k,$$

немедленно получается, что если $k - 1$ рядов $\sum_1^\infty u_n$, $\sum_1^\infty u_n^2, \ldots, \sum_1^\infty u_n^{k-1}$ сходятся, а ряд $\sum_1^\infty u_n^k$ абсолютно сходится, то произведение $\prod_1^\infty (1 + u_n)$ будет сходиться. Л. А. Маркушевич

6350. Новые исследования о нулях частных сумм степенных рядов. Долинский (Neuere Untersuchungen über Nullstellen der Abschnitte von Potenzreihen. Dolinsky R.), Abstr. Short communs Internat. Con-

gress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 46 (нем.)

6351. Замечание о суммируемости ряда Тейлора на границе его круга сходимости. II. Алпар (Remarque sur la sommabilité des séries de Taylor sur leurs cercles de convergence. II. Alpár László), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958(1959), **3**, № 3-4, 141—158 (франц.; рез. венг., русск.)

Часть I см. РЖМат, 1960, 1576.

Доказана теорема: Пусть k — целое неотрицательное число. Если степенной ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n ,$$

сходящийся в круге $|z| < 1$, суммируем в точке $z = 1$ к числу s (C, k)-методом, то ряд

$$f_2(z) = f_1\left(\frac{z-\zeta_0}{1-\bar{\zeta}_0 z}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu(\zeta_0) z^\nu ,$$

где $0 < |\zeta_0| < 1$, суммируем в точке $z = \dfrac{1+\zeta_0}{1+\bar{\zeta}_0}$ к тому же числу s $(C, k+1)$-методом. Смотри также РЖМат, 1960, 1575.

Н. А. Давыдов

6352. Теоремы об аналитическом продолжении, которые встречаются при изучении функционального уравнения Римана. Бохнер (Theorems on analytic continuation which occur in the study of Riemann's functional equation. Bochner S.), J. Indian Math. Soc., 1957, **21**, № 3-4, 127—147 (англ.)

По утверждению автора, данная статья есть дополнение к статье автора (РЖМат, 1959, 10787). Теоремы, о которых идет речь в заголовке, не новы, но им здесь даются прямые и более короткие доказательства. Первая теорема — теорема Мандельбройта (РЖМат, 1956, 6553; стр. 247) — состоит в следующем. Пусть $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n \uparrow \infty$, — последовательность положительных чисел, причем $\overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{n}{\lambda_n} < \infty$. Рассмотрим всевозможные целые функции $G(z)$ первого порядка конечного типа, которые в точках λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ имеют простые нули. Нижнюю границу типов этих функций назовем типом τ_λ последовательности $\{\lambda_n\}$. Утверждается, что ряд Дирихле

$$f(s) = \sum_1^{\infty} a_p e^{-\lambda_p s} , \quad s = \sigma + it ,$$

сходится в полуплоскости $\sigma > 0$, а сумма $f(s)$ аналитически продолжима и ограничена в полуполосе $-\infty < \sigma \leqslant \varepsilon$, $|t| < \tau_\lambda + \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$, то $f(s) \equiv 0$ (у Мандельбройта вместо τ_λ фигурирует верхняя усредненная плотность последовательности $\{\lambda_n\}$.

Другие теоремы касаются аналитического продолжения функции

$$F(z) = \sum_0^{\infty} (-1)^n f(n) z^n$$

из круга сходимости ряда, где $f(z)$ — аналитическая функция в той или иной области, имеющая в этой области определенный рост.

Все эти теоремы применяются для исследования функционального уравнения

$$(2P\pi)^{1/2s} \Delta_1(s)\varphi(s) = (2P\pi)^{-1/2s} \Delta_2(s)\psi(-s) , \quad (1)$$

где

$$\Delta_1(s) = \prod_{j=1}^{k} \Gamma(p_j s + c_j), \quad \Delta_2(s) = \prod_{j=k+1}^{H} \Gamma(p_j s + c_j),$$

$$\varphi(s) = \sum_1^{\infty} a_m \lambda_m^{-s} , \quad \psi(s) = \sum_1^{\infty} b_m \mu_m^{-s} ,$$

причем $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$

Частный случай этого уравнения рассматривался ранее в работах Бохнера и Чандрасекхарана (РЖМат, 1958, 272) и Чандрасекхарана и Мандельбройта (РЖМат, 1959, 10786). Указаны случаи, когда уравнение (1) не имеет решений. Такой случай мы будем иметь, например, если тип τ_μ последовательности $\{\mu_n\}$ равен нулю.

А. Ф. Леонтьев

6353. О некоторых свойствах рядов по полиномам Фабера. Краснощекова Т. И., Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 1, 38—41

Рассматриваются ряды по системе $\{\Phi_n(z)\}$ полиномов Фабера, соответствующих односвязной и ограниченной области B. Указывается на связь между свойствами рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Phi_n(z)$ по полиномам Фабера и степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ с теми же коэффициентами, наличие которой позволяет распространить на ряды по полиномам Фабера ряд известных теорем для степенных рядов. Эта связь иллюстрируется показом перенесения на ряды по полиномам Фабера хорошо известной теоремы Островского о сверхсходимости степенных рядов и одной теоремы А. И. Селезнева (Матем. сб., 1947, **20**, № 2). Отмечается, что подобным же методом можно сразу получить распространение на ряды по полиномам Фабера ряда других теорем.

Г. Ц. Тумаркин

6354. Об одной теореме о полноте. Косис (A completeness theorem. Koosis Paul), Portugaliae math., 1956, **15**, № 3-4, 111—113 (англ.)

Пусть $\hat{m}(\lambda) = \int e^{i\lambda x}\, dm(x)$, интеграл берется по замкнутому конечному интервалу I, причем I нельзя заменить меньшим интервалом без изменения значения интеграла (I — наименьший замкнутый интервал, содержащий носитель (support) меры m). Пусть a_k $(k = 0, 1, \ldots)$ — различные нули функции $\hat{m}(\lambda)$, $(n_k + 1)$ — кратность нуля a_k.

Доказывается, что система $\{x^n e^{ia_k x}\}$ $(n = 0, 1, \ldots, n_k;$ $k = 0, 1, \ldots)$ полна (в смысле равномерной аппроксимации) в любом интервале, длина которого меньше длины интервала I.

А. Ф. Леонтьев

6355. О свойствах последовательностей линейных агрегатов, сходящихся в области, где порождающая линейные агрегаты система функций не является полной. Леонтьев А. Ф., Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 5, 26—37

Рассматривается последовательность линейных агрегатов $P_n(z) = \sum_{j=1}^{P_n} a_{nj} f_j(z)$, равномерно сходящаяся в области D. Предполагая, что система $\{f_n(z)\}$ не полна в области D, автор ставит общую задачу об определении свойств последовательности $P_n(z)$ и их предельных функций.

Для изучения этих свойств автор излагает метод, аналогичный применяемому в качественной теории дифференциальных уравнений. Метод заключается в том, что вначале строится уравнение, которому удовлетворяют функции $\{f_n(z)\}$, и затем проводится исследование по виду полученного уравнения свойств его общего решения.

Автор подробно останавливается на системах

$$\{e^{-\lambda_n z}\} \quad (1)$$

и

$$\{f(\lambda_n z)\}. \quad (2)$$

Для изучения свойств $P_n(z) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} e^{-\lambda_j z}$ и их предельных функций рассматриваются уравнения

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n y^{(n)}(z) = 0 \quad (L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n -$$

функция экспоненциального типа с нулями в точках λ_n), $\frac{1}{2\pi i}\int_C \gamma(t-z)\, y(t)\, dt = 0$, где $\gamma(u)$ — функция, ассоциированная по Борелю с функцией $L(z) = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{\lambda_n^2}\right)$, C — замкнутый контур, охватывающий вертикальный отрезок длины $2\pi\sigma$ с центром в точке z, внутри которого функция $y(t)$ аналитическая.

Для изучения свойств $P_n(z) = \sum_{j=1}^{n} a_{nj} f(\lambda_j z)$ приводится уравнение $\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=R-\varepsilon} \gamma(z,t)\, P(t)\, dt = 0$, где $\gamma(z,t) = \sum_0^{\infty} \frac{A_n(z)}{t^{n+1}}$, $A_n(z) = \frac{B_n(z)}{\alpha_n}$, а $B_n(z)$ определяется из разложения

$$f(z,\eta)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^m}{\lambda_n^m}\right) = \sum_0^{\infty} B_n(z)\,\eta^n.$$

Накладывая на $\{\lambda_n\}$ ограничения, обеспечивающие неполноту систем (1) и (2), автор дает обзор известных результатов исследования приведенных уравнений и их решений.

В заключение отмечается, что такая же общая задача может быть поставлена и в действительной области, и приводятся некоторые полученные здесь результаты.

Э. З. Шувалова

6356. О свойствах последовательностей линейных агрегатов, сходящихся в области, где порождающая линейные агрегаты система функций не является полной. **Леонтьев** (On properties of sequences of linear aggregates that converge in a region in which the system of functions generating the linear aggregates is not complete. Leont'ev A. F.), Amer. Math. Soc. Translat., 1958, **10**, 1—12, (англ.)

Перевод с русского (реф 6355).

6357. Приближение полиномами на кривых. **Уэрмер** (Polynomial approximation on curves. Wermer John), Semin. Analyt. Funct. Vol. 1. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, (1958), 221—235 (англ.)

Приводится результат, который также подробно изложен автором в другой его статье (реф. 6358).

Л. А. Маркушевич

6358. Оболочка кривой в C^n. **Уэрмер** (The hull of a curve in C^n. Wermer John), Ann. Math., 1958, 68, № 3, 550—561 (англ.)

Оболочка $h(S)$ компактного множества S в пространстве n комплексных переменных C^n определяется как множество точек x таких, что для любого полинома P от n комплексных переменных выполняется неравенство $|P(x)| \leqslant \max_{y\in S} |P(y)|$. Очевидно, что $h(S)$ — компактное множество и $S \subseteq h(S)$. Г. Е. Шилов показал, что если связно множество S, то и $h(S)$ связно. Общая задача об оболочках заключается в характеристике множества $h(S)$. В частности, возникает вопрос, когда $h(S) = S$. Де Леу занимался этими вопросами в случае круговых множеств S (РЖМат, 1957, 7841).

Автор рассматривает случай, когда S — простая замкнутая жорданова кривая или дуга, допускающая аналитическую параметризацию. Множество $\sum$ в C^n называется аналитической поверхностью, если каждая точка p на $\sum$, за исключением дискретного множества точек, называемых кратными точками, имеет окрестность U в C^n такую, что $U\cap\sum$ является образом круга $|\lambda| < r$ при гомеоморфизме $\lambda \to Y(\lambda)$, при котором координаты точек $Y(\lambda)$ — аналитические функции λ в $|\lambda| < r$, причем окрестность кратной точки представляется в виде суммы конечного числа множеств, каждое из которых является образом круга при аналитическом гомеоморфизме. Доказываются теоремы:

Теорема 1. Пусть Γ — кривая с параметризацией $z_t = \varphi_t(z)$, $t = 1,\ldots,n$, $|z| = 1$. Причем предположим выполнение условий: 1) каждая функция φ_t аналитична в кольце, содержащем круг $|z| = 1$, 2) функции $\varphi_t(z)$ вместе разделяют точки окружности $|z| = 1$, 3) $\varphi'_1(z) \neq 0$ при $|z| = 1$. Тогда либо $h(\Gamma) = \Gamma$, либо $h(\Gamma) - \Gamma$ — аналитическая поверхность, содержащая самое большее конечное число кратных точек.

Теорема 2. Чтобы $h(\Gamma) \neq \Gamma$, необходимо и достаточно

$$\int_{|z|=1} \varphi_1^{m_1}(z)\,\varphi_2^{m_2}(z)\ldots\varphi_n^{m_n}(z)\,\varphi_1'(z)\,dz = 0$$

при всех целых $m_1, m_2, \ldots, m_n \geqslant 0$.

Теорема 3. Пусть j — дуга с параметризацией $z_t = \psi_t(t)$, $t = 1,\ldots,n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $\psi_t(t)$ — аналитические функции на отрезке $[0,1]$ и вместе разделяют точки отрезка и пусть $\psi_t'(t) \neq 0$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда всякая непрерывная функция на j равномерно приближается полиномами. Следовательно, $h(j) = j$.

При доказательствах используются результаты в предыдущих работах автора (РЖМат, 1957, 8966, 9918).

Л. А. Маркушевич

6359. О полноте полиномов многих переменных при взвешенно-квадратичном приближении. **Тавадян А. Б.**, Докл. АН АрмССР, 1955, **21**, № 4, 149—156 (рез. арм.)

М. М. Джрбашян доказал, что система полиномов будет полна в пространстве $L_2[q(x)]$ при взвешенно-квадратичном приближении на всей оси $(-\infty, +\infty)$ в смысле:

$$\inf_{\{Q\}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q(x)} |f(x) - Q_n(x)|^2\, dx = 0,$$

если $q(x) \geqslant p(|x|)$ при $|x| \geqslant R_0$, где $p(x)$ — нормально возрастающая на $[1, +\infty)$ функция, удовлетворяющая условию:

$$\int_1^{+\infty} \frac{P(x)}{x^2}\, dx = +\infty$$

(Докл. АН АрмССР, 1947, **7**, № 1, а также РЖМат, 1956, 7277).

Автор, используя цитированный результат М. М. Джрбашяна, распространяет его на приближение в среднем полиномами в пространстве многих переменных. Отнесем к классу $L_2[q_1(x),\ldots,q_n(x_n)]$ все функции, определенные во всем n-мерном пространстве B_n $(-\infty < x_k < +\infty,\ k = 1,\ldots,n)$, для которых

$$\int\ldots\int_{B_n} e^{\sum_{k=1}^{n} q_k(x_k)} \cdot |f(x_1,\ldots,x_n)|^2\, dx_1\ldots dx_n < +\infty$$

Теорема 1. Если для каждой из функций $q_k(x)$ найдется функция $p_k(x)$, удовлетворяющая указанным в теореме Д. М. Джрбашяна условиям, то система полиномов $\{Q\}$ от переменных $x_1,\ldots,x_n$ будет полна в пространстве $L_2[q_1(x_1),\ldots,q_n(x_n)]$.

Г. Ц. Тумаркин

6360. К проблематике Монтеля — Миранда в теории нормальных семейств. Сюн Цин-лай (Hiong King-lai), Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica, 1959, **9**, № 1, 76—86 (кит., рез. франц.)

Основное содержание статьи ранее было опубликовано автором на французском языке (РЖМат, 1959, 8995; 1960, 276). А. А. Гольдберг

6361. Изотермические семейства кривых и соответствующие экстремальные проблемы конформного отображения. Пирль (Isotherme Kurvenscharen und zugehörige Extremalprobleme der konformen Abbildung. Pirl Udo), Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle—Wittenberg. Math.-naturwiss. Reihe., 1955, **4**, № 6, 1225—1257 (нем.)

Пусть $\mathfrak{B}$ — множество всех n-связных однолистных областей B плоскости w, ограниченных невырожденными континуумами $k_1, k_2, \ldots, k_n$; $\mathfrak{A}_B$ — класс систем A_B неперекрывающихся, принадлежащих B и покрывающих B (это условие несущественно) областей („полос") F_ν, таких, что модуль-линии области F_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) гомотопны соответственно k_ν; M_ν — модуль области F_ν; α_ν — данные положительные числа. Предельные системы A_B, в которых часть областей F_ν вырождается в k_ν, включается в $\mathfrak{A}_B$. Для фиксированной $B \in \mathfrak{B}$ изучается задача о максимуме

$$\prod_{\nu=1}^{n} M_\nu^{\alpha_\nu^2} \quad \text{или суммы} \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu^2 \log M_\nu \qquad (1)$$

в классе $\mathfrak{A}_B$. Доказывается существование и единственность решения задачи на следующем пути.

Достаточно в качестве $\mathfrak{B}$ рассматривать множество (нормированных) круговых областей, зависящее от $3n-6$ параметров p'_k (радиусы, координаты центров, граничных окружностей), которому в пространстве точек $P' \equiv (p'_1 \ldots p'_n)$ взаимно однозначно соответствует открытое множество M'. Из прямоугольников R_ν со сторонами γ_ν, γ'_ν длины $2\pi\alpha_\nu$ и отождествляемыми сторонами длины α_ν $\frac{\log M_\nu}{2\pi}$ конструируется путем соединения R_ν определенным образом вдоль сторон γ'_k риманово многообразие R с границей $\bigcup_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu$, конформно (за исключением точек ветвления b_l) отображаемое, пусть функцией $\varphi(w)$, на некоторую область $B \in \mathfrak{B}$ так, что система $\{R_\nu\}$ переходит при этом в систему F_ν типа A_B. Риманово многообразие R зависит от $3n-6$ параметров p_k, где при $k = 1, 2 \ldots n$

$$p_k = \alpha_k \log M_k \quad \text{при} \quad M_k > 1. \qquad (1)$$

и (существенно для доказательства) при $M_k = 1$ область значений p_k, с соответствующим изменением R, продолжается автором на некоторый полуинтервал $\alpha_k \leqslant p_k < \alpha_k^0$; остальные параметры p_k определяют на $\gamma'_1 \ldots \gamma'_n$ длины склеиваемых участков и положение особых точек-прообразов узлов $w = b_s$ семейства модуль-линий системы $\{F_\nu\}$. Выводится методом непрерывности с привлечением теорем метода полос Грётша, что открытое множество M точек $P = \{p_1, p_2 \ldots p_n\}$, соответствующих допустимым R, топологически отображается на все P и обратно, каждой $B \in \mathfrak{B}$ соответствует одно и только одно риманово многообразие R, конформно отображаемое на B (с переводом $\{R_\nu\}$ в $\{F_\nu\} \in A_B$). Наконец, обнаруживается, что для R решение экстремальной задачи (1) дается именно разбиением R на $\widetilde{F}_\nu \equiv R_\nu$, составляющие R.

В этом смысле функция $\varphi(w)$ определяет экстремальное разбиение B на $\{F_\nu\}$, причем модуль-линии F_ν оказываются в метрике $ds = |\varphi'(w)|\,|dw|$ геодезическими длины $2\pi\alpha_\nu$, и на них $\operatorname{Re}\varphi(w) = \text{const}$.

Теорема распространяется также на случай, когда некоторые из α_ν равны нулю; когда m из граничных континуумов k_ν вырождаются в точки $w = a_k$ (соответствующие M_k в (1) здесь заменяются на конформный радиус области $F_k + a_k$ относительно a_k). В случае $m = n$ на основании изучения поведения $\varphi(w)$ в окрестности особых точек a_k, b_l указано общее выражение $\varphi(w)$ через содержащий вообще неизвестные постоянные гипер-эллиптический интеграл, а при $n = 3$ — полное решение. В частных случаях данная задача и близкие к ней изучались ранее другими методами Г. М. Голузиным, Шиффером (Schiffer M.) А. И. Колбиной и другими.

Примечание референта. Замечание автора о „теоретико-множественных" затруднениях применения метода М. А. Лаврентьева (стр. 1226—1 27) является неверным, поскольку, как показано референтом, методом М. А. Лаврентьева может быть выведена основная варизционная формула метода Г. М. Голузина, следовательно, и заключение о кусочной аналитичности границ экстремальных областей. П. П. Куфарев

6362. Об изотермических семействах кривых заданного топологического характера и об одной связанной с этим экстремальной проблеме конформного отображения. Пирль (Über isotherme Kurvenscharen vorgegebenen topologischen Verlaufes und ein zugehöriges Extremalproblem der konformen Abbildung. Pirl Udo), Math. Ann., 1957, **133**, № 2, 91—117 (нем.)

Продолжая изучение возможных расположений изотермических семейств кривых с конечным числом особых точек, заполняющих заданную n-связную область (реф. 6361), автор в данной статье рассматривает следующую связанную с этим задачу. Пусть B — n-связная круговая однолистная область, ограниченная окружностями k_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) и нормированная заданием центров k_1, k_2, k_3; k_1: $|w| = r_1$, $r_1 > 1$, k_2: $|w| = r_2 < 1$, k_3: $|w - 1| = r_3$, $r_3 < \min(r_1 - 1, 1 - r_2)$; A — произвольная система $2n-3$ двусвязных лежащих в B неперекрывающихся областей F_k, из которых F_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) отделяет k_ν от остальных $k_{\nu'}$, а $F_{n+\mu}$, $\mu = 1, \ldots, n-3$, отделяет друг от друга какие-либо две дополнительные, различные для различных μ, системы m_μ, $2 \leqslant m_\mu \leqslant n-2$, и $n - m_\mu$ окружностей k_ν. Рассматривается задача о максимуме суммы

$$\sum_{\nu=1}^{2n-3} \frac{\alpha_\nu^2 \log M_k}{2\pi}, \quad \alpha_\nu \geqslant 0, \quad \sum_{\nu=1}^{2n-3} \alpha_\nu = 1,$$

где M_ν — модуль F_ν или, если k_ν вырождается в точку $w = a_\nu$, конформный радиус области $F_\nu + a_\nu$ относительно a_ν. При этом к сравнению привлекаются системы (B, A), „принадлежащие одному топологическому классу". Тем же методом, что для аналогичной задачи в цитированной работе, доказывается, что решение зада-

чи существует и единственно. Экстремальные области $\overline{F}_\nu$ в совокупности покрывают B; модуль-линии их являются кривыми, на которых для функции $z=\varphi(w)$, конформно (исключая точки ветвления) отображающей B на соответствующее специальное риманово многообразие $\operatorname{Re}\varphi(w)=\text{const}$, и в метрике $ds=|\varphi'(w)|\,dw$ представляют в каждой F_ν геодезические линии длины $2\pi\alpha_\nu$. Так же, как в предыдущей работе, определено до постоянных аналитическое выражение $\varphi(w)$, когда все k_ν вырождаются в точки, и при $n=3$ $\varphi(w)$ определена полностью. П. П. Куфарев

6363. Конформное преобразование областей, составленных из прямоугольников, на единичный круг. Чернин К. Е., Тр. Матем. ин-та. АН СССР, 1959, 53, 307—312

Функция, отображающая заданную область с границей Γ на единичный круг, представляется в виде $F(z)=(z-z_0)e^{-(g+ih)}=re^{i\varphi}e^{-(g+ih)}$, где $r=|z-z_0|$, $\varphi=\arg(z-z_0)$, $g=g(x,y)$ — решение задачи Дирихле $g(x,y)|_\Gamma=\ln r$. В применении к областям, составленным из прямоугольников, предлагается находить функцию h как решение задачи Неймана $\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_\Gamma=\frac{\partial \ln r}{\partial s}$ вместо того, чтобы восстанавливать ее по функции g путем интегрирования. Приводится числовой пример.

Г. Н. Положий

6364. Об одной экстремальной проблеме конформного отображения. Гайер (Über ein Extremalproblem der konformen Abbildung. Gaier Dieter), Math. Z., 1959, 71, № 1, 83—88 (нем.)

Пусть K_M — класс ограниченных двусвязных областей G с модулем M, $L(G)$ — точная нижняя грань длин спрямляемых кривых, охватывающих внутренний граничный континуум, $A(G)$ — площадь области. Указывается на важность исследования величины $\sup\limits_{G\in K_M}\{(L(G))^2/A(G)\}$, которая является модификацией экстремальной длины Альфорса (Ahlfors L. V., Acta math., 1950, 83, 101—129). Автор исследует упрощенную проблему, рассматривая вместо $L(G)$ диаметр $D(G)$ внутренней граничной компоненты, вместо $A(G)$ — площадь $E^*(G)$ области, ограничиваемой внешней граничной компонентой. Для этого случая устанавливается равенство

$$\sup_{G\in K_M}\frac{(D(G))^2}{A^*(G)}=\frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M^{2(2k-1)}}{(2k-1)(M^{4(2k-1)}-1)},$$

а также указывается соответствующая экстремальная функция.

Для доказательства сначала показывается, что

$$\sup_{M\in K_M}\{(D(G))^2/A^*(G)\}=\sup_{G\in K_M}\{(L(G))^2/A(G)\},$$ где L_M — подкласс K_M, а затем используются свойства однолистных отображений на канонические области. Отмечаются приложения к исследованию сходимости итераций конформных отображений и к расчету цилиндрических конденсаторов. И. Н. Песин

6365. Приложения вариационных методов в теории конформного отображения. Шиффер (Applications of variational methods in the theory of conformal mapping. Schiffer M. M.), Proc. Sympos. Appl. Math., 1958, 8, 93—113 (англ.)

Излагаются основные идеи некоторых вариационных методов в теории конформного отображения. Дается представление об известных вариационных формулах автора (для однолистных функций, для функции Грина, для собственных значений Фредгольма) и о приложениях этих формул. В работе не упоминается о вариационных методах Г. М. Голузина и М. А. Лаврентьева за исключением указаний в прилагаемом списке литературы на соответствующие работы Г. М. Голузина.

Ю. Е. Аленицын

6366. Несколько приближенных формул в теории конформных отображений. Хара И. С., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 6, 1210—1213

Для областей, составленных из прямоугольников, приводятся формулы, устанавливающие приближенно связь постоянных Кристоффеля — Шварца с длинами сторон многоугольника и их отношениями. Метод основан на приближенном вычислении соответствующих определенных интегралов. Г. Н. Положий

6367. О каноническом конформном отображении Уолша. Дженкинс (On a canonical conformal mapping of J. L. Walsh. Jenkins James A.), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, 88, № 1, 207—211 (англ.)

Дано новое, основанное на использовании свойств квадратических и линейных дифференциалов, доказательство теорем Уолша (Walsh J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, № 82, 128—146), обобщающих известные результаты Валле-Пуссена и Жюлиа о канонических конформных отображениях многосвязных областей, связанных с линиями уровня полиномов и рациональных функций.

Охарактеризуем первую из теорем. Пусть D — область на z-сфере с невырожденными граничными компонентами $B_1, B_2, \ldots, B_\mu$; $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$; $\omega(z)$ — гармоническая мера $\overset{\nu}{\underset{j=1}{\cup}} C_j$ относительно D, $\widetilde{\omega}(z)$ — сопряженная ей, $f(z)=\omega(z)+i\widetilde{\omega}(z)$; D^* — односвязная область, получаемая из D проведением разрезов по непересекающимся аналитическим дугам β_j (и γ_j), соединяющим точку $P\in D$ (и $P'\in D$) соответственно с $B_j(C_j)$, и по дуге δ, соединяющей P с P'; $\sigma_j'(\tau_j')$ — длина отрезка — образа $B_j(C_j)$ при отображении D^* функцией (ветвью) $if(z)$:

$$2\pi\tau=\sum_{j=1}^{\mu}\sigma_j'=\sum_{j=1}^{j=\nu}\tau_j',\quad \sigma_j=(2\pi\tau)^{-1}\sigma_j',$$

$$\tau_j=(2\pi\tau)^{-1}\tau_j';\ \zeta(z)=(2\pi\tau)^{-1}if(z),\ R_0=\zeta(D^*),$$

R — область, получаемая после присоединения к R_0 бесконечных полуполос H_j в $\operatorname{Im}(\zeta)>0$ и K_j в $\operatorname{Im}(\zeta)<0$ вдоль отрезков $\zeta(B_j)$ и $\zeta(C_j)$; S — абстрактная риманова поверхность эллиптического типа, полученная из R после определенных отождествлений частей границы R, присоединения точек $P_j(Q_j)$, соответствующих бесконечно удаленным точкам полуполос $H_j(K_j)$ и выбора локальных униформизирующих параметров; $a_j(b_j)$ — образы $P_j(Q_j)$ при конформном отображении S на Z-сферу. Доказывается, что

$$T(Z)\equiv\exp(-2\pi i\zeta)=A\frac{\prod_{j=1}^{\mu}(Z-a_j)^{\sigma_j}}{\prod_{j=1}^{\nu}(Z-b_j)^{\tau_j}}$$

и, таким образом, окончательно D конформно отображается на область Δ Z-сферы, для точек которой $1<|T(\zeta)|<e^{1/\tau}$, причем геометрическое место точек $|T(T)|=1$ ($|T(Z)|=e^{1/\tau}$) состоит из $\mu(\nu)$ кривых — образов $B_j(C_j)$, которые отделяют соответственно точки $a_j(b_j)$ от Δ. Подобным же образом, но с использованием вместо $\omega(z)$ линейной комбинации функций Грина с полюсами α_j, $\sum M_j g_j(z)$, доказывается теорема Уолша

„Пусть D — область z-сферы с граничными компонентами $C_1, \ldots, C_\nu$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ — произвольные различные точки D и $M_1, \ldots, M_\mu$ — произвольные положительные числа с $\sum_{j=1}^{\mu} M_j = 1$. Существует конформное отображение D на область Δ на Z-сфере, которая определяется неравенством

$$|T(Z)| < 1, T(Z) \equiv A \frac{\prod_{j=1}^{\mu} (Z - a_j)^{M_j}}{\prod_{j=1}^{\nu} (Z - b_j)^{N_j}} \quad N_j > 0,$$

$$\sum_{j=1}^{\nu} N_j = 1;$$

a_j являются соответственно образами α_j; геометрическое место точек $|T(Z)| = 1$ состоит из ν разобщенных аналитических кривых Жордана, которые суть образы C_j и отделяют Δ от b_j".

В теоремах 2 и 4 дано также новое доказательство единственности, в определенном смысле, указанных канонических отображений. П. П. Куфарев

6368. Некоторые теоремы искажения для многолистных отображений. Ландау, Осерман (Some distortion theorems for multivalent mappings. Landau H. J., Osserman R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 1, 87—91 (англ.)

Доказывается лемма: Пусть R — прямоугольник $|x|<a$, $|y| < b$, z-плоскости, $z = x + iy$. Пусть $w = f(z) = u + iv$ аналитична в R и непрерывна в $\overline{R}$. Пусть $|v| \leqslant b'$ при $|y| = b$, $u \geqslant a' > 0$ при $x = a$, $u \leqslant -a'$ при $x = -a$. Тогда $b/a \leqslant b'/a'$, с равенством только для $f(z) = (a'/a)z$. Известно несколько доказательств этой леммы. Авторы предлагают новое доказательство, использующее только соотношение

$$u'_x = v'_y. \qquad (1)$$

На основании этого сразу получается теорема типа Линделёфа для непрерывно дифференцируемых функций в полосе, удовлетворяющих условию (1) (теорема 2).

Небольшое изменение доказательства леммы позволяет установить теорему 3: Пусть W_i, $i = 1,2$ — произвольные римановы поверхности. Пусть R_i — компактные области на W_i, ограниченные конечным числом жордановых контуров, и пусть C_i — фиксированная граничная кривая на R_i, u_i — гармоническая мера C_i относительно R_i, p_i — период сопряженной к u_i функции при обходе C_i. Если $f(p)$ — аналитическое отображение R_1 в R_2 и если для некоторой (и, следовательно, для каждой) кривой C_1^*, гомологичной C_1, образ $f(C_1^*)$ гомологичен nC_2 при некотором целом n, то $p_1 \geqslant |n| p_2$.

Доказательство этой теоремы с обобщениями, не зависимое от леммы, составляет основную часть работы. Случай двусвязных плоских областей был ранее рассмотрен Шиффером (Schiffer M., Quart. J. Math., 1946, **17**, 197—213). И. Н. Песин

6369. О применении теоремы искажения Голузина. Ямагути Сугаку, 1953, **5**, № 2, 82—83 (японск.)

Пусть нечетная функция $f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{2\nu+1} z^{2\nu+1}$ регулярна и однолистна в единичном круге $|z| < 1$. Автор доказывает, что частичная сумма $\sigma_n(z) = z + \sum_{\nu=1}^{n} a_{2\nu+1} z^{2\nu+1}$ степенного ряда функции $f(z)$ представляет однолистную функцию в круге $|z| < 1 - \frac{3}{2} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$, что улучшает результат Л. Илиева (Докл. АН СССР, 1950, **70**, 9—11).

Пусть функция $f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ регулярна и однолистна в единичном круге $|z| < 1$, причем $|a_n| \leqslant 1$ $(n = 1,2,\ldots)$. Предположим, что радиус однолистности частичной суммы $s_n(z) = z + \ldots + a_n z^n$ степенного ряда функции $f(z)$ равен τ. Автор устанавливает неравенства $1/\sqrt{6} < \tau < 1/2$, если $n \neq 3$ и $1/\sqrt{7} < \tau < 1/2$, если $n = 3$, что является улучшением одного результата К. Иоха (Joh K., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, 1939, **21**, № 5). Гун Шэн

6370. Одно свойство однолистных функций. Крам (A property of schlicht functions. Crum M. M.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 493—494 (англ.)

Пусть $\sigma(z) = z + \ldots$ регулярна и однолистна для $|z| < 1$. Автор доказывает, что или $\sigma(z) \equiv z$, или же существуют пары значений z_1 и z_2 в области $|z| < 1$ такие, что $\sigma(z_1)\sigma(z_2) = 1$. Этот результат хорошо известен и обобщался в разных направлениях (более подробные сведения приведены в статье Гудмана (РЖМат, 1956, 2936)). A. W. Goodman

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 2, 121

6371. Об одной граничной задаче для обобщенных аналитических функций. Александрия Г., Тбилисис университетис шромеби. Тр. Тбилисск. ун-та, 1955, **56**, 135—139 (рез. груз.)

Пусть S^+ — односвязная область на плоскости $z = x + iy$, ограниченная простым, достаточно гладким контуром L, и пусть $\alpha(t)$ — заданная на контуре L функция, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\alpha(t)$ имеет отличную от нуля производную, удовлетворяющую условию H, 2) $\alpha(t)$ переводит контур L в самого себя взаимно однозначно, причем t и $\alpha(t)$ обходят L в одном и том же направлении.

Рассматривается следующая задача: найти регулярные решения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ уравнения $\partial V/\partial\bar{z} = C\overline{V}$, по граничному условию: $\varphi^+[\alpha(\tau)] = E(\tau)\overline{\psi^+}(\tau) + \Omega(\tau)$ на L, где $E(\tau)$, $\Omega(\tau)$ — заданные на контуре L функции, удовлетворяющие условию H, причем $E(\tau)$ отлична от нуля всюду на L, $\partial/\partial\bar{z}$ обозначает производную в смысле Помпейю, $\varphi^+(t)$ и $\psi^+(t)$ обозначают граничные значения $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на контуре L из области S^+. При помощи специально подобранных представлений задача приводится к сингулярному интегральному уравнению нормального типа и на основе исследования этого уравнения дается решение задачи. Н. П. Векуа

6372. Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций. Векуа Н. П., Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1959, **22**, № 1, 3—8 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1959, **22**, № 1, 3—8 (русск.)

Краевая задача, представляющая некоторое обобщение задач, рассматривавшихся автором ранее, сводится к системе сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. При этом используется представление аналитических функций, встречающееся в более ранних работах автора (РЖМат, 1958, 9918). Ф. Д. Гахов

6373. Некоторые предельные теоремы для ограниченных аналитических функций. Боуэн (Some limit theorems for bounded analytic functions. Bowen N. A.), J. London Math. Soc., 1956, **31**, № 4, 437—445 (англ.)

Пусть $F(z)$ аналитична и $|F(z)| \leqslant 1$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$. Через $a_\mu = x_\mu + iy_\mu$ обозначаются нули $F(z)$. Хорошо известно, что если $F(z) \not\equiv 0$, то произведение Бляшке для нулей $F(z)$:

$$\varphi(z)=\prod_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{z-a_\mu}{z-\bar{a}_\mu}\,\frac{\bar{a}_\mu}{a_\mu}\right)$$

будет сходящимся. Очевидно, $|F(z)|\leqslant|\varphi(z)|$ в $\operatorname{Im} z>0$. Поэтому всякое условие, позволяющее по расположению нулей a_μ заключать о стремлении $\varphi(z)$ к 0 при стремлении z по некоторой Γ в ∞, дает достаточное условие для выполнения равенства $\lim F(z)=0$ при $z\to\infty$ вдоль Γ. Автор указывает необходимые и достаточные условия для существования $\lim\varphi(z)=0$ при $z\to\infty$ вдоль Γ. Основной результат:

Теорема 1. Пусть $\{a_\mu\}$ — последовательность чисел, удовлетворяющая условиям:

$$y_\mu>0,\quad |a_\mu|\uparrow\infty \text{ при } \mu\to\infty, \tag{1}$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} y_\mu\,|a_\mu|^{-2}<\infty \tag{2}$$

(последнее условие, как известно, является тогда необходимым для того, чтобы a_μ были нулями сходящегося произведения Бляшке $\varphi(z)$. Тогда для существования $\lim\limits_{z\to\infty}\varphi(z)=0$ при $z\to\infty$ вдоль некоторой кривой Γ, необходимо и достаточно, чтобы функция $S(z)\to\infty$ при $z\to\infty$ вдоль Γ. Здесь

$$S(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{yy_\mu}{y^2+|z-a_\mu|^2}.$$

Следствие 1. При дополнительном предположении о том, что кривая Γ лежит в секторе $0<\delta\leqslant\arg z\leqslant\pi-\delta$ функция $S(z)$ может быть заменена на функцию

$$T(z)=\int_1^{\infty}\frac{n(|z|v)-n(|z|/v)}{v^2}\,dv, \tag{3}$$

где $n(t)$ — число нулей a_μ, для которых $|a_\mu|<t$.

Следствие 2. Если, кроме условий (1) и (2), потребовать, чтобы

$$0<x_\mu\uparrow\infty \text{ при } \mu\to\infty,\ 0<\delta\leqslant y_\mu\leqslant\delta^{-1}, \tag{4}$$

а Γ представляла из себя полупрямую $\operatorname{Re} z>0$, $\operatorname{Im}=c$, то $S(z)$ в теореме 1 можно заменить на

$$U(z)=\int_1^{\infty}\frac{N(|z|+v)-N(|z|-v)}{v^3}\,dv; \tag{5}$$

где $N(t)$ — означает число точек a_μ, для которых $x_\mu\leqslant t$.

Обозначим через $T(z,a)$ и $U(z,a)$ функции, определяемые выражениями (3) и (5), если в них вместо $n(t)$ и $N(t)$ подставить соответственно функции $n(t,a)$ и $N(t,a)$, равные числу a-точек функции $F(z)$ в областях $|z|<t$ и $x\leqslant t$. Тогда, применяя к произведениям Бляшке для нулей функций $f(z)=\dfrac{F(z)-a}{1+|a|}$ следствия 1 и 2, получаем:

Теорема 3. Для функции $F(z)$, аналитической и ограниченной в $\operatorname{Im} z>0$, существует не более одного значения a, для которого выполняется одно из условий: 1) a-точки $F(z)$, лежащие в $0<\delta\leqslant\alpha\leqslant\pi-\delta$, таковы, что $\lim\limits_{z\to\infty}T(z,a)=\infty$: 2) a-точки, подчиненные добавочному требованию (4), удовлетворяют условию $\lim\limits_{z\to\infty}U(z,a)=\infty$.

В частности, a-точки функции $F(z)$, лежащие в полуплоскости $\operatorname{Im} z\geqslant 1$, удовлетворяют условию $\lim t^{-1}n(t,a)=\infty$ не более, чем для одного значения a.

Г. Ц. Тумаркин

6374. О функции Бляшке для n-связных круговых областей. Дундученко, Касьянюк (Про функції Бляшке для n-зв'язних кругових областей. Дундученко Л. О., Касьянюк С. А.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 7, 699—701 (укр.; рез. русск. англ.)

С. А. Касьянюк ввел (РЖМат, 1959, 5762) для n-связных круговых областей аналог хорошо известного для случая круга произведения Бляшке. Однако предложенное им доказательство сходимости бесконечного произведения, являющегося функцией Бляшке с заданными нулями, содержало пробелы (см. примечание референта к цитированному выше реферату, а также РЖМат, 1959, 9021). Авторы указывают в заметке новое доказательство сходимости упомянутого выше бесконечного произведения, опирающееся на приводимую без доказательства лемму (В. А. Зморовича), дающую оценки факторов $H_j(z,a)$, составляющих произведение Бляшке.

Примечания референта. 1) При определении $H_j(z,a)$ авторы ничего не говорят о нормировке значений аргументов этих функций в фиксированной точке области, без чего не может быть гарантирована сходимость бесконечного произведения $\prod_{m=1}^{\infty}H_j(z;c_m)$ (см. примечание референтов к РЖМат, 1959, 5762). 2) Даже установив равномерную сходимость бесконечного произведения $\prod_{m=1}^{\infty}H_j(z;c_m)$ в каждой замкнутой подобласти n-связной круговой области K_n, нельзя автоматически, как это делают авторы, используя только постоянство на каждой граничной окружности модуля $H_j(z,c_m)$, делать вывод о наличии подобного же свойства и у бесконечного произведения $\prod_{m=1}^{\infty}H_j(z;c_m)$.

Г. Ц. Тумаркин

6375. Об оценке числа точек, в которых целая функция принимает заданное значение. Сингх (Sur la densité du nombre des points où une fonction entière prend une valeur donnée. Singh Shri Krishna) Bull. sci. math., 1958, 82, № 1, 12—14 (франц.)

Пусть, как обычно, $n(r,a)$ — число точек из круга $|z|\leqslant r$, в которых $f(z)=a$, $N(r,a)=\int_0^r\frac{n(t,a)}{t}\,dt$, $M(r)=\max|f(z)|$ для $|z|=r$. Доказывается теорема: Если $f(z)$ — целая функция порядка ρ, $0<\rho<\infty$, то

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{N(r,a)+N(r,b)}{\ln M(r)}\geqslant\frac{1-\rho+\sqrt{1+\rho^2}}{1+\rho+\sqrt{1+\rho^2}}\times\frac{1}{e}\left(\frac{\rho}{1+\sqrt{1+\rho^2}}\right)^{\rho},$$

где $0\leqslant|a|<\infty$, $0\leqslant|b|<\infty$, $a\neq b$.

А. Ф. Леонтьев

6376. О среднем значении целых функций и их производных. Сривастав (On the mean value of integral functions and their derivatives. Srivastav R. P.), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 4-5, 361—369 (англ.)

В первый части статьи доказываются 6 теорем о свойствах

$$I(r)=I(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

где $f(z)$ — целая функция, и ряд следствий из них. Приведем некоторые из них.

Теорема 1. При $0<r<R$

$$I(r, f) \leqslant M(r, f) \leqslant (R+r)(R-r)^{-1} I(R, f).$$

Теорема 2. Для $r>r_0$ $I(r, f') r \ln r \geqslant I(r, f) \ln I(r, f)$.

Теорема 3. Если порядок $f(z)$ равен ρ, то

$$\lim_{n\to\infty} \ln \{r [I(r, f^{(s)})/I(r, f)]^{1/s}\}/\ln r = \rho.$$

Теорема 5. Если порядок $f(z)$ равен 1, а нижний порядок <1, то при $r>r_0>1$ $I(r, f) > I(r, f') > \ldots > I(r, f^{(n)}) > \ldots$

Во второй части статьи рассматриваются логарифмические средние целых функций. С помощью формулы Иенсена вопрос сводится к изучению $N(r, 0, f)$ и доказывается теорема, совпадающая с теоремой 1. 1 из другой статьи автора (РЖМат, 1960, 290, см. также соответствующее примечание референта).

Примечание референта. В формулировке леммы на стр. 363 необходимо оговорить, что доказываемое неравенство имеет место вне некоторых исключительных интервалов, в связи с чем необходимо внести уточнения в доказательство теоремы 3. Но и с этой оговоркой доказательство леммы неубедительно, так как неявно предполагает существование последовательности концентрических колец с постоянным отношением радиусов, свободных от нулей целой функции.

А. А. Гольдберг

6377. **О теории преобразований эллиптических функций. Дёйринг М.**, Сугаку, 1956, **7**, № 4, 246—249 (японск.)

Лекция, прочитанная в Японском математическом обществе 21 сентября 1955 г. и в университете в Киото 26 сентября 1955 г. Liu Chang Wen

6378. **Об одном применении принципа сжатых отображений в теории функций комплексного переменного. Безбородников М. Ф.**, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та, 1955, **103**, 209—216

Автор рассматривает полное метрическое пространство X и оператор A в нем, обладающий свойством:

$$\rho[A(x), A(y)] < \rho(x, y) \qquad (1)$$

(где $x \in X$, $y \in Y$ и $\rho(x, y)$ определяет метрику пространства X), что слабее, чем условие, налагаемое на оператор сближения Банаха. Вначале автор приводит доказательство следующей известной теоремы:

Теорема 1. Пусть в пространстве X дан оператор A, переводящий X в некоторую компактную часть его $X_1 \subset X$, причем оператор A удовлетворяет условию (1). Тогда существует одна и только одна точка $x_0 \in X$ такая, что $A(x_0) = x_0$ (Немыцкий В. В., Успехи матем. наук вып. 1, 1936, 147). Применяя эту теорему к функциям $f(z)$ комплексного переменного z в единичном круге, он доказывает известную

Теорему 2. Если функция $f(z)$ регулярна для $|z|<1$ и преобразует его внутренность D на множество точек Δ, вполне внутренних в D (т. е. таких, что точки множества Δ вместе с его предельными принадлежат D), то существует одна и только одна точка $z_0 \in D$ такая, что $f(z_0) = z_0$.

Для доказательства автор пользуется неевклидовой метрикой $\rho(z_1, z_2)$ для единичного круга (известной моделью Бельтрами—Клейна геометрии Лобачевского) и обобщенной формой леммы Шварца:

$$\rho[f(z_1), f(z_2)] \leqslant \rho(z_1, z_2)$$

(см., например, Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М.—Л., 1952, 363). По мнению референта, в доказательстве теоремы 1 есть пробел, а именно, молчаливо предполагается, что все точки множества $\Phi = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ неподвижны ($X_1 \supset X_2 \supset \ldots$; $X_{n+1} = A(X_n)$). К. С. Сцилард

6379. **Об альфорсовой теореме о кругах и ее применении. Икома** (On Ahlfors'discs theorem and its application. Ikoma Kazuo), Tôhoku Math. J., 1956, **8**, № 1, 101—107 (англ.)

Автор доказывает три теоремы о функциях $w = f(z)$, псевдомероморфных $\{K\}$, установленные ранее другими авторами (например, Цудзи) для случая мероморфных функций. Псевдомероморфную (K) функцию $f(z)$ в области G автор определяет как функцию, непрерывную в G с точностью до полюсов, непрерывно дифференцируемую в $G - E_1$ и с положительным якобианом в $G - E_2$, E_1, E_2 — замкнутые счетные множества, причем отображение $w = f(z)$, будучи внутренним, должно иметь характеристику $\leqslant K$. Псевдомероморфная $\{K\}$ функция получается при добавочном требовании существования $\lim_{z\to 0} |f(z) - f(0)|/|z|^{1/K}$.

Приведем формулировку основной теоремы 1: Пусть $w = f(z)$ — псевдомероморфная $\{K\}$ в $|z|<R$ и F—риманова поверхность над w-сферой, порожденная $w = f(z)$. Пусть $D_1, \ldots, D_q$ $(q \geqslant 3)$ — неперекрывающиеся односвязные замкнутые области на w-сфере; предположим, что всякий односвязный остров F, лежащий над D_i, имеет кратность $\geqslant m_i$, m_i — натуральные или ∞. Если $\sum_{i=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) > 2$, то

$$R < \left(C \frac{1 + |f(0)|^2}{\lim |f(z) - f(0)|/|z|^{1/K}} \right)^K, \qquad (1)$$

где C — константа, зависящая только от $D_1, \ldots, D_q$.

Доказательство автора проводится геометрическими методами, с использованием результатов альфорсовой теории поверхностей наложения.

Примечание референта. а) Автор был, по-видимому, незнаком с теорией квазиконформных отображений, разработанной в Советском Союзе (Математика в СССР за 40 лет, т. I). Результаты такого рода, как теорема 1 и остальные, известные для аналитических (мероморфных) функций, следуют из теоремы существования квазиконформных отображений и общих свойств этих отображений. б) Рассмотрение класса $\{K\}$ является, по мнению референта, неоправданным, так как растяжение квазиконформного отображения в точке никак не связано с поведением отображения в целом. В (1) в первой части вместо lim можно писать $\overline{\lim}$, что делает рассмотрение класса $\{K\}$ излишним: однако и в этом случае оценка (1) становится бессодержательной в „хороших“ точках отображения, где оно дифференцируемо.

И. Н. Песин

6380. **Новое доказательство и улучшение одного неравенства Мийу. Сюн Цзин-лай** (Nouvelle démonstration et amélioration d'une inégalité de M. Milloux. Hiong King-Lai), Bull. sci. math., 1955, **79**, sept.-oct., 135—160 (франц.)

Теоремы, содержащиеся в статье, с одной стороны, представляют некоторое усиление результатов автора (РЖМат, 1956, 366) с другой стороны, были позднее несколько улучшены им же (РЖМат, 1956, 7993; 1957, 5500, 5501). Заметим, что в реферируемой статье и во всех указанных выше статьях автор ссылается на книгу Мийу (Milloux H., Les fonctions méromorphes et leurs dérivées. Extension d'un théorème de R. Nevanlinna. Applications, Paris, 1940), но не упоминает более поздней работы Мийу (Ann. scient. École norm. supér., 1947, **63**, 289—316), оставшейся в то время, по-видимому, неизвестной автору (в более поздних статьях авто-

ра уже находим ссылки на эту статью Мийу). По сравнению с результатами Мийу 1947 г. обобщения идут в направлении, кратко намеченном Мийу в конце его статьи. А. А. Гольдберг

6381. Одно свойство преобразований над последовательностью пространств. Субба-Рао (A property of transformations over a sequence of spaces. Subba Rao M. V.), J. Indian Math. Soc., 1958, (1959), **22**, № 2, 59—64 (англ.)

Автор ставит своей целью показать, что теорема о линейных непрерывных преобразованиях в пространстве целых функций, установленная Айером (Iyer V. Ganapathy. Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 874—883), имеет место для более общих нормированных пространств.

Доказываются две теоремы, из которых вторая есть усиление первой.

Теорема 2. Пусть E — линейное множество, τ_α — направленное семейство линейных топологий на E (для любых двух τ_{α_1}, τ_{α_2} найдется мажорирующая топология τ_{α_3}). Пусть V — другое линейное множество, а Γ_β — направленное семейство локально ограниченных топологий на V (локальная ограниченность топологии Γ_β означает существование такой окрестности нуля U, что система множеств kU $(0<k<+\infty)$ образует фундаментальную систему окрестностей нуля). Пусть τ, Γ — проективные пределы топологий τ_α и Γ_β соответственно на E и V. Линейное отображение f из E, снабженного топологией τ в V, снабженного топологией Γ, непрерывно в том и только в том случае, когда для каждого β найдется такое α, что f непрерывно из (E, τ_α) в (V, Γ_β).

Примечание референта. 1) Пусть N_1 и N_2 — две нормы на линейном множестве E. Автор, вопреки давно сложившейся традиции и без специальных оговорок, называет норму N_1 более сильной, чем норма N_2, если $N_1(x) \leqslant cN_2(x)$ при всех $x \in E$ $(c>0)$. В реферате сохранена общепринятая терминология. 2) Теорема 2 хорошо известна (см., например, Бурбаки Н., Топологические векторные пространства, Изд-во ин. лит., 1959, стр. 39—41; см. также РЖМат, 1956, 3163; 1958, 516). В. П. Хавин

6382. Интегральное представление некоторых классов функций, аналитических в области угла. Джрбашян М. М., Аветисян А. Е., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, 457—460

Приводятся формулировки ряда теорем об интегральном представлении различных классов функций, аналитических в угле. Указывается, что эти теоремы устанавливаются методами, близкими к тем, которые были развиты М. М. Джрбашяном ранее (РЖМат, 1955, 1178; 1956, 6534).

Пусть $D(\theta, \rho, \sigma)$, $\rho \geqslant \frac{1}{2}$, $\sigma \geqslant 0$, — односвязная область, содержащая луч $\arg z = \theta$, $|z| \geqslant \sigma^{1/\rho}$ и множество точек $\mathrm{Re}\,(ze^{-i\theta})^\rho > \sigma$. Пусть далее $D_\alpha(\rho, \sigma)$ — сумма областей $D(\theta, \rho, \sigma)$ при $|\theta| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha$, $0<\alpha<2$, и $L_\alpha(\sigma)$ — ее граница.

В теореме 1 утверждается, что если $f(z)$ голоморфна в угле $\Delta_\alpha\left(|\arg z| < \frac{\pi}{2}\alpha\right)$, непрерывна в замкнутом угле $\overline{\Delta}_\alpha$ (кроме, возможно, $z=\infty$), имеет порядок роста не выше, чем $\rho_1 \geqslant 0$, и тип не выше, чем $\sigma \geqslant 0$, то функция

$$g(z) = \rho\,(ze^{-i\theta})^{\mu\rho} z^{-1} \times \times \int_0^\infty f(te^{-i\theta})\, e^{-t^\rho (ze^{-i\theta})^\rho} t^{\mu\rho-1}\, dt,$$

где $\rho \geqslant \max\{\rho_1, (2-\alpha)^{-1}\}$, $\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} + \frac{1}{\rho}$, голоморфна в области $D_\alpha(\rho, \sigma)$ и при $z \in \Delta_\alpha$ имеет место обращение

$$f(z) = \int_{L_\alpha(\sigma+\delta)} E_\rho(z\xi, \mu)\, g(\xi)\, d\xi,$$

где $\delta > 0$, $E_\rho(z, \mu) = \sum_0^\infty \{\Gamma(\mu + n\rho^{-1})\}^{-1} z^n$ — целая функция типа Миттаг-Лефлера.

В теореме 2 приводится интегральное представление для функций $f(z)$, голоморфных в угле Δ_α, имеющих почти всюду конечные предельные значения $f\left(re^{\pm i\frac{\pi}{2}\alpha}\right)$ и таких, что $\int_0^\infty |f(re^{i\varphi})|^2 r^\omega\, dr < M < \infty$, $|\varphi| \leqslant \frac{\pi}{2}\alpha$, $|\omega| < 1$. Это представление имеет место в замкнутом угле $\overline{\Delta}_\alpha$, в открытом угле оно имеет следующий более простой вид:

$$f(z) = \int_0^\infty E_\rho\left\{ze^{i\left(\alpha+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}}\tau^{1/\rho};\ \mu\right\} v_{(-)}(\tau)\,\tau^{\mu-1} d\tau + + \int_0^\infty E_\rho\left\{ze^{-i\left(\alpha+\frac{1}{\rho}\right)\frac{\pi}{2}}\tau^{1/\rho};\ \mu\right\} v_{(+)}(\tau)\,\tau^{\mu-1} d\tau,$$

где $v_{(\pm)}(\tau) \in L_2(0, \infty)$, $\rho \geqslant (2-\alpha)^{-1}$, $\mu = \frac{1+\rho+\omega}{2\rho}$.

В теореме 4 дается аналогичное интегральное представление для функций $f(z)$ из класса $N_2(\alpha, \omega, \rho, \tau_0)$: при этом $f(z)$ принадлежит указанному классу, если она голоморфна в угле Δ_α, имеет почти всюду конечные предельные значения $f(re^{\pm i\frac{\pi}{2}\alpha})$, имеет порядок роста не выше, чем $\rho \geqslant \max\{\alpha^{-1}, (2-\alpha)^{-1}\}$, и тип не выше, чем τ_0.

Из указанных теорем вытекают результаты об аппроксимации рассматриваемых функций $f(z)$ посредством целых функций, приводятся формулировки этих результатов. А. Ф. Леонтьев

6383. О нуль-множествах теории функций. Оикава (Сугаку, 1955, **7**, № 3, 33—42 (японск.)

6384. К обобщению теоремы Пикара. Трохимчук Ю. Ю., Укр. матем. ж., 1958, **10**, № 1, 70—77 (рез. франц.)

Автор называет областью Лиувилля такую область расширенной плоскости, в которой не существует отличной от константы ограниченной аналитической функции. Граница области Лиувилля называется L-множеством (в теории римановых поверхностей класс L-множеств обозначают N_B). Замкнутое разрывное множество Γ в некоторой области D называется полярным для аналитической в $D \setminus \Gamma$ функции $f(z)$, если оно содержит лишь ее полюсы или регулярные точки; в противном случае оно называется неполярным.

Теорема 3. Для того чтобы L-множество $\Gamma \subset D$ было полярным для $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке $\xi \in \Gamma$ существовал конечный или бесконечный предел:

$$f^*(\zeta) = \lim_{z\to\zeta} f(z). \quad z \in D \setminus \Gamma.$$

Аналог теоремы Пикара: В любой окрестности D неполярного L-множества Γ аналитическая функция $w = f(z)$ принимает и притом бесчисленное множество раз почти каждое конечное значение, причем все таки значения образуют множество точек всюду II категории на плоскости w.

Точка P_0 называется p-кратной для функции $f(z)$, заданной в области D, если ей соответствует в D не

более p регулярных точек-прообразов ($p = 0, 1, 2, \ldots$). Множество F_p p-кратных точек автор называет множеством Пикара порядка p.

Теорема 4. Для аналитической в произвольной окрестности D неполярного L-множества Γ функции $f(z)$ множество Пикара F_p есть L-множество.

Примечания референта. 1) Отсутствуют ссылки на другие работы, посвященные изучению L множеств и поведению функций в окрестности таких множеств, в частности на работу Альфорса и Бейрлинга (Ahlfors L., Beurling A., Acta math., 1950, 83, № 1-2, 101—129). 2) Упоминаемый автором вопрос (идущий от Пенлеве и Голубева), существует ли L-множества ненулевой длины в настоящее время положительно решен А. Г. Витушкиным. С. Я. Хавинсон

6385. Теория абелевых интегралов. Кусуноки, Сугаку, 1955, 7, № 3, 33—42 (японск.)

Дается краткий обзор недавних результатов (с 1935 г.) по теории абелевых интегралов первого рода. Статья разделена на 5 частей. В § 1 автор рассматривает структуру пространства H, введенного Р. Неванлинной и обобщенного К. И. Виртаненом. В § 2, основываясь на результатах § 1, автор доказывает существование нормального интеграла, принадлежащего к пространству H. Эта теорема существования также принадлежит Виртанену. В § 3 вкратце рассматриваются дифференциалы Шоттки в изложении Альфорса. В § 4 автор занимается обобщением результата Альфорса, касающегося периодов абелевых интегралов первого рода. Это обобщение заключается в следующем:

Пусть $w_j = u_j + iv_j$ ($j = 1, 2$) — интеграл первого рода, с конечным интегралом Дирихле, на римановой поверхности $R \in R^0_{HO}$ и пусть u_1 или v_1 имеют только конечное число периодов A_n, B_n не равных нулю, тогда

$$D_R[w_1, w_2] = \iint_R \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_2}{\partial y}\right) dxdy = \sum_{i=1}^{N}\left[\int_{A_i} du_1 \int_{B_i} dv_2 - \int_{B_i} du_1 \int_{A_i} dv_2\right].$$

Как следствие из этой теоремы автор приводит необходимое и достаточное условие для существования функции $\varphi \in H$ такой, что $\int_{A_n} \varphi dz = a_n + i\hat{a}_n$, для заданного $\{a_n + i\hat{a}_n\}$.

В § 5 даются теоремы существования однозначной аналитической функции или интеграла первого рода, следуя Бенке и Штейну (Behnke H., Stein K., Math. Ann., 1948, 120, 430—461) Yang Tsung-pan B.

6386. Альтернирующий метод на римановых поверхностях. Пфлюгер (Ein alternierendes Verfahren auf Riemannschen Flächen. Pfluger Albert), Comment. math., helv., 1955, 30, № 4, 265—274 (нем.)

В теории замкнутых римановых поверхностей одной из основных задач является построение гармонических функций, которые испытывают скачок, равный 1 при переходе через заданную на поверхности, не разлагающую ее, жорданову кривую Γ и являются однозначными на $R - \Gamma$. Существование гармонических функций с подобным свойством может быть доказано различными методами. Среди них метод, основанный на принципе Дирихле, в предложенной Альфорсом форме (Ahlfors L. V., Soc. Sci. Fennicae, Comment. Phys.-Math., 1943, 9, 15). Однако, как отмечает автор, этот метод не является конструктивным. Классический метод решения сформулированной задачи использует существование элементарных дифференциалов третьего рода χ_{ab} с логарифмическими вычетами, равными $+1$ и -1 в точках a и b (см. например, Неванлинна, Униформизация, М. И.-Л., 1955, стр. 192; РЖМат, 1956, 7313; 1954, 2571). Поэтому классический метод не является прямым. Автор применяет для решения задачи альтернирующий метод Шварца. Он показывает, что альтернирующий процесс Шварца, примененный в его естественной форме, будет сходящимся в метрике, определяемой билинейной формой $D_F(u, v) = \iint_F (u_x v_x + u_y v_y) dxdy$.

Предложенный метод позволяет также дать прямую конструкцию для каждого точного на R дифференциала без особенностей когомологичного ему гармонического дифференциала. При этом не привлекается канонический базис гомологий (см. по этому же поводу более позднюю работу автора (реф. 6392). Это дает в рассматриваемом случае конструктивный вариант принципа Дирихле. В заключение автор показывает, что излагаемый им способ пригоден и для доказательства сходимости в альтернирующем процессе Неймана. Г. Ц. Тумаркин

6387. Замечания о римановых поверхностях. Альфорс (Remarks on Riemann surfaces. Ahlfors L. V.), Lect. Funct. Complex Variable. Ann Arbor, Univ. Michigan Press, 1955, 45—48 (англ.)

Рассматривается проблема построения на открытых римановых поверхностях гармонических функций с заданными особенностями. Пусть R — открытая риманова поверхность и множество $G \subset R$ таково, что $R - G$ компактно; множество G играет роль окрестности идеальной границы. На множестве G задается гармоническая функция s (функция особенностей). Требуется найти гармоническую на R функцию u, для которой $u - s$ была бы в некотором смысле „регулярной“ вблизи идеальной границы. Автор делает ряд замечаний, уточняющих смысл регулярности вблизи идеальной границы. Он приходит в связи с этим к следующей общей постановке проблемы.

Пусть H — линейное пространство, образованное всеми функциями гармоническими в G и пусть H_0 — линейное подпространство H. Выберем H_0 в качестве пространства „регулярных“ функций. Задача заключается в отыскании функции u такой, что $u - s \in H_0$. Для решения рассматриваемой проблемы предлагается использовать указанную Сарио (Sario L., Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 72, 281—295) модификацию альтернирующего процесса Шварца. Чтобы применить метод Сарио, приходится наложить на пространство H_0 некоторые ограничения, довольно естественные с точки зрения изучаемой проблемы. Так, для обеспечения единственности решения, надо потребовать чтобы максимумы в G функций из H_0 достигались на относительной границе α. Кроме того, предполагается, что для всех функций из H_0 поток через α равен нулю (необходимость последнего условия для разрешимости проблемы, как отмечает сам автор, пока не установлена). Граница α считается аналитической, что не нарушает в данном случае общности исследования. После чего автор, следуя Сарио, вводит линейный оператор L, который непрерывной функции v на α ставит в соответствие гармоническую на G функцию Lv со следующими свойствами:

$$\begin{gathered} Lv = v \text{ на } \alpha; \\ L1 = 1,\ Lv \geqslant 0, \text{ если } v \geqslant 0; \\ \int_\alpha \frac{\partial Lv}{\partial n} ds = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Подобный оператор определяет подпространство H_0, образованное всеми функциями u, для которых $Lu = u$. Обратно, если H_0 удовлетворяет перечисленным выше условиям и если, кроме того, проблема Дирихле с заданными граничными значениями v на α имеет решение в H_0, то это решение определяет линейный оператор со свойствами (1). Так что оба указанных подхода к проблеме оказываются эквивалентными. Используя альтернирующий метод, Сарио доказал существование функции u со свойством: $u - s = L(u - s)$ тогда и только тогда, когда s имеет нулевой поток на α. Это означает,

что $u-s$ „регулярна" в смысле принадлежности подпространству H_0. Единственность решения с точностью до аддитивной константы очевидна.

В связи с вышеизложенным представляет большой интерес описать множество всех операторов, удовлетворяющих условию (1). Ясно, что это выпуклое множество, которое поэтому вполне определяется своими экстремальными элементами. Исследование общего случая, по мнению автора, вызывает большие трудности. Автор останавливается на рассмотрении частного случая, когда поверхность R имеет аналитическую границу β. В заключение указывается, что изложенные соображения носят в основном эвристический характер. Публикуя эти замечания, автор надеялся, что они явятся отправным пунктом для последующих более подробных исследований. Г. Ц. Тумаркин

6388. Замечание о продолжении гармонических и аналитических функций. **Кусуноки** (Note on the continuation of harmonic and analytic functions. Kusunoki Yukio), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1955, **A29**, № 1, 11—16 (англ.)

Пусть R — риманова поверхность и E — замкнутое подмножество R. Через $HB(AB)$, $HD(AD)$ обозначаются, как обычно, классы ограниченных гармонических (аналитических) функций и классы гармонических (аналитических) функций с ограниченным интегралом Дирихле. Рассматривается следующая проблема: Каковы необходимые и достаточные условия для того, чтобы множество E было устранимым для всех функций одного из рассматриваемых классов на $R-E$ (т. е. любую функцию из соответствующего класса можно было продолжить на E, так чтобы она оставалась там гармонической или аналитической в зависимости от того, с каким классом мы имеем дело).

Автор доказывает в теореме 1, что для того чтобы множество E было устранимым для классов HB и HD, определенных на $R'=R-E$, необходимо и достаточно, чтобы логарифмическая емкость множества E была равна нулю.

Эта теорема (для класса HB) была ранее установлена П. Мюрбергом (Myrberg P. J., Ann. Asad. Sci. Fenn., Ser. A. I, 1949, 58).

Далее автор переходит к изучению сформулированной выше проблемы для классов AB и AD. Теперь он ограничивается рассмотрением римановых поверхностей, покрывающих в точности m раз ($\infty > m \geqslant 2$) единичный круг $K: |z|<1$. Для таких поверхностей приводятся условия для того, чтобы круг, расположенный на R, был бы устранимым в слабом смысле.

Пусть $z_1, z_2, \ldots$ — проекции точек разветвления (с учетом их кратностей). Выберем на каждом i-м листе поверхности R круг K_i ($i=1,2,\ldots,m$) так, чтобы проекции этих кругов не пересекались и не содержали $\{z^n\}$. При этом в качестве одного из кругов K_i берется пустое множество.

Предложение 3. Пусть $R'=R-\bigcup_{i=1}^{m} K_i$. Тогда, для того чтобы хотя бы один из кругов K_j, не являющихся пустым множеством, был устранимым для класса AB, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|)=\infty$.

Достаточность этого условия имеет место и для класса AD.

Примечание референта. Библиография, приводимая автором, не полна. Так не отмечена работа Парро (Parreau M., Ann. Inst. Fourier, 1951, **3**), в которой установлены условия для того, чтобы множество E было устранимым для ряда классов гармонических и аналитических функций. Г. Ц. Тумаркин

6389. Принцип максимума для ограниченных функций. **Уэрмер** (The maximum principle for bounded functions. Wermer John), Ann. Math., 1959, **69**, № 3, 598—604 (англ.)

Пусть R—открытая риманова поверхность и S—область на R, ограниченная простой замкнутой аналитической кривой Γ. Пусть $\mathfrak{A}$ — пространство всех функций, аналитических на R и ограниченных в $S+\Gamma$. Автор говорит, что принцип максимума выполняется для $\mathfrak{A}$, если

$$|f(x)| \leqslant \max_{t\in\Gamma} |f(t)| \quad \text{для } f\in\mathfrak{A},\ x\in S \qquad (1)$$

$\mathfrak{A}$ разделяет точки, если для любой пары точек $x\neq y$, $x, y\in S\cup\Gamma$ найдется некоторая функция $g\in\mathfrak{A}$, для которой

$$g(x)\neq g(y). \qquad (2)$$

Доказывается теорема: Пусть $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (1) и (2) и для любой точки $p\in\Gamma$ найдется $Q_p\in\mathfrak{A}$ с $dQ_p\neq 0$ в p. Тогда существует риманова поверхность R^* и на ней область S^*, ограниченная простой замкнутой кривой Γ^* со следующими свойствами: а) $S^*\cup\Gamma^*$ компактна, б) существует взаимно однозначное аналитическое отображение ψ области S в S^*, в) если $f\in\mathfrak{A}$ и f^* — соответствующая функция на $\psi(S)$: $f^*(\psi(t))=f(t)$, то f^* допускает аналитическое продолжение на все $S^*\cup\Gamma^*$, г) ψ распространяется на $S\cup\Gamma$ так, что ψ становится аналитическим и взаимно однозначным отображением $S\cup\Gamma$ в $S^*\cup\Gamma^*$, переводящим Γ на Γ^*.

Из теоремы следует, что $\psi(S)$ почти полностью заполняет S^* в следующем смысле. Пусть O — любая связная окрестность множества $K=S^*-\psi(S)$. Тогда всякая функция, аналитическая и ограниченная в $O-K$, может быть аналитически продолжена на все O. Доказательство теоремы опирается на следующий результат, который для случая колец с конечным числом образующих был установлен в предыдущей работе автора (реф. 6358). Пусть B — собственная замкнутая подалгебра алгебры C всех непрерывных функций на $|t|=1$ с $1\in B$. Пусть B_0 — подмножество B, разделяющее точки на $|t|=1$, состоящее из функций, аналитических на $|t|=1$, и пусть для каждого t на $|t|=1$ найдется функция g_t в B_0 с $g_t'\neq 0$ в t. Тогда существует риманова поверхность F и область D на F, ограниченная простой замкнутой аналитической кривой γ такая, что $D\cup\gamma$ компактна и существует взаимно однозначное конформное отображение χ окрестности γ на окрестность $|t|=1$, переводящее γ на $|t|=1$. При этом для каждой f в B существует функция $\hat{f}$, непрерывная на $D\cup\gamma$ аналитическая на D с $\hat{f}(p)=f(\chi(p))$ при всех $p\in\gamma$. Далее, если m — мультипликативный линейный функционал на B, то найдется точка p в $D\cup\gamma$, для которой $m(f)=\hat{f}(p)$ при всех $f\in B$. И, наконец, существует только конечное число пар (p,q) с $p, q\in D\cup\gamma$ и $p\neq q$, для которых при всех $f\in B$ $\hat{f}(p)=\hat{f}(q)$. Л. А. Маркушевич

6390. Общая теорема униформизации Кёбе: параболический случай. **Оссерман** (Koebe's general uniformization theorem: the parabolic case. Osserman Robert. Suomalais tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. **AI**, № 258, 7 pp.) (англ.)

Хорошо известна теорема Кёбе о том, что всякую риманову поверхность R, подобную однолистной, можно отобразить на подобласть числовой плоскости (см., например, РЖМат, 1954, 2571; 1956, 7313). Автор дает простое доказательство этой теоремы при добавочном предположении о параболичности поверхности R. При этом он отправляется при определении параболических римановых поверхностей из известного свойства таких поверхностей, заключающегося в том, что всякая отрицательная субгармоническая на них функция обязана быть константой. Г. Ц. Тумаркин

6391. Абелевы дифференциалы на открытых римановых поверхностях специального типа. **Альфорс** (Abelin differentials on open Riemann surfaces of spe-

cial type. Ahlfors Lars V.), Algebr. Geom. Conf. Notes. Univ. Chicago. Chicago, s. a., 1—3 (англ.)

На открытой римановой поверхности W_0 изучается связь между дифференциалами и их периодами. При этом приходится различать два вида гомологий на открытых поверхностях: компактную и некомпактную. Действительно, период замкнутого дифференциала всегда равен нулю на цикле, гомологичном нулю в компактном смысле. В то же время для циклов, гомологичных нулю в некомпактном смысле, подобный факт может иметь место. Пусть W—подобласть W_0 с компактным замыканием и границей C, составленной конечным числом аналитических кривых. Хорошо известно, что, продолжая W через C, можно образовать симметрическую замкнутую поверхность $\hat{W}$ (дубль W). Дифференциалы на W, которые могут быть продолжены до регулярных абелевых дифференциалов на $\hat{W}$, называются дифференциалами Шоттки. Они обладают рядом важных экстремальных свойств, изучение которых, как отмечает автор, в систематическом виде еще не проведено. Структура этих дифференциалов легко выясняется. Действительно, рассматриваемая при построении дубля $\hat{W}$ операция перевод ит дифференциал ω в $\widetilde{\omega}$ и $(\widetilde{\omega})^* = -\omega^*$ (здесь, как всегда, ω^* означает дифференциал, сопряженный к ω). Полагая $\tau_1 = \frac{\omega - \widetilde{\omega}}{2}$, $\tau_2 = \frac{\widetilde{\omega^*} - \omega^*}{2}$, имеем $\omega = \tau_1 + \tau_2^*$, где $\tau_1 = \tau_2 = 0$ вдоль C. Для аналитического дифференциала Шоттки φ подобным же путем показывается, что $\varphi = \theta_1 + i\theta_2$, где θ_1 и θ_2 действительны на C. Известно, что τ^* и φ единственным образом определяются по произвольно заданным периодам на W. При этом оказывается, что τ^* имеет минимальную норму (на W) среди всех замкнутых дифференциалов на W с теми же периодами, а φ имеет минимальную норму среди всех аналитических дифференциалов с заданными периодами. Пусть теперь ω_0— гармонический дифференциал на W_0 с конечной нормой. Тогда для каждой подобласти W мы сможем ввиду сказанного найти дифференциал τ^* с теми же периодами, что и ω_0.

В силу отмеченного выше экстремального свойства τ^* нетрудно показать, что τ^* будет стремиться к пределу τ_0^* и $\omega - \tau_0^*$ является точным дифференциалом. Ограничимся теперь рассмотрением класса поверхностей W_0, на которых единственным точным дифференциалом с конечной нормой будет 0. На таких поверхностях каждый гармонический дифференциал с конечной нормой является пределом (в смысле сходимости на компактных подмножествах или сходимости по норме) дифференциалов Шоттки специальной формы τ^* или, что эквивалентно, формы τ. В качестве простого следствия отсюда имеем, что период рассматриваемых гармонических дифференциалов на любом гомологичном нулю цикле в некомпактном смысле должен быть равен нулю.

Подобный, но более слабый результат, получен для более широкого, чем рассмотренный выше, класса римановых поверхностей. Именно, для класса поверхностей, на которых не существует отличного от тождественного, аналитического точного дифференциала с конечной нормой. В обоих случаях предлагаемый метод позволяет решить по крайней мере теоретически вопрос о существовании гармонических или аналитических дифференциалов с заданными периодами и конечной нормой. В заключение автор ставит одну нерешенную проблему алгебраического характера, связанную с рассматриваемыми вопросами. Г. Ц. Тумаркин

6392. Конструкция абелевых дифференциалов на римановых поверхностях. Пфлугер (A direct construction of Abelian differentials on Riemann surfaces. Pfluger Albert), Semin. Analyt. Funct. Vol. 2. Princeton, N. J., Inst. Advanced Study, (1958), 39—48 (англ.)

Пусть R — замкнутая риманова поверхность рода g; $C_1, \ldots, C_{2g}$ образуют базис гомологий 1-циклов для R. Хорошо известно, что для любых действительных чисел $\pi_1, \ldots, \pi_{2g}$ существует гармоническая форма ω на R, удовлетворяющая условиям $\int_{C_\nu} \omega = \pi_\nu$, $\nu = 1, \ldots, 2g$. Причем этими условиями ω определяется единственным образом. Автор указывает прямую конструкцию гармонической формы с заданными периодами. Пусть ω — действительная замкнутая линейная дифференциальная форма на R, т. е. $\omega = adx + bdy$, где a и b — действительные функции локального униформизирующего параметра $z = z + iy$, которые удовлетворяют условию $b_x = a_y$. Вводится линейное пространство Ω, состоящее из форм ω указанного вида. Две формы из Ω называются когомологичными, если они имеют одинаковые периоды. Легко построить замкнутую дифференциальную форму с заданными периодами. Поэтому рассматриваемая проблема сводится к конструированию гармонической формы, когомологичной произвольно заданной форме $\omega \in \Omega$. Для этого определим в Ω внутреннее произведение $(\omega_1, \omega_2) = \int_R (a_1 a_2 + b_1 b_2)\, dxdy$, $\omega_i = a_i dx + b_i dy$, $i = 1, 2$. Положим для произвольного элемента $\omega_0 \in \Omega$ $d = \inf \| \omega \|$, где ω пробегает класс (ω_0) элементов, когомологичных ω_0. Тогда существует последовательность $\{\omega_n\}$ элементов из (ω_0), для которой $\lim_{n \to \omega} \| \omega_n \| = d$. Принцип Дирихле утверждает, что существует элемент φ из (ω_0) со свойством $\| \varphi \| = d$, причем φ будет уже гармонической формой. В работе строится минимизирующая последовательность $\{\omega_n\}$, сходящаяся к φ. В заключение автор останавливается на возможности перенесения его метода на некомпактные римановы поверхности. В этом случае теорема Бенке и Штейна говорит, что для произвольной замкнутой формы ω_0 существует гармоническая форма с теми же периодами. Однако даже, когда норма $\| \omega \| = \int_R (a^2 + b^2)\, dxdy$, $\omega = adx + bdy$, — конечна, гармоническая форма не определяется однозначно своими периодами, как это было в случае компактных поверхностей. В то же время, если ограничиться рассмотрением замкнутых форм ω_0 с конечной нормой, то будет существовать одна и только одна гармоническая форма ω с теми же периодами, что ω_0 и такая, что $\omega - \omega_0$ будет ортогональна к дифференциалам от непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем. Автор указывает, что он не в состоянии доказать, что полученная его методом последовательность $\{\omega_n\}$ будет и в рассматриваемом случае последовательностью Коши. Однако применение предлагаемого автором процесса приводит к построению искомой гармонической формы, но не столь прямым путем, как в случае замкнутых поверхностей. Г. Ц. Тумаркин

6393. Дифференциальные уравнения, связанные с униформизацией некоторых алгебраических кривых. Ранкин (The differential equations associated with the uniformization of certain algebriac curves. Rankin R. A.), Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 1957—1958, **A65**, № 1, 35—62 (англ.)

Пусть $G(z, u) = 0$ — уравнение алгебраической кривой, где $G(z, u)$ — многочлен от z и u. Хорошо известно, что алгебраическое уравнение рода $p = 0, 1$ может быть униформизировано с помощью рациональных или эллиптических функций. Если род $p > 1$, то униформизация может быть проведена с помощью автоморфных функций в единичном круге $|z| < 1$. Задачу явного нахождения по данному уравнению униформизирующих автоморфных функций можно разбить на две части: 1) отыскание соответствующей дискретной группы дробноли-

нейных преобразований, 2) построение автоморфных функций. Последняя задача просто решается при помощи рядов Пуанкаре. Основная трудность в первой задаче, т. е. в задаче построения соответствующей дискретной группы Γ дробнолинейных преобразований.

Автор рассматривает уравнения вида

$$u^2 = g(z) = (z - e_1)\ldots(z - e_{2p+2}). \quad (1)$$

Уиттекер показал, что группа Γ является подгруппой индекса 2 группы монодромии дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\eta}{dz^2} + R(z)\,\eta = 0. \quad (2)$$

Поэтому задача сводится к отысканию по функции $g(z)$ функции $R(z)$. В 1929 г. Уиттекер высказал гипотезу, что

$$R(z) = \frac{3}{16}\left(\frac{g'(z)}{g(z)}\right)^2 - \frac{3(2p+2)}{16(2p+1)}\,\frac{g''(z)}{g(z)}. \quad (3)$$

Ему удалось ее доказать в частном случае, когда $g(z) = z^5 + 1$. Впоследствии эта гипотеза была проверена для уравнений вида $w^2 = z^{2n+1} + 1$.

В реферируемой работе устанавливается справедливость этой гипотезы при довольно общих предположениях о функции $g(z)$ типа некоторой симметрии множества ее корней. Кроме того, указываются некоторые другие типы уравнений, для которых можно построить более или менее в явном виде дифференциальное уравнение, группа монодромии которого просто связана с дискретной группой дробнолинейных преобразований. Например, это имеет место для уравнения $u^m = z^p(z^N - 1)^r$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

6394. Об одной проблеме Э. Картана. Пятецкий-Шапиро И. И., Докл. АН СССР, 1959, 124, № 2, 272—273

Область $D \subset C^n$ называется однородной, если для любых точек $z_1, z_2 \in D$ существует такой голоморфный автоморфизм ζ этой области D, что $z_2 = \zeta z_1$. Область называется симметричной, если для любой точки $z_0 \in D$ можно указать такой голоморфный автоморфизм ζ области D, что: 1) $\zeta z_0 = z_0$, причем если $z_0 \neq z \in D$, то $\zeta z \neq z$; 2) $\zeta^2 = 1$. Известно, что всякая ограниченная симметричная область однородна. Э. Картан перечислил все ограниченные симметрические области, показал, что при $n = 2$ и 3 любая ограниченная однородная область симметрична, и поставил вопрос о том, имеет ли место аналогичный факт при $n > 3$ (Cartan E., Adhandl. math. Semin. Hamburg. 1935, 11, 116). А. Борель (РЖМат, 1956, 9082) показал, что ограниченная однородная область с полупростой группой голоморфных автоморфизмов всегда является симметрической областью.

В заметке дается отрицательный ответ на вопрос, поставленный Э. Картаном: приводится пример несимметрической ограниченной однородной области в пространстве C^5 комплексных переменных z_1, z_2, z_3, u_1, u_2. Эта область получается в результате отображения на ограниченную область области $H\{-i(Z - \bar{Z}) - U\bar{U}' - \bar{U}U' > 0\}$. Здесь $Z = \begin{pmatrix} z_1 z_2 \\ z_2 z_3 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$. Отображение области H на ограниченную область имеет вид:

$$t_1 = \frac{z_1 - i}{z_1 + i},\ t_2 = \frac{2u_1}{z_2 + i},\ t_3 = \frac{z_3 - i}{z_3 + i},$$

$$t_4 = \frac{2u_2}{z_3 + i},\ t_5 = \frac{w - i}{w + i},$$

где $w = \frac{z_1 + z_3}{2} - z_2$.

Б. А. Фукс

6395. Интегральные представления функций двух комплексных переменных. Темляков А. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 3—12

D — область пространства двух комплексных переменных w и z, границей которой служит гиперповерхность $|w| = r_1(\tau)$, $|z| = r_2(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, удовлетворяющая либо условиям (1) и (2):

$$r_1(0) = 0,\ 0 < r_1'(\tau) \leqslant \frac{r_1(\tau)}{\tau},\ 0 < t \leqslant 1,\ r_1(1) < \infty, \quad (1)$$

$$r_2(\tau) = \exp\left[-\int \frac{\tau}{1-\tau}\, d\ln r_1(\tau)\right], \quad (2)$$

либо условиям (2) и (1′):

$$r_1(0) = 0,\ 0 < r_1'(\tau) \leqslant \frac{r_1(\tau)}{\tau},\ 0 < \tau < 1,\ r_1(1) < \infty, \quad (1')$$

т. е. функция $r_1'(\tau) - \frac{r_1(\tau)}{\tau}$ или меняет знак, или положительна на $(0, 1)$.

Доказывается теорема. Класс областей D, границы которых определяются или условиями (1), (2), или (1′), (2), совпадает с классом полных двоякокруговых областей, границы которых $\Phi_1(w, \bar{w}, z\bar{z}) = 0$ дважды непрерывно дифференцируемы и аналитически выпуклы извне ($L(\Phi_1) > 0$).

Для областей, границы которых определяются условиями (1′), (2), имеют место интегральные представления

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\xi F[r_1(\tau)\,\xi^n,\ r_2(\tau)\,\eta^n]\,d\xi}{(\xi - u)^2}, \quad (3)$$

если $F(w, z)$ регулярна в D и непрерывна в замкнутой области $\bar{D}$,

$$F(w, z) = \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_C \frac{\varphi[r_1(\tau)\,\xi^n,\ r_2(\tau)\,\eta^n]\,d\xi}{\xi - u}, \quad (4)$$

$\Phi(w, z) = F(w, z) + nwF_w'(w, z) + nzF_z'(w, z)$, если $F(w, z)$ голоморфна в D и непрерывна вместе со своими производными в $\bar{D}$, $u = \tau\left(\frac{w}{r_1(\tau)}\right)^{1/n} + (1 - \tau) \times \left(\frac{z}{r_2(\tau)}\right)^{1/n} e^{it}$, n — наименьшее целое число не меньше μ, $\mu = \sup_{0<\tau<1} \frac{d\ln r_1(\tau)}{d\ln \tau}$. C — окружность $|\zeta| = 1$, $\eta = \zeta$.

Следствие (отмечавшееся автором ранее, РЖМат, 1957, 8587). Для любой ограниченной, полной, двоякокруговой области, граница которой дважды непрерывно дифференцируема и аналитически выпукла извне, имеют место интегральные представления (3) и (4).

Е. Н. Аравийская

6396. Краевые задачи для уравнений с особыми плоскостями. Темляков А. А., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 91—98

D — полная двоякокруговая область пространства двух комплексных переменных w и z с дважды непрерывно дифференцируемой и аналитически выпуклой извне границей: $|w| = r_1(\tau)$, $|z| = r_2(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. $F(w, z)$ голоморфна в D и непрерывна вместе со своими производными в замкнутой области $\bar{D}$. При помощи ранее полученных интегральных представлений (реф. 6395) выводятся формулы, определяющие значения функции $F(w, z)$ в области D, если известно на границе D поведение линейного дифференциального оператора 1-го порядка

$$\lambda_1[F] \equiv a(w, z)\,(wF_w'(w, z) + zF_z'(w, z)) + b(w, z)\,F(w, z)$$

или оператора 2-го порядка

$$\lambda_2[F] \equiv a(w, z)\,(w^2F_{ww}''(w, z) + 2wzF_{wz}''(w, z) +$$

$+ z^2F''_{zz}(w, z)) + b(w, z)(w, F'_w(w, z) + zF'_z(w, z)) +$

$+ c(w, z)F(w, z),$

$c(w, z), a(w, z), b(w, z)$

— регулярные функции в $\overline{D}$. Е. Н. Аравийская

6397. Интегральные представления функций двух комплексных переменных. Темляков А. А., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 1, 38—41

Рассматривается область $D \subset C^2$ (где C^2 — пространство комплексных переменных w, z), ограниченная гиперповерхностью $w = r_1(\tau)\zeta$, $z = r_2(\tau)\eta$, где $\eta = \zeta e^{-it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, $0 < \tau < 1$, $r_1(0) = 0$, $r_1(1) < \infty$, $r_1(\tau) > 0$, $(r_1(\tau)\tau^{-1})' < 0$, $r_2(\tau) = \exp\left[-\int_0^\tau \frac{\tau}{1-\tau} d \ln r_1(\tau)\right]$, $\zeta = \rho(\varphi)e^{i\varphi}$. Здесь $\rho(\varphi)$ — действительная, положительная, непрерывная, периодическая функция с периодом 2π. Предполагается, что $(0, 0) \in D$.

Функция $F(w, z)$ принадлежит в области D к классу $\alpha(D)$, если 1) она голоморфна в области D, 2) функции F, F'_w, F'_z непрерывны в $\overline{D}$. В заметке доказывается теорема: Если функция $F \in \alpha(D)$, то для точки $(w, z) \in D$:

$$F(w, z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_0^{2\pi} dt \int_0^1 d\tau \int_{|\zeta| = \rho(\varphi)} \frac{\Phi[r_1(\tau)\zeta, r_2(\tau)\eta]}{\zeta - u} d\zeta.$$

Здесь $h = \zeta e^{it}$, $u = \frac{\tau}{r_1(\tau)}w + \frac{1-\tau}{r_2(\tau)}ze^{it}$; $\{|\zeta| = \rho(\varphi)\}$ — замкнутый контур, являющийся жордановой спрямляемой кривой, содержащий внутри точку $\zeta = 0$.

Б. А. Фукс

6398. Задача. [По поводу статьи В. П. Потапова «Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций»]. Кужель А. Б., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 4, 158

Ставится задача, связанная с уточнением свойств функции, фигурирующей в установленном В. П. Потаповым представлении аналитической однозначной и J-нерастягивающей в круге $|\zeta| < 1$ матрицы-функции с необращающимся в тождественный нуль определителем (РЖМат, 1958, 289). Г. Ц. Тумаркин

6399. Советские достижения в теории псевдоаналитических функций. Андреян-Казаку (Realizări sovietice în teoria funcţiilor pseudoanalitice. Andreian Cazacu Cabiria), An. Rom.-Sov. Ser. mat.-fiz., 1959, **13**, № 2, 69—76 (рум.; рез. русск.)

Лекция, прочитанная 22 ноября 1958 г. на физико-математическом факультете Бухарестского университета, содержит обзор результатов советских математиков по теории квазиконформных отображений (вместе с обобщениями и приложениями), начиная с работы С. А. Чаплыгина (1902 г.) до самого последнего времени. Особенно подчеркивается значение работы М. А. Лаврентьева (1935 г.). В большей или меньшей степени подробно рассказано о результатах Г. М. Адельсона-Вельского, П. П. Белинского, А. В. Бицадзе, И. Н. Векуа, Л. И. Волковыского, А. А. Гольдберга, И. И. Данилюка, М. Г. Крейна (в статье ошибочно Крейнеса), А. С. Кронрода, Л. Д. Кудрявцева, М. А. Лаврентьева, А. И. Маркушевича, Д. Е. Меньшова, В. Г. Михайлука, И. Н. Песина, Г. Н. Положего, А. М. Роднянского, В. В. Степанова, Б. В. Шабата, З. Я. Шапиро и польского математика Б. В. Бояpского. Имеются мелкие опечатки и неточности. А. А. Гольдберг

6400. Введение в теорию квазиконформных отображений. Кюнци (Einführung in die Theorie der quasikonformen Abbildungen. Künzi), Elem. Math., 1956, **11**, № 6, 121—129 (нем.)

Изложение основных понятий теории квазиконформных отображений элементарными средствами и краткий обзор некоторых результатов таких, как теоремы искажения, экстремальные квазиконформные отображения и др. Библ. 11 назв. К. С. Сцилард

6401. Поведение квазиконформного отображения в изолированной особой точке. Белинский П. П., Наук. зап. Львівськ. ун-ту, 1955, **29**, № 6 (1), 58—70

Развернутое изложение результатов, опубликованных ранее (РЖМат, 1954, 2110). И. Н. Песин

6402. Квазиконформные отображения. Альфорс (On quasiconformal mappings. Ahlfors Lars V.), J. Analyse Math., 1953—1954, **3**, 207—208 (англ.)

Пусть $\zeta = \zeta(z)$ — дифференцируемый гомеоморфизм плоскости z в плоскость ζ. Положим $p = \frac{\partial\zeta}{\partial z}$, $q = \frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}}$; выражение $(|p| + |q|)(|p| - |q|)^{-1} = \varkappa$ будем называть искажением (dilatation) отображения ζ. Дифференцируемое отображение с ограниченным $\varkappa$ называется квазиконформным. Это понятие распространяется на отображение одной римановой поверхности на другую.

Тейхмюллер высказал гипотезу, что в данном гомотопическом классе отображений одной компактной римановой поверхности W на другую W' гомеоморфизм, для которого верхняя грань $\varkappa$ является наименьшей, есть либо конформное отображение, либо же удовлетворяет соотношению

$$\frac{q}{p} = k\frac{f}{|f|} \qquad (1)$$

для положительного постоянного $k < 1$ и квадратичного дифференциала fdz^2 на W. Если W и W' имеют граничные контуры, то тот же самый результат справедлив при соответствующем определении гомотопии с f действительным вдоль граничных контуров. Если потребовать, чтобы заданные точки поверхности W переходили в заданные точки поверхности W', то fdz^2 может иметь в этих точках простые полюса.

Настоящая статья посвящена, главным образом, доказательству гипотез Тейхмюллера.

Автор распространяет понятие квазиконформности на гомеоморфизм, который не обязательно является дифференцируемым, говоря, что гомеоморфизм имеет максимальное искажение K, если каждый топологический прямоугольник плоскости z отображается в прямоугольник плоскости ζ, конформный модуль которого самое большее в K раз больше конформного модуля первоначального прямоугольника. Это определение согласовывается с ранним определением для дифференцируемых отображений и имеет то преимущество, что при некоторых тривиальных условиях семейство таких отображений с равномерно ограниченным искажением есть нормальное семейство и предельное отображение также имеет ограниченное искажение. Доказательство гипотезы Тейхмюллера состоит из двух частей. Сначала показывается, что любое отображение, удовлетворяющее соотношению (1), имеет наименьшее максимальное искажение в данном гомотопическом классе.

В доказательстве используется принцип длина-площадь (length — area), который благодаря Тейхмюллеру применим и для недифференцируемых отображений. Вторым и более трудным шагом является доказательство существования гомеоморфизма, удовлетворяющего соотношению (1) в каждом гомотопическом классе гомеоморфизмов. Автор доказывает это введением отображений квазиконформных в среднем, т. е. отображений, для которых интеграл от m-й степени искажения конечен; далее, минимизируя среднее искажение, находит условия, кото-

рым должны удовлетворять экстремальные отображения. Затем показывает, что при $m \to \infty$ эти экстремальные отображения стремятся к отображению, удовлетворяющему соотношению (1). Пусть T_g — пространство всех римановых поверхностей рода g с подходящим образом выбранной топологией, которое метризуется выбором расстояний между двумя поверхностями как логарифма наименьшего максимального искажения гомеоморфизмов в соответствующем гомотопическом классе отображений между ними. Тогда T_g становится метрическим пространством и как следствие гипотезы Тейхмюллера получается, что T_g гомеоморфно $(6g-6)$-мерному евклидовому пространству. H. L. Royden

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 4, 348

6403. О субгармонических функциях и дифференциальной геометрии в целом. Хубер (On subharmonic functions and differential geometry in the large. Huber Alfred), Comment. math. helv., 1957, 32, № 1, 13—72 (англ.)

Пусть M — открытое двумерное риманово многообразие, на котором метрика задана положительно определенной квадратичной формой с коэффициентами класса C'''. Тогда возможно ввести локально изотермические параметры, т. е. такие параметры, что метрика задается в них формулой $ds^2 = e^{2u(z)} |dz|^2$, где $z = x + iy$. В изотермических параметрах гауссова кривизна K многообразия дается формулой

$$K = -e^{-2u}\Delta u \quad (\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2). \tag{1}$$

Следовательно, если $dA = e^{2u}dxdy$ есть элемент площади на M, то

$$KdA = -\Delta u dxdy. \tag{2}$$

Чтобы рассматривать проблемы дифференциальной геометрии в целом, поступают так: 1) если M ориентируемо, вводят риманову поверхность, определенную конформной структурой M (РЖМат, 1957, 7848); 2) если M не ориентируемо, то заменяют M ориентируемой двулистной накрывающей поверхностью и вводят локально униформирующие параметры, определяемые как функции, конформно отображающие часть M на область в z-плоскости. В результате, M рассматривается как риманова поверхность S, на которой введена конформная метрика

$$ds = e^{u(z)} |dz|, \tag{3}$$

где z — локально униформизирующая переменная. Формулы (1) и (2) связывают дифференциальную геометрию с теорией потенциала, с целью реферируемой работы является исследование этой связи.

Пусть с функцией $u(z)$ связаны функции множества μ, μ^+ и μ^-, как в РЖМат, 1 59, 5185. Положим $C^+ = 2\pi\mu^-(S)$, $C^- = 2\pi\mu^+(S)$, $C = C^+ - C^- = -2\pi\mu(S)$; C^+ и C^- суть либо конечные неотрицательные числа, либо символ $+\infty$. C определено, если C^+ и C^- не обращаются оба в $+\infty$, и называется curvatura integra (примечание референта: в оригинале используется этот латинский термин, поэтому он сохранен и в реферате) метрики. Для достаточно гладкой функции

$$C^+ = \iint_S \max[-\Delta u, 0]\, dxdy = \iint_M \max[K, 0]\, dA,$$

$$C^- = \iint_S \max[\Delta u, 0]\, dxdy = \iint_M \max[-K, 0]\, dA,$$

$$C = -\iint_S \Delta u dxdy = \iint_M KdA.$$

Пусть S — открытая риманова поверхность, на которой введена конформная метрика (3), причем $u(z)$ допускает локальное представление $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$ (РЖМат, 1959, 5185). Говорим что метрика $e^{u(z)}|dz|$ полная, если для каждой локально спрямляемой траектории σ, стремящейся к идеальной границе S, имеем

$$\int_\sigma e^{u(z)} |dz| = +\infty.$$

При этом траектория на S называется стремящейся к идеальной границе S, если: 1) эта траектория есть топологический образ $p = p(t)$ интервала $0 \leqslant t < 1$; 2) для любого компактного множества $M \subset S$ найдется число $t'(M) < 1$ такое, что $p(t) \overline{\in} M$ при $t'(M) < t < 1$.

Теорема. Пусть S — конечно связная открытая риманова поверхность, на которой определена полная конформная метрика $e^{u(z)}|dz|$ и пусть curvatura integra существует. Тогда $C \leqslant 2\pi X$, где X есть характеристика Эйлера — Пуанкаре римановой поверхности S. Если кроме того, $A = \iint_S e^{2u}dxdy < \infty$ (A — площадь S), то $C = 2\pi X$. Замечание. Первое из этих утверждений есть обобщение одной теоремы Кон-Фоссена (Cohn Vossen S., Compositio math., 1935, 2, 69—133).

Теорема. Пусть S — бесконечно связная риманова поверхность, $e^{u(z)}|dz|$ — полная конформная метрика на S. Тогда $C^- = +\infty$.

Теорема. Пусть S есть открытая риманова поверхность, на которой определена полная конформная метрика $e^{u(z)}|dz|$. Тогда 1) если мера μ^+ имеет компактный носитель, то $A = \iint_S e^{2u}dxdy = +\infty$, 2) если $C^- < \infty$, то S параболического типа.

В работе содержится ряд вспомогательных результатов о конформных метриках в однолистных кольцевых областях. Как приложение доказано: Для того чтобы целая функция $f(z)$ была полиномом, необходимо и достаточно существование числа $\lambda > 0$ такого, что $\int_\sigma |f(z)|^{-\lambda} |dz| = +\infty$ для всякого локально спрямляемого пути, стремящегося к бесконечно удаленной точке. Библ. 34 назв. С. М. Лозинский

6404. Поведение квазиконформного отображения в границе. Ловатер (The boundary behavior of a quasi-conformal mapping. Lohwater A. J.), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, № 2, 335—342 (англ.)

Распространяется и для квазиконформных отображений обобщается следующая теорема Бёрлинга (Beurling A., Acta Math., 1940, 72, 1—13): Если $w = f(z)$ — однолистная аналитическая функция для $|z| < 1$, тогда существует $\lim_{r \to 1,\ \theta = \text{const}} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ для всех θ ($0 < \theta \leqslant 2\pi$), за возможным исключением некоторого множества точек $e^{i\theta}$ емкости нуль, причем множество точек $e^{i\theta}$, для которых $f(e^{i\theta})$ имеет постоянное значение, не может иметь положительную емкость.

Автор называет „квазиконформной функцией" любую комплекснозначную функцию $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ($z = x + iy$) с непрерывными производными u_x, u_y, v_x, v_y такими, что якобиан $J(z) = u_x v_y - v_x u_y \geqslant 0$ (знак равенства допускается только для множества точек z, не имеющего предельной точки внутри области определения функции), и для которой в точках, где $J(z) > 0$, отношение полуосей бесконечно малых эллипсов, являющихся образами бесконечно малых окружностей, ограничено одним и тем же числом $K \geqslant 1$ для всех значений z. Для этих функций он доказывает теорему, которую в дальнейшем использует в качестве вспомогательной теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $w = f(z)$ квазиконформна и ограничена, $|f(z)| < M$ для $|z| < 1$ и пусть L_1 и L_2 — две дуги, лежащие в круге $|z| < 1$, кроме их единственной общей (конечной) точки z_0 на окружности $|z| = 1$. Если существуют $\lim_{|z| \to 1} f(z) = \alpha$ для $z \in L_1$ и $\lim_{|z| \to 1} f(z) = \beta$ для $z \in L_2$, то $\alpha = \beta$ и $\lim_{|z| \to 1} f(z) =$

равномерно, если $z \to z_0$ по любому пути между L_1 и L_2.

Эта теорема доказывается как простое следствие одной ранее опубликованной теоремы Носиро (Noshiro K., Nagoya Math. J., 1950, 1, 83—89).

Обобщение упомянутой теоремы Бёрлинга содержится в теореме 2: Пусть функция $w = f(z)$ осуществляет квазиконформное отображение области $|z| < 1$ на односвязную область G плоскости w. Тогда для всех точек $e^{i\theta}$, за возможным исключением некоторых из них, образующих множество с логарифмической емкостью нуль, существует $\lim\limits_{z \to e^{i\theta}} f(z)$ равномерно в любой угловой области внутри $|z| < 1$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$. Далее, функция $f(e^{i\theta}) = \lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\theta})$ не может быть постоянной на каком-либо множестве точек $e^{i\theta}$ с положительной емкостью (кроме тривиального случая $f(z) \equiv \text{const}$).

Для доказательства первого утверждения этой теоремы автор рассматривает интеграл по кругу с радиусом $^1/_2$, касающимся единичной окружности в точке $e^{i\theta}$ изнутри:

$$\Lambda(\theta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos t \cdot dt \int_0^{\cos t} \sqrt{j(z)}\, d\rho$$

($z = e^{i\theta}(1 - \rho e^{-it})$). Если $\Lambda(\theta)$ конечно, то, пользуясь теоремой 1, можно доказать, что существует $\lim\limits_{z \to e^{i\theta}} f(z)$ равномерно внутри любой угловой области внутри круга $|z| < 1$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$. Поэтому достаточно показать, что $\Lambda(\theta) = \infty$ лишь на множестве логарифмической емкости нуль. В противном случае можно найти ограниченную функцию $U(z)$ ($|U(z)| < Y_0 < \infty$), определяемую как потенциал некоторого распределения единичной массы, такую что интеграл по кругу $|z| < 1$

$$S = \iint_{|z|<1} \sqrt{j(z)}\, \frac{\partial U}{\partial r}\, r dr d\theta$$

имеет ограниченное абсолютное значение; кроме того, будет справедливо равенство

$$S = \int_{\zeta \in E} \sigma(\zeta)\, d\mu(\zeta),$$

где $\sigma(\zeta) = -\iint_{|z|<1} \sqrt{j(z)}\, d \arg(re^{i\varphi} - \zeta)\, d\zeta$

($0 \leqslant \varphi < 2\pi$) и $\mu(\zeta)$ распределение массы 1 над множеством E. С другой стороны, $\sigma(\zeta)$ оценивается при помощи величины $\Lambda(\theta)$ снизу: $\sigma(e^{i\theta}) \geqslant C \cdot \Lambda(\theta) - \pi M$, где $C > 0$. Если $\Lambda(\theta)$ для $e^{i\theta} \in E$ бесконечно, то получается противоречие (S не может быть конечной величиной), чем доказано и первое утверждение теоремы 2. Второе утверждение этой теоремы (невозможность равенства $f(e^{i\theta}) = \text{const}$ для множества точек $e^{i\theta}$ положительной емкости) доказывается при помощи теоремы Пфлугера: При отображении круга $|z| \leqslant 1$ на круг $|w| \leqslant 1$, квазиконформном для $|z| < 1$ и непрерывном для $|z| \leqslant 1$, множеству E_z емкости нуль на окружности $|z| = 1$ соответствует множество E_w емкости нуль на $|w| = 1$ (РЖМат, 1959, 1412).

Указывается, что описанным выше методом можно доказать: теорему 3. Пусть $f(z)$ — квазиконформная функция, определенная в области $|z| < 1$, отображающая эту область на область с конечной площадью на сфере Римана. Тогда для каждой точки $e^{i\theta}$ за возможным исключением множества точек логарифмической емкости нуль, существует $\lim\limits_{z \to e^{i\theta}} f(z)$ равномерно внутри любой угловой области в круге $|z| < 1$ с вершиной в $e^{i\theta}$. Подчеркивается, что здесь однолистность отображения не требуется. К. С. Сцилард

6405. О квазиконформных отображениях. Дженкинс (On quasiconformal mappings. Jenkins James A.), J. Rational Mech. and Analysis, 1956, 5, №2, 343—352 (англ.)

Теорема Бёрлинга (реф. 6404) обобщается для квазиконформных функций способом, отличным от того, который применял Ловатер. Доказательство обобщенной теоремы основывается на двух леммах.

Лемма 1. Пусть дуга l в круге $|z| \leqslant 1$, оканчивающаяся в точке a на окружности $|z| = 1$, является некасательным путем, т. е. лежит в угле между двумя хордами окружности $|z| = 1$, выходящими из точки a. Тогда ее образ λ, полученный посредством однолистной квазиконформной функции $\zeta = \psi(z)$, отображающей круг $|z| < 1$ на круг $|\zeta| < 1$, является также некасательным путем. Квазиконформное отображение $\zeta = \psi(z)$ круга $|z| < 1$ на круг $|\zeta| < 1$ непрерывно продолжается как отображение $|z| \leqslant 1$ на $|\zeta| \leqslant 1$.

Лемма 2. Пусть однолистная непрерывная функция $z = \varphi(\zeta)$ квазиконформна для $|\zeta| < 1$, $\varphi(0) = 0$ отображает гомеоморфно круг $|\zeta| \leqslant 1$ на круг $|z| \leqslant 1$; тогда образ множества точек E емкости нуль на окружности $|\zeta| = 1$ будет также множеством емкости нуль на $|z| = 1$.

Для доказательства первой леммы автор пользуется теоремой искажения Альфорса (см., например, Неванлинна Р., Однозначные аналитические функции, М.—Л., 1941, 96—104) в форме, уточненной Тейхмюллером (Teichmüller, O., Dtsch. Math., 1938, 3, 621—678). Вторая лемма получается как следствие одной известной теоремы Пфлугера, (Pfluger A., Ann. Inst. Fourier, 1951, 2, 69—80; см. также РЖМат, 1959, 1412). Обобщение теоремы Бёрлинга содержится в следующих двух теоремах.

Теорема 1. Пусть задана в круге $|z| < 1$ конечнолистная квазиконформная функция $f(z) \neq \text{const}$. Тогда существует $\lim f(z)$, если z стремится по любому некасательному пути к любой точке $a = e^{i\theta}$ в $|z| < 1$, за возможным исключением некоторого множества точек a емкости нуль.

Теорема 2. Для функции $f(z)$ теоремы 1 предполагается, что для некоторого множества A точек $e^{i\theta}$ $\lim\limits_{r \to 1} f(re^{i\theta})$, $\theta = \text{const}$, имеет одно и то же значение c. Тогда емкость множества A равна нулю.

При доказательстве этих двух теорем используется (кроме приведенных двух лемм) сама теорема Бёрлинга и тот факт, что сложная функция из аналитической и квазиконформной функции является квазиконформной функцией.

В связи с доказанными теоремами автор ставит, следуя Агмону (S. Agmon), вопрос о справедливости или несправедливости следующих трех теорем:

X. Пусть $\varphi(\zeta)$ осуществляет однолистное квазиконформное отображение круга $|\zeta| < 1$ на $|z| < 1$, которое может быть продолжено до гомеоморфизма между $|\zeta| \leqslant 1$ и $|z| \leqslant 1$. Тогда образ множества E точек на $|\zeta| = 1$ угловой меры нуль будет тоже множеством угловой меры нуль на окружности $|z| = 1$ (Аналог теоремы Ф. и М. Рисса — Лузина — Привалова).

Y. Пусть $f(z)$ — ограниченная квазиконформная функция для $|z| < 1$ ($|f(z)| < M$). Тогда $\lim f(z)$ существует, если z стремится по любому некасательному пути к любой точке a на окружности $|z| = 1$, за возможным исключением множества точек a меры нуль (аналог теоремы Фату).

Z. Пусть $f(z)$ — квазиконформная функция для $|z|<1$ и пусть A — множество точек на окружности $|z|=1$ таких, что $\lim f(z)$ существует, если z стремится к $a \in A$ по любому некасательному пути и имеет одно и то же значение c для всех $a \in A$. Тогда угловая мера A равна нулю (кроме тривиального случая $f(z)=\text{const}$) (аналог теоремы Лузина — Привалова) и доказывает, что или все эти три теоремы имеют силу, или все три неверны. (Во время появления реферируемой статьи еще не был известен контрпример Бёрлинга и Альфорса к теореме X; см. реф. 6406).

В конце статьи автор дает новое толкование теорем 1 и 2 для случая однолистных квазиконформных функций и одновременно новые доказательства для них при помощи понятия экстремальной длины семейства кривых в области $r<|z|<1$ (рассматривается семейство всех локально спрямляемых открытых кривых, имеющих свои концы на окружности $|z|=r$ и в некотором множестве E точек z на $|z|=1$ соответственно. Емкость E равна нулю тогда и только тогда, если экстремальная длина семейства бесконечна (ср. также РЖМат, 1959, 1412). Эти доказательства выполнены для простоты только для конформных отображений. К. С. Сцилард

6406. Соответствие границ при квазиконформных отображениях. Бёрлинг, Альфорс (The boundary correspondence under quasiconformal mappings. Beurling A., Ahlfors L.), Acta math., 1956, **96**, № 1-2, 125—142 (англ.)

Пусть функция $w=w(z)$ осуществляет квазиконформное отображение верхней полуплоскости $z=x+iy$ на верхнюю полуплоскость $w=u+vi$. Известно, что это соответствие может быть непрерывно продолжено также на границы $y=0$, $v=0$ этих областей, причем соответствие границ задается непрерывной монотонной функцией $u=u(x)$.

Доказывается следующая теорема: Для того чтобы для функции $u=u(x)$, определяющей соответствие границ $y=0$, $v=0$ верхних полуплоскостей z и w, существовала квазиконформная функция $w=w(z)$, отображающая область $y>0$ на область $v>0$ с заданным соответствием границ $u=u(x)$, необходимо и достаточно выполнение неравенства для всех x и t:

$$\frac{1}{\rho} \leqslant \frac{u(x+t)-u(x)}{u(x)-u(x-t)} \leqslant \rho, \qquad (1)$$

где ρ — действительная константа $\geqslant 1$.

Точнее: Если (1) выполнено, то для квазиконформной функции $w=w(z)$ максимальное искажение K не больше ρ^2; с другой стороны, при заданной $u(x)$ для всех возможных однолистных квазиконформных функций $w=w(z)$ с соответствием границ $u=u(x)$ максимальное искажение $K \geqslant 1+A \ln \rho$, где A — универсальная константа.

В конце статьи дается пример функции $u(x)$, не являющейся абсолютно непрерывной и все же удовлетворяющей условию (1). Такую функцию можно строить только тогда, когда $\rho>1$ (т. е. если рассматриваемое квазиконформное отображение не является конформным). Таким образом теорему об абсолютной непрерывности функции $u(x)$ для конформных отображений, а также теоремы X, Y и Z (реф. 6405) нельзя распространить на общие квазиконформные отображения.

К. С. Сцилард

6407. Добавления и исправления к статье «Об абсолютно непрерывных функциях двух и более переменных в смысле Тонелли и квазиконформных отображениях в смысле Мори». Юдзёбо (Supplements and corrections to my paper: On absolutely continuous functions of two or more variables in the Tonelli sense and quasi-conformal mappings in the A. Mori sense. Yûjôbô Zuiman), Comment. math. Univ. St. Paul., 1956, **5**, № 1, 33—36 (англ.)

Последние две теоремы ранее опубликованной статьи автора (РЖМат, 1957, 2984) формулируются в незначительно измененном виде без доказательства.

K. Strebel

Перевод из Math. Revs, 1958, **19**, № 3, 258

6408. Квазиконформная инвариантность параболичности граничного элемента. Журкеску (L'invariance K-quasi conforme de la parabolicité d'un élément frontière. Jurchescu Martin), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 21, 2997—2999 (франц.)

Пусть R — открытая риманова поверхность, $\beta(R)$ — множество ее граничных элементов. Граничный элемент $\gamma \in \beta(R)$ называется параболическим, если его емкость $c_\gamma = 0$. Пусть T — гомеоморфизм $R \to R'$, T_0 — гомеоморфизм $\beta(R) \to \beta(R')$, порожденный гомеоморфизмом T. Автор доказывает следующую теорему: Если T реализует квазиконформное отображение и $\gamma \in \beta(R)$ — параболический граничный элемент, то $T_0(\gamma) \in \beta(R')$ — также параболический граничный элемент. Доказательство существенно опирается на две леммы и одну теорему, которые сформулированы в заметке. Идея доказательства автора следующая: условие $c_\gamma = 0$ заменяется условием $\mu_\gamma = \infty$, где величина μ_γ связана с модулями последовательности компактных областей, исчерпывающих окрестность γ; затем следует доказательство (проведенное в заметке) инвариантности условия $\mu_\gamma = \infty$ относительно квазиконформных отображений.

Из теоремы автора следует инвариантность поверхностей с нулевой границей (Неванлинна, Униформизация, М., 1955, стр. 350; РЖМат, 1956, 7313 К) относительно квазиконформных отображений.

Примечание референта. Теорема об инвариантности поверхностей с нулевой границей относительно квазиконформных отображений была ранее сформулирована Пфлугером (Pfluger, C. r. Acad. sci., 1948, **227**, 25—26), однако доказательство Пфлугера ошибочно. Для случая поверхностей рода нуль теорема содержится в работе референта (реф. 6403). И. Н. Песин

6409. Метрические свойства Q-квазиконформных отображений. Песин И. Н., Матем. сб., 1956, **40**, № 3, 281—294

В первой части работы вводится определение так называемых общих, Q-квазиконформных отображений, обобщающее классическое определение квазиконформного отображения, данное М. А. Лаврентьевым. Определение общего Q-квазиконформного отображения сходно с определением отображений, рассматривавшихся А. И. Маркушевичем в 1940 г. Основной результат этой части — важная теорема об абсолютной непрерывности Q-квазиконформного отображения и ее следствия.

Во второй части доказывается, что равномерный предел последовательности Q-квазиконформных отображений есть также Q-квазиконформное отображение. В последней части работы рассматриваются различные классы теоретико-функциональных нуль-множеств, множества единственности и устранимые множества в различных классах аналитических функций и изучается их поведение при Q-квазиконформных отображений. Б. В. Боярский

6410. О характеристике квазиконформных отображений. Штребель (On the miximal dilation of quasiconformal mappings. Strebel Kurt), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 6, 903—909 (англ.)

Автор рассматривает квазиконформные отображения открытого множества с характеристикой $K = \sup \frac{m'}{m}$, где m — модуль топологического четырехугольника, расположенного в области задания отображения, m' — модуль отображенного четырехугольника, верхняя грань берется по всевозможным четырехугольникам. Пусть G — откры

тое множество, E — подмножество G, замкнутое в G. Основные результаты работы следующие:

1) Если вне всякой компактной части E не существует непостоянной однозначной аналитической функции с ограниченным интегралом Дирихле (т. е. E класса O_{AD}), то возможно квазиконформное продолжение отображения из $G-E$ на E с той же характеристикой (теорема 1).

2) Если E является счетной суммой множеств конечной длины, то всякое отображение, гомеоморфное в G и квазиконформное в $G-E$, квазиконформно в G с той же характеристикой (теорема 2).

3) Если $\operatorname{mes} E = 0$, то характеристика квазиконформного в G отображения совпадает с характеристикой этого отображения в $G-E$ (теорема 3).

В качестве следствия получено следующее усиление теоремы Альфорса-Бёрлинга (Acta math., 1950, 83, 101—129): замкнутое множество E, являющееся счетной суммой множеств конечной длины, принадлежит классу O_{AD} тогда и только тогда, если вне E не существует однолистной ограниченной аналитической функции.

Примечание референта. Результаты теорем 1) и 3) совпадают с результатами более поздней работы референта (реф. 6409), результат теоремы 2) ввиду известной теоремы Пенлеве — Безиковича (см., например, Сакс, Теория интеграла, М., 1949, 284) содержится в теореме 3. 6 референта. И. Н. Песин

6411. Об экстремальных квазиконформных отображениях. Одзава (On extremal quasiconformal mappings. Ozawa Mitsuru), Kodai Math. Semin. Repts, 1958, **10**, № 3, 109—112 (англ.)

Пусть W и W' — замкнутые римановы поверхности рода $g \geqslant 2$. Как известно, экстремальное в смысле Тэйхмюллера отображение W на W', переводящее фиксированную точку $p_0 \in W$ в данную точку $q \in W'$, обладает всюду, исключая конечное число точек, постоянным коэффициентом искажения K, вообще говоря, зависящим от точки q: $K = K(q)$.

К изучению функционала $K(q)$, непрерывность которого устанавливается, автор привлекает общие результаты Морса и получает некоторые неравенства для числа q и числовых характеристик в смысле Морса критических множеств этого функционала. Кроме того, он, в частности, дает критерий, когда критическое множество состоит из одной точки. Б. В. Боярский

6412. О мероморфных модификациях. V. Образование аналитических и мероморфных модификаций при помощи σ-процессов. Штоль (Über meromorphe Modifikationen. V. Die Erzeugung analytischer und meromorpher Modifikationen durch σ-Prozesse. Stoll W.), Math. Ann., 1955, **130**, № 4, 272—316 (нем.)

Автор завершает доказательства утверждений, сформулированных в его предыдущих работах (РЖМат, 1956, 1296, 6546, 6547; 1957, 1353). Речь по-прежнему идет о модификациях $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}[G, A, M, \tau; H, B, N, v]$ комплексного многообразия $G = A + M$ комплексной размерности 2 в многообразие $H = B + N$ той же размерности, причем особые множества M и N являются подмножествами некоторого аналитического множества, комплексная размерность которого не превосходит 1. Предлагается конструктивный метод, позволяющий получить множество точечных модификаций $\sigma(P)$, где $\sigma(P)$ является расщеплением Хопфа, т. е. подстановкой в точку P проективного пространства комплексных направлений, выходящих из P. Порядок, в котором осуществляются модификации $\sigma(P)$, как это показывает приведенный в начале работы пример, не является безразличным. Модификации $\sigma(P)$ упорядочиваются при помощи частично упорядоченного множества индексов (дерева) p, p_1 и p_2, имеющих общий предшествующий элемент $q = p_1 \| p_2$, и определяется множество соответствующих операторов, приводящих к предельному многообразию. Метод, изложение которого сделано с большими подробностями и сопровождается уточнениями описательного характера (некоторые формулировки занимают больше страницы), представляет собой интересный вклад в построение пространств, являющихся пределами систем в смысле Фрейденталя.

Затем доказывается, что если $\mathfrak{M}$ является аналитической модификацией в смысле части I, то она реализуется с точностью до аналитической эквивалентности при помощи некоторого дерева модификаций σ (возможность реализации $\mathfrak{M}$ с помощью модификаций σ была установлена Хопфом в случае, когда M сводится к точке). Такой же результат доказывается и в том случае, когда модификация $\mathfrak{M}$ является мероморфной, причем $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^{-1}$ являются открытыми в том смысле, как это определено автором в части I. Доказательство, которое в то же время позволяет построить дерево, основано на результатах части IV. Далее указываются упрощения, относящиеся к случаю, когда G и H имеют счетную базу открытых множеств. Тогда можно получить $\mathfrak{M}$, которая, так же как и $\mathfrak{M}^{-1}$, предполагается мероморфной и открытой, при помощи ряда модификаций, каждая из которых состоит в расщеплении точек некоторого множества M_2, не имеющего точек сгущения. P. Lelong

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 1, 69.

6413. О системе дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа на римановых поверхностях. Данилюк (Über das System von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus auf Riemannschen Flächen. Danyluk I. I. Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1958, Sar. AI, № 251/2, 7 S., ill) (нем.)

Рассматривается инвариантная система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = A(z) f(z) + B(z) \overline{f(z)} + \Phi(z) \qquad (1)$$

на конечной римановой поверхности R, ограниченной совокупностью гладких кривых. $f = (f_1, \ldots, f_n)$ — неизвестный вектор, A и B — $n \times n$-матрицы.

Пусть $\hat{R}$ — универсальная поверхность наложения поверхности R. В теореме 1 указывается формула построения ядра $H(t; \tau)$ на $\hat{R}$, автоморфного по τ относительно группы преобразований наложения при любом фиксированном $t \in \hat{R}$, ковариантного по t при любом фиксированном τ и обладающего полюсом первого порядка при $t = \tau$, причем $\operatorname{Res} H(t; \tau) = 1$.

Пусть $h(\zeta, z)$ — величина $H(t; \tau)$, перенесенная на R. Тогда система (1) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_R [A(\zeta) f(\zeta) + B(\zeta) \overline{f(\zeta)}] h(\zeta, z) \, d\sigma_\zeta + \Lambda(z).$$

Если A и B — нижние треугольные матрицы, то эта система однозначно разрешима и в этом случае автор получает представление решений системы (1), через аналитический вектор на R. Эти рассуждения являются обобщением формул представления И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, **31**, 217—314), данных им для случая, когда $n = 1$ и R — плоская область. Б. В. Боярский

6414. Меры, гармонически зависящие от одной или двух групп переменных. Аванисян (Mesures dépendant harmoniquement d'un ou de deux groupes de variables. Avanissian Vazguen), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 25, 2278—2281 (франц.)

Пусть F — векторное пространство непрерывных функций $f(x)$; носитель $K(f)$ компактен в локально компактном пространстве E, $\|f\| = \sup |f(x)|$, $x \in E$. Пусть $(y) = (y_1, \ldots, y_p)$, $(z) = (z_1, \ldots, z_q)$ — точки евклидовых пространств R^p, R^q; D_y, D_z — области в R^p, R^q; D — об-

ласть в R^{p+q}; F_1 — векторное подпространство в F. Вводятся линейные $H_y(D_y, F_1)$-формы $\mu_y(f)$ (меры, если $F_1 \equiv F$), обладающие следующими свойствами: а) для каждого компакта $K \subset D_y$ существует такое число $M(K)$, что $|\mu_y(f)| \leqslant M(K)\|f\|$ для всех $(y) \in K$, $f \in F_1$; б) $\mu_y(f)$ — гармоническая функция $(y) \in K$ для любой $f \in F_1$. Далее вводятся линейные $\mathfrak{H}_{y,z}(D, F_1)$-формы $\mu_{y,z}(f)$ (меры, если $F_1 \equiv F$), обладающие следующими свойствами: а) для каждого компакта $K \subset D$ существует такое число $M(K)$, что $|\mu_{y,z}(f)| \leqslant M(K)\|f\|$ для всех $(y, z) \in K$, $f \in F_1$; б) $\mu_{y_0,z}$ является линейной $H_z(D \cap y_0, F_1)$-формой для каждого фиксированного $(y) = (y_0)$ и аналогично μ_{y,z_0} является линейной $H_y(D_y \cap z_0, F_1)$-формой для каждого фиксированного $(z) = (z_0)$. Если μ_y является $H_y(D_y, F)$-мерой, то норма $\|\mu_y\| = \sup |\mu_y(f)|$, $f \in F$, $\|f\| \leqslant 1$, является субгармонической (положительной, непрерывной) функцией точки (y).

Ранее автор ввел (РЖМат, 1958, 1165) классы функций $S_{y,z}(D)$ и $H_{y,z}(D)$, соответственно субгармонических и гармонических по двум группам переменных. Определяется еще класс $S_yH_z(D)$ таких функций $V(y, z)$, что: а) V ограничена сверху на каждом компакте D; б) V — субгармоническая функция от $(y) \in D_y$ при фиксированном (z) и гармоническая функция от $(z) \in D_z$ при фиксированном (y). Анонсируются теоремы относительно введенных линейных форм и мер, которые применяются для исследования свойств функций класса S_yH_z. Приведем для примера формулировки двух результатов.

Теорема 4. Пусть $V \in S_yH_z(D \setminus W)$, $W = (0 \times D_z)$, $0 \in D_y$, $D = D_y \times D_z$. Если мера μ_z, соответствующая функции V при фиксированном (z), ограничена по норме в $D_y \setminus 0$ равномерно по (z) и если существует такое открытое множество $\omega \subset D_z$, что сужение V на ω продолжаемо до функции класса $S_yH_z(D_y \times \omega)$, то функция V продолжаема до функции класса $S_yH_z(D)$.

Теорема 6. Пусть $V \in S_yH_z(D \setminus W)$, $V \geqslant \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — конечная супергармоническая функция точки $y \in D_y$. Пусть $L_r(V, z)$ — среднее от V по границе шара в D_y радиуса r с центром 0 и пусть $p > z$, $q > 2$. Тогда: а) если существует такая точка $(z_0) \in D_z$, что $r^{p+s-3}L_r(z_0)$, $s > 0$, суммируема по r, то равномерно по $(z) \in D_z$

$$\lim_{y \to 0} |y|^{p+s-2} V(y, z) \downarrow 0;$$

б) если $L_r(z_0) = O(r^{-(p+s-2)})$, $r \to 0$ (s не целое), то функция $\psi(z) = \lim\limits_{y \to 0} \sup |y|^{p+s-2} V(y, z)$ субгармонична в D_z. Доказательства лишь намечены. Е. Д. Соломенцев

6415. Об одной теореме Н. Н. Боголюбова. Сороки на Н. Г., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 2, 220—222

Методом Иоста — Лемана (Jost R., Lehmann H., Nouvo Cimento, 1957, 5, № 6, 1598—1610; РЖФиз, 1958, 9067) дается другое доказательство следующей теоремы. Пусть заданы две (обобщенные) функции $F_r(\xi_0, \xi)$ и $F_a(\xi_0, \xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, исчезающие соответственно в областях: $\xi_0 < |\xi|$ и $\xi_0 > -|\xi|$. Пусть далее их преобразования Фурье, $\widetilde{F}_j(p_0, p)$, $j = r, a$, совпадают в области $|p_0| < m$. Тогда функции $F_j(p_0, p)$ допускают аналитическое продолжение в область

$$\left|\operatorname{Im} p\right| < \left|\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m^2}\right|.$$

Эта теорема впервые была доказана Н. Н. Боголюбовым в связи с вопросами обоснования дисперсионных соотношений в квантовой теории поля (РЖФиз, 1960, 218).

В. С. Владимиров

6416. Собственные значения Фредгольма для плоских областей. Шиффер (The Fredholm eigen values of plane domains. Schiffer M.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 2, 1187—1225 (англ.)

Пусть C — замкнутая трижды непрерывно дифференцируемая кривая, разделяющая плоскость z на две области D и $\widetilde{D}$, $z = \infty \in \widetilde{D}$. Изучаются: 1) собственные значения λ_ν и собственные функции φ_ν интегрального уравнения

$$f(z) = \varphi(z) + \frac{1}{\pi}\int_C k(z, \zeta)\varphi(\zeta)\, ds_\zeta, \tag{1}$$

$$k(z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial n_\zeta} \log \frac{1}{|z - \zeta|}, \quad z, \zeta \in C$$

задачи Дирихле; 2) свойства „диэлектрической функции Грина" $G_\varepsilon(z, \zeta)$, определяемой как функция, гармоническая в D и $\widetilde{D}$, за исключением точки $z = \zeta$, имеющая в точке $z = \zeta$ логарифмический полюс с вычетом 1 при $\zeta \in \widetilde{D}$, с вычетом ε при $\zeta \in D$ $(0 < \varepsilon < 1)$, непрерывная на C и удовлетворяющая при $\zeta \in D \cup D$ условиям

$$\frac{\partial G_\varepsilon}{\partial n} + \varepsilon \frac{\partial G_\varepsilon}{\partial \widetilde{n}} = 0 \text{ на } C, \quad \log|z| + G_\varepsilon \to 0 \text{ при } z \to \infty.$$

Вводятся в рассмотрение интегралы

$$\frac{\lambda_\nu}{\pi}\int_C x(z, \zeta)\varphi_\nu(\zeta)\, ds_\zeta = \begin{cases} h_\nu(z), & z \in D \\ \widetilde{h}_\nu(z), & z \in \widetilde{D} \end{cases} \tag{2}$$

$(h_\nu(z) = (1 + \lambda_\nu)\varphi_\nu(z)$, $\widetilde{h}_\nu(z) = (1 - \lambda_\nu)\varphi_\nu(z)$ при $z \in C$) и аналитические соответственно в D и $\widetilde{D}$ функции $v_\nu(z) = \frac{\partial h_\nu}{\partial z}$, $\widetilde{v}_\nu(z) = \frac{\partial \widetilde{h}_\nu}{\partial z}$. Устанавливаются для них в сущности эквивалентные (2) интегральные уравнения типа

$$v_\nu(z) = \frac{\lambda_\nu}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{v_\nu(\zeta)}\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad \widetilde{v}_\nu(z) = \frac{\lambda_\nu}{\pi}\iint_D \frac{v_\nu(\zeta)\, d\delta}{(\zeta - z)^2},$$

граничное условие на C

$$v_\nu \frac{dz}{ds} = \frac{1}{1 - \lambda_\nu}\widetilde{v}_\nu \frac{dz}{ds} + \frac{\lambda_\nu}{1 - \lambda_\nu}\overline{\widetilde{v}_\nu \frac{dz}{ds}}.$$

Получены разложения для функций $G(z, \zeta)$ и обычных функций Грина по ортонормированным (с равенствами типа $\iint_D \nabla h_\nu \cdot \nabla h_\mu\, d\tau = \delta_{\nu\mu}$) функциям h_ν, $\widetilde{h}_\nu$. На основании этого показано, что функции $f_\varepsilon(z) = \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}P_\varepsilon(z, \zeta)\right)$, $\widetilde{f}_\varepsilon(z) = \exp(-\widetilde{P}_\varepsilon(z, \zeta))$ (где, например, $\widetilde{P}_\varepsilon = G_\varepsilon + iH_\varepsilon$, $H_\varepsilon(z, \zeta)$ — сопряженная к $G_\varepsilon(z, \zeta)$ в $\widetilde{D}$) однолистно отображает D $(\widetilde{D})$ на семейство областей D_ε $(\widetilde{D}_\varepsilon)$, причем $\widetilde{D}_1 \equiv D$ и $\widetilde{D}_0$ — внешность круга.

Выведены формулы для вариаций $\delta\lambda_\nu$ и $\delta G_\varepsilon(z, \zeta)$ при внутренней вариации вида $\delta z \equiv z^* - z = \alpha(z - z_0)^{-1}$, а также и при геометрическом задании нормальных вариаций δn точек кривой C. С помощью этого приготовленного к решению вариационных задач аппарата получена точная нижняя оценка наименьшего собственного значения. λ_1 для класса „равномерно аналитических с модулем (r, R)" кривых C, отображаемых на $|\zeta| = 1$ функциями, аналитическими в фиксированном кольце $r < |\zeta| < R$, $r < 1$, $R > 1$: $\lambda_1 \geqslant (r^2 + R^2)(1 + (rR)^2)^{-1}$, и указана экстремальная кривая. Определены собственные значения λ_ν и собственные функции φ_ν, когда C — эллипс.

П. П. Куфарев

6417. К вопросу об аналитическом решении плоской задачи теплопроводности пористых тел. Серых Г. М.,

Пономарев О. А., Изв. Томского политехн. ин-та, 1958, 101, 71—75

Дается решение плоской задачи теплопроводности пористых тел при условии, что расстояние между порами велико и что термическое сопротивление пор равно бесконечности. Л. Н. Слободецкий

6418. К гидродинамическому расчету профилей разрезных крыльев в потенциальном потоке несжимаемой жидкости. Бикчантаев М. Х., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, 38, 73—91

Рассматривается задача обтекания двусвязных контуров потенциальным потоком несжимаемой жидкости. В § 1 предварительно устанавливаются важные для дальнейшего формулы, для конформного отображения области течения с двумя произвольно расположенными разрезами на внутреннюю область кругового кольца.

В § 2 рассматривается отображение внешней области двух профилей произвольной формы на внутреннюю область кругового кольца. Даются уравнения первого и второго профиля в параметрической форме. Для определения коэффициентов, входящих в параметрические уравнения профилей, автор пользуется методом последовательных приближений по известной схеме С. Г. Нужина. При этом строится процесс последовательных приближений, основанный на использовании конформного отображения внутренней области кольца на внешнюю область двух произвольно расположенных отрезков. На оценке быстроты сходимости автор не останавливается.

В § 3 рассматривается отображение внешней области двухрядной решетки, составленной из профилей произвольной формы и лежащей в плоскости z, на каноническую область. Методом расчета бинлана решается задача определения распределения скоростей на профилях каждого ряда. Для этой цели применяется отображение вида $t=e^{\frac{2\pi}{h}z}$, где h — шаг решетки. Далее, для получения обтекания разрезных крыльев устанавливаются формулы для модуля скорости V_1 и V_2 на поверхности первого и второго профиля, а затем, имея величины скоростей, распределение давлений на первом и втором профиле определяется по известной формуле Бернулли.

Заметим, что отдельные параграфы излагаются изолированно без соответствующих указаний связи с предыдущими параграфами. Это затрудняет чтение работы.

Г. Я. Хажалия

6419. Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения. Хведелидзе Б. В., Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1956 (1957), 23, 1—158

Краевые задачи, в которых от искомых функций требуется непрерывность вплоть до контура, автор называет непрерывными; в случае, когда в конечном числе точек допускаются разрывы при условии, что порядок стремления к бесконечности меньше единицы, — кусочно-непрерывными; в остальных случаях — разрывными. В работе систематически изучаются разрывные краевые задачи в предположении, что искомые функции представимы интегралом типа Коши.

Пусть Γ — кривая типа Ляпунова (угол, образуемый касательной с осью абсцисс, удовлетворяет условию Гёльдера относительно дуги) и пусть на Γ заданы измеримая функция $\varphi(t)$ и неотрицательная измеримая функция $\rho(t)$. Автор называет функцию $\varphi(t)$ принадлежащей классу $L_p(\Gamma;\rho)$ $(p>1)$, если функция $\rho(t)|\varphi(t)|^p$ суммируема на Γ. Класс $L_q(\Gamma;\rho^{1-q})$, где $q=p(p-1)^{-1}$, называется сопряженным с классом $L_p(\Gamma;\rho)$.

В первой главе изучается интеграл типа Коши с плотностью из класса $L_p(\Gamma;\rho)$ и эти результаты применяются в теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Основные результаты следующие: Пусть

$$c_k\in\Gamma,\ 0<\alpha_k<1,$$

$$\rho(t)=\prod_{k=1}^{m_1}\left|t-c_k\right|^{\alpha_k(p-1)}\prod_{k=m_1+1}^{m}\left|t-c_k\right|^{-\alpha_k},$$

$$S_\varphi=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\ t\in\Gamma.$$

1. Если $\varphi(t)\in L_p(\Gamma;\rho)$, то $S\varphi\in L_p(\Gamma;\rho)$ и справедливо неравенство

$$\int\rho(t)|S\varphi|^p\,ds\leqslant M\int\rho(t)|\varphi(t)|^p\,ds.$$

2. Если $\varphi(t)$, $f(t)$ принадлежат сопряженным классам с весом $\rho(t)$, то справедлива формула перестановки Пуанкаре-Бертрана

$$\int\frac{f(t)}{t-t_0}dt\int\frac{\varphi(t)}{\tau-t}d\tau=-\pi^2f(t_0)\varphi(t_0)+\int\varphi(\tau)d\tau\int\frac{f(t)}{(t-t_0)(\tau-t)}dt.$$

3. На основе последнего результата получен ряд формул композиции двух сингулярных операторов с ядром Коши, при помощи которых в свою очередь даются формулы обращения сингулярного интеграла типа Коши для разомкнутого контура в классе $L_p(\Gamma;\rho)$.

4. Если функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ представимы интегралами типа Коши с плотностями, принадлежащими сопряженным классом с весом $\rho(t)$, то произведение $\Phi(z)\Psi(z)$ представимо интегралом типа Коши с суммируемой плотностью;

5. Для системы сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши

$$a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+V\varphi=f(t),\qquad(1)$$

где $a(t)$, $b(t)$ — кусочно-непрерывные матрицы, $a(t)\pm b(t)$ — неособенные матрицы всюду на Γ, векторы $f(t)$ и $\varphi(t)\in L^p(\Gamma;\rho)$, а V — вполне непрерывный оператор, эффективно (в квадратурах) построен регуляризующий оператор и в этих же предположениях доказаны все теоремы Нётера, кроме формулы, дающей эффективное выражение индекса.

Во второй главе изучается решение краевой задачи

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t),\qquad(2)$$

называемой автором задачей Римана-Привалова, в случае, когда $g(t)\in L_p(\Gamma;\rho)$, $G(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера (или принадлежит более широким подклассам непрерывных функций), за исключением конечного числа точек, где могут быть разрывы. Допускаются разрывы первого рода или обращение в бесконечность порядка логарифма или любой конечной комплексной степени. Контур считается составленным из конечного числа простых замкнутых или разомкнутых взаимно непересекающихся кривых Ляпунова, а $\Phi(z)$ представима определенным образом с помощью интеграла типа Коши с плотностью, принадлежащей к классу $L_p(\Gamma;\rho)$.

Доказывается, что остается в силе зависимость числа решений и условий разрешимости от индекса $G(t)$, известная ранее (Н. И. Мусхелишвили, Ф. Д. Гахов и др.) для непрерывной и кусочно-непрерывной задач. Показывается, что если, в частности $G(t)$, $g(t)$ удовлетворяют условию Гёльдера, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых они могут иметь разрывы первого рода, то в классе функций, представимых интегралами типа Коши с плотностью из класса $L_p(\Gamma;\rho)$, нет новых решений по сравнению с известными ранее решениями в более узких классах. Аналогичные результаты получаются для случая задачи (2) со многими неизвестными функциями, когда $G(t)$ — матрица, а $g(t)$, $\varphi(t)$ — векторы.

При помощи результатов, полученных при решении задачи (2) и известного способа Карлемана, дается эффективное решение (в квадратурах) характеристического сингулярного интегрального уравнения (т. е. уравнения (1), в котором $V\equiv0$) в классе функций $L_p(\Gamma;\rho)$.

Кроме того, способом, отличным от способа первой главы, доказаны все теоремы Нётера, включая формулу для вычисления индекса как для одного уравнения типа (1), так и систем таких уравнений, когда коэффициенты $a(t)$, $b(t)$ кусочно-непрерывны, $a(t) \pm b(t)$ — неособенные матрицы и $f(t)$, $\varphi(t) \in L_p(\Gamma; \rho)$. Показывается, что если, в частности, все заданные функции в уравнении (1) удовлетворяют условию Гёльдера, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых они могут иметь разрывы первого рода, то в классе функций $L_p(\Gamma; \rho)$ уравнение (1) не имеет новых решений по сравнению с известными ранее решениями в более узких классах.

В третьей главе результаты предшествующих глав применяются для изучения в тех же классах функций ряда других краевых задач теории аналитических функций:

$$\operatorname{Re}[(a+ib)\Phi^+(t)] \equiv au - bv = c \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\operatorname{Re}\left[a_{kjv}(t)\Phi_j^k(t) + V_{kjv}\Phi_j^k\right] = f_v(t), \qquad (4)$$

$$v = 1, 2, \ldots, n,$$

а также аналогичные задачи для функций, являющихся решением дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Для решения задачи (3) используется указанный Н. И. Мусхелишвили способ сведения ее к задаче (2), а для решения задачи (4) интегральные представления соответствующих функций, построенные И. Н. Векуа, Ф. Д. Гахов.

6420 К. Функционалы на конечных римановых поверхностях. Шиффер, Спенсер (Functionals of finite Riemann surfaces. Schiffer Menahem, Spencer D. C., Princeton univ. press, 1954, 464 pp., 8$). Cumul. Book Index, 1954, 57, № 9, 98 (англ.)
Русский перевод статьи см. РЖМат, 1957, 7848 К.

См. также: 6049, 6340, 6433, 6540 6637, 6651, 6681, 6709, 6755 К.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы: *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

6421. О каноничности системы дифференциальных уравнений нормального типа. Консильо (Sulla canonicità di un sistema di equazioni differenziali di tipo normale. Consiglio Alfonso), Atti Accad. Sci. Torino. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955—1956, **90**. 153—160 (итал.)

Замечается, что необходимые и достаточные условия каноничности системы $2n$ дифференциальных уравнений 1-го порядка могут быть записаны в виде $^1/_2 n(n-1)$ условий интегрируемости Гамильтона. Известный результат для линейной системы получен в частном случае.

D. C. Lewis

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 11, 1210.

6422. Множество точек ветвления при неединственности в одну сторону. Разумова Е. Ф., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 5, 978—981

Изучается система дифференциальных уравнений $dx/dt = X(x, y)$, $dy/dt = Y(x, y)$ с непрерывными правыми частями в некоторой односвязной области $\bar{\sigma}$ с кусочно-гладкой границей. Предполагается, что выполнены условия, обеспечивающие единственность траекторий только лишь в сторону убывания t. Рассматривается вопрос о структуре множества точек ветвления траекторий при возрастании t.

Совокупность траекторий, выходящих из точки C, называется воронкой. Воронка называется максимальной, если она не содержится ни в какой другой воронке. Утверждается, что в любой близости от максимальной воронки имеется континуум траекторий, не имеющих точек ветвления. (В случае неединственности в обе стороны вся область $\bar{\sigma}$ может состоять из точек ветвления).

Если в воронке нет траектории с множеством точек ветвления, для которого вершина воронки C является левой предельной точкой (в сторону убывания t), то из C выходит континуум траекторий, не имеющих точек ветвления после C в сторону возрастания t. В частности, имеется континуум траекторий с одной лишь точкой ветвления C, если C — вершина максимальной воронки.

Далее изучается структура множества точек ветвления, расположенных на одной траектории. Для того чтобы множество точек, расположенных на одной траектории, было множеством точек ветвления при неединственности в сторону возрастания t, необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнуто влево, т. е. в сторону убывания t.

Утверждается далее, что произвольное двумерное счетное множество точек в области $\bar{\sigma}$ может быть множеством точек ветвления траекторий некоторой динамической системы с неединственностью в одну сторону.

Автором высказан и ряд других утверждений относительно множества точек ветвления. Е. А. Барбашин

6423. О линейном дифференциальном уравнении Брио и Буке. Винтнер (On a linear differential equation of Briot—Bouquet. Wintner Aurel), Rend. Circolo mat. Palermo, 1958, 7, № 1, 42—47 (англ.)

Автор рассматривает решения уравнения Брио—Буке

$$x^2\,dy/dx = -y + f(x) \qquad (1$$

(где $f(x) = \sum_1^\infty a_n x^n$), исчезающие в начале. При построении решения уравнения (1) в виде степенного ряда

$$y = \sum c_n x^n \qquad (2$$

мы будем иметь:

$$c_n = (n-1)!\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{a_k}{(k-1)!} \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (2'$$

Ряд (2′), построенный таким образом, вообще говоря, расходится при всех $x \neq 0$. Каждому ряду $\sum c_n x^n$ соответствует ряд

$$y(t) = \sum c_n \frac{t^n}{n!} \qquad (3$$

(союзный ряд Бореля), который может иметь радиус сходимости, отличный от нуля даже в случае, когда для ряда (2) этот радиус равен нулю. Автор доказывает, что функция

$$\bar{y}(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,y(tx)\,dt \qquad (4$$

является решением уравнения (1), исчезающим в начале, причем это решение имеет смысл при $0 < x < \infty$. В частности, если $f(x) = x^2$, то ряд (2) имеет вид:

$$y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n (n-1)!\, x^n. \qquad (5)$$

Союзный ряд Бореля будет в данном случае иметь вид:

$$y(t) = \sum_{2}^{\infty} (-1)^n (n-1)! \frac{t^n}{n!} = t - \ln(1+t), \qquad (5')$$

откуда получается решение вида (4):

$$\bar{y}(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} [tx - \ln(1+tx)]\, dt. \qquad (6)$$

Автор называет функцию $\varphi(x)$ полностью монотонной при $0 < x < \infty$, если в указанном интервале эта функция и любая из ее производных не меняет знака. Показывается, что при некоторых условиях, налагаемых на функцию $f(x)$, решение (4) будет полностью монотонным, а всякое иное решение уравнения (1), отличное от (4), не будет полностью монотонным. В частности, решение (6) является полностью монотонным.

Примечание референта. Работа оформлена небрежно. Так, в формуле 7-бис ошибочно поставлен минус перед интегралом. Согласно формуле (12) должно удовлетворяться требование:

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) e^{-x}\, dx < \infty,$$

и далее на стр. 45 указывается, что при $f(x) = x^2$ это требование удовлетворяется, что неверно. И. С. Куклес

6424. Замечания к упражнениям в классе. Какая из подстановок $y = vx$ или $x = vy$ лучше для однородного дифференциального уравнения $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$? Хелман (Classroom notes. For the homogeneous differential equation $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, $y = vx$ or $x = vy$? Hellman Morton J.), Amer. Math. Monthly, 1958, **65**, № 5, 357—359 (англ.)

В заметке приведены всем известные выражения для интегралов, получающихся при интегрировании однородного уравнения первого порядка с помощью указанных в заглавии замен. С. А. Гальперн

6425. Собственные значения аффиноров и их применение к решению двух векторных дифференциальных уравнений. Фадле (Eigenwertprobleme von Affinoren und ihre Anwendung zur Lösung von zwei vektorischen Differentialgleichungen. Fadle J.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, **36**, № 7-8, 248—250 (нем.)

Даётся решение дифференциального уравнения $m\ddot{r} + \Phi r = 0$ (r — вектор, функция от времени, а Φ — постоянный аффинор) в следующем виде:

$$r(t) = \cos\left(t\sqrt{\frac{\Phi}{m}}\right) r_1 + \frac{\sin\left(t\sqrt{\frac{\Phi}{m}}\right)}{\sqrt{\frac{\Phi}{m}}} r_2,$$

где r_1, r_2 — постоянные векторы.

Далее выводится при помощи ненужных выкладок очевидная формула для радиуса-вектора материальной точки, движущейся под действием силы и рассматриваемой во вращающейся системе координат.

П. К. Рашевский

6426. Приближение Г-функций применительно к решению уравнения Вебера. Меньё (Approximations de la fonction Γ appliquées aux solutions de l'équation de Weber. Meynieux Robert), C. r. Acad sci., 1958, **246**, № 24, 3312—3314 (франц.)

Продолжение предыдущей статьи (РЖМат, 1960, 321). Используя аппроксимацию функциями Γ, автор вычисляет приближенные решения уравнений Вебера четного и нечетного индексов. Резюме автора

6427. О функции распределения в показателе выражения $u = C\exp\left\{-\int\frac{f(t)}{\varphi(t)}dt\right\}$. Хосокава Масакадзу, Сэйбуцу токэйгаку дзасси, 1957, **5**, № 2, 35—43 (японск.)

Рассматриваются решения вида

$$u = C\exp\left\{-\int\frac{f(t)}{\varphi(t)}dt\right\}$$

уравнений класса Фукса

$$u'' + Pu' + Q = 0, \qquad (1)$$

где f и φ — полиномы соответственно m- и n-го порядка.

В гл. I, отмечая, что функция $u = C\exp\left\{-\int V dt\right\}$ есть решение уравнения (1), где $Q = V' + PV - V^2$, автор показывает ряд частных видов этого уравнения, соответствующих различным функциям, принятым в качестве произвольной функции P.

В гл. II, опираясь на тот факт, что решение (1) равносильно решению $V' + PV - V^2 = 0$, автор получил решение вида

$$u = C\exp\left\{-\int\frac{f}{\varphi}dt\right\}, \qquad (2)$$

$f = \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu t^\nu$, уравнения $u'' + \frac{p}{\varphi}u' + \frac{q}{\varphi^2}u = 0$ способом неопределенных коэффициентов. При этом автор подробно рассматривает коэффициенты f в полюсах уравнения.

В гл. III показывается, что функция распределения (2) удовлетворяет условиям функций распределения Пирсона в слабом смысле. Ли Дя Гон

6428. К теории некоторых видов обыкновенных дифференциальных уравнений. Кандов (Към теорията на някои частни видове обикновени диференциални уравнения. Кандов Любомир), Годишник Минно-геол. ин-т, 1956—1957 (1958), **4**, № 1, 81—87 (болг.; рез. русск. нем.)

Рассматриваются дифференциальные уравнения двух видов:

$$f(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \qquad (A)$$

$$f(y, xy', \ldots, x^n y^{(n)}) = 0, \qquad (B)$$

которые имеют следующие свойства: если $u(x)$ — частное решение уравнения вида $\begin{cases}(A),\\(B),\end{cases}$ то $u(x+a)$ — тоже частное решение $\begin{cases}(A)\\(B)\end{cases}$. Из резюме автора

6429. Обобщение дифференциального уравнения Хальма. Стоянов (Едно обобщение на диференциалното уравнение на J. Halm. Стоянов Аркадий), Годишник Инж.-строит. ин-т. Фак. строит., архитект., хидротехн., 1958, **10**, № 1, 7—13 (болг.; рез. русск., франц.)

В одной, недавно опубликованной, работе (РЖМат, 1959, 9970) Долапчиев и Чобанов обобщили дифференциальное уравнение Хальма

$$(1+x^2)^2 y'' + (ax^2 + b)\, y = 0$$

и показали, что в известных случаях решения этих уравнений можно выразить посредством элементарных функций. В настоящей статье автор устанавливае-

очень просто результаты, полученные Долапчиевым и Чобановым. Резюме автора

6430. К вопросу о числе полюсов решения второго уравнения Пенлеве. Яблонский А. И., Докл. АН БССР, 1959, 3, № 6, 237—238

Обзор исследований аналитического характера решений уравнений Пенлеве, произведенных после того, как Н. П. Еругин в 1952 г. (Прикл. матем. и механ. 1952, 16, № 4, 462—486) вновь обратил внимание на соответствующую проблему. Вопреки утверждению Шубарта (РЖМат, 1957, 5502), на примерах показано, что второе уравнение Пенлеве

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha \qquad (1)$$

может иметь рациональные решения и при $\alpha = \pm 2$ (а не только $\alpha = 0, \pm 1$). Таким образом снова встает вопрос о числе и расположении полюсов решений (1). Автор заявляет, что ему удалось выяснить условия на α, необходимые и достаточные для наличия у (1) рациональных решений, и найти число полюсов у таких решений. Условия эти не приведены. Библ. 9 назв.

Ю. С. Богданов

6431. Дифференциальные уравнения с сингулярной точкой. Суонсон (Differential equations with singular points. Swanson C. A. Techn. Rept Dept Math. Calif. Inst. Technol., Pasadena, 1956, 24 pp.) (англ.)

Автор улучшает результат Лангера (Langer R. E., Trans. Amer. Math., 1935, 37, 397—416), относящийся к дифференциальному уравнению $d^2u/dx^2 + [\lambda^2 q(x) + r(x, \lambda)]u = 0$. Результаты автора получены в предположении, что x — действительное переменное и что $q(x) = (x-c)^{-1}Q(x)$, где $Q(x) \in C^2$ и не обращается в нуль. N. D. Kazarinoff

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 9, 737—738.

6432. Равномерное асимптотическое разложение решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка для больших значений параметра. Олвер (Uniform asymptotic expansions of solutions of linear socond-order differential equations for large values of a parameter. Olver F. W. J.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1958, **A250**, № 984, pp. 479—517 (англ.)

Исследуются асимптотические решения уравнения

$$d^2w/dz^2 = (u^2p + q)w \qquad (1)$$

(z — комплексное переменное, u — большой комплексный параметр) методом эталонных уравнений. Показано, что в зависимости от характера особых точек функций p и q в рассматриваемой области $z \in D$ (1) приводится к одному из стандартных типов

$$d^2w/dz^2 = [u^2 + f(z, u, \theta)]w \qquad (I)$$

(p, q или регулярны в области D, или p имеет один полюс второго порядка в D, в последнем случае q может иметь полюс первого или второго порядка в той же точке, что и p),

$$d^2w/dz^2 = [u^2z + f(z, u, \theta)]w \qquad (II)$$

(p имеет один нуль в D или одновременно один нуль и полюс второго порядка в D),

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{z}\frac{dw}{dz} + \left[u^2 + \frac{\mu^2 - 1}{z^2} + f(z, u, \theta)\right] \qquad (III)$$

(μ — постоянная, $\mathrm{Re}\,\mu \geqslant 0$, p имеет полюс первого порядка в D, q может иметь в той же точке полюс первого или второго порядка). Во всех случаях f — регулярная функция z в преобразованной области, предполагаемой односвязной, $\theta \in \Theta$ — комплексный параметр, u — большой положительный параметр.

Показано, что w можно представить в виде асимптотического разложения по u

$$w = P\sum_{s=0}^{\infty}\frac{A_s}{u^{2s}} + \frac{P'(z)}{u^2}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{B_s}{u^{2s}},$$

которое носит равномерный характер относительно z, θ, μ. В случае (I) $P = e^{\pm uz}$, в случае (II) $P = Ai(u^{2/3}z)$ — одна из функций Эйри, в случае (III) $P = Z_\mu(uz)$ — одна из функций Бесселя с индексом μ. A_s и B_s даются рекуррентными соотношениями. Во всех случаях дано обстоятельное исследование областей $z \in H$, в которых справедливы указанные асимптотические разложения. А. Б. Васильева

6433. Интегральные представления операторно-аналитических функций одной независимой переменной. Фаге М. К., Тр. Моск. матем. о-ва, 1959, 8, 3—48

Пусть

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_0(x)$$

— обыкновенный линейный дифференциальный оператор с непрерывными коэффициентами, заданными на (a, b) $(-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty)$,

$$M = \frac{d^n}{dw^n} + q_{n-1}(w)\frac{d^{n-1}}{dw^{n-1}} + \ldots + q_0(w)$$

— оператор с коэффициентами, аналитическими в некоторой области плоскости w. В предшествующей заметке автора (РЖМат, 1959, 6874) показано, что эти операторы локально эквивалентны в том смысле, что существуют топологические кольца функций A_L, x_0 и A_M, w_0, определенных в окрестности x_0 и w_0, и оператор T такие, что $M = T^{-1}LT$. В данной статье строится интегральная форма преобразования T. В основе построения лежит задача Коши для уравнения

$$MF(w, x) = LF(w, x), \quad \left.\frac{\partial^k F(w, x)}{\partial x^k}\right|_{x=c} = f_k(w), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Интегральные формулы получены для оператора L с достаточно гладкими коэффициентами. В случае $M = d^n/dw^n$ получается точная формула. Точная формула выписана для $n = 2, 3, 4$. В. А. Кондратьев

6434. Об одном обобщении теоремы Бора и Нёйгебауэра. Харасахал В. Х., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 3, 595

Повторяется доказательство теоремы автора об обобщении результата Бора и Нёйгебауэра (РЖМат, 1960, 2899). Б. П. Демидович

6435. Об одном классе линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Хэйл (On a class of linear differential equations with periodic coefficients. Hale Jack K.), Illinois J. Math., 1957, 1, № 1, 98—104 (англ.)

В системе

$$\ddot{y} + A(\lambda)y = \lambda\Phi(t, \lambda)y + \lambda\Psi(t, \lambda)\dot{y} \qquad (1)$$

λ — действительный параметр, y — вектор, $A(\lambda) = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \ldots, \sigma_n^2)$ — диагональная матрица, $n \times n$ — вещественные матрицы-функции $\Phi(t, \lambda)$, $\Psi(t, \lambda)$ — периодические по t с периодом $T = 2\pi/\omega$, L — интегрируемые по t на $(0, T)$ и аналитические функции λ в точке $\lambda = 0$, $\sigma_j(\lambda)$ — вещественные аналитические функции λ, $\sigma_j(0) \not\equiv \sigma_h(0) \pmod{\omega i}$, $j \neq h$, $j, h = 1, \ldots, n$.

Применяя метод Чезари, автор доказывает теорему: Если

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} \end{pmatrix}, \qquad \Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix},$$

где φ_{11}, ψ_{11} — квадратные матрицы одинакового порядка и φ_{11}, φ_{22}. ψ_{21}, ψ_{22} четны по t, φ_{21}, φ_{12}, ψ_{11}, ψ_{22} нечетны по t, то при достаточно малых λ решения системы (1) ограничены при $t \to +\infty$.

Примечание референта. Если воспользоваться методикой референта (РЖМат, 1958, 8821), то теорема может быть значительно обобщена (см. сноску на стр. 708 этой статьи, случай δ, где $G = \mathrm{diag}(I_1 - I_2, I_3, \ldots)$, I_j — единичные $m_j \times m_j$ — матрицы, и теорему 3).

В. А. Якубович

6436. О решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Норкин С. Б., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 199—206

Рассматривается уравнение

$$y''(x) + N(x)\,y(x) + M(x)\,y(x - \Delta(x)) = 0;\ \Delta(x) \geqslant 0. \quad (1)$$

Решение ищется справа от начальной точки A. На начальном множестве $E_0 = E\{x - \Delta(x);\ x - \Delta(x) \leqslant A;\ x \geqslant A\} \cup A$ задается начальная функция $\varphi(x)$, удовлетворяющая условию $\varphi(A) = 1$. Изучается совокупность решений уравнения (1) с начальными условиями $y(x) = y_0\varphi(x)$ при $x \in E_0$ и $y'(A) = y_0'$. Числа y_0 и y_0' задаются произвольно. Начальная функция $\varphi(x)$ фиксируется. Любое решение из этой совокупности представляется в виде линейной комбинации двух линейно независимых решений уравнения (1) с той же начальной функцией. Для линейной независимости двух решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы определитель Вронского в начальной точке был отличен от нуля. Линейно независимые решения образуют фундаментальную систему. Изучаются условия, при которых фундаментальная система определяет единственное уравнение вида (1) при заданных $\varphi(x)$ и $\Delta(x)$.

Нетривиальные решения уравнения (1) могут не только иметь кратные нули, но и обращаться тождественно в нуль на целых интервалах. Определитель Вронского фундаментальной системы может, вообще говоря, обращаться в нуль (даже на целых интервалах). Множество нулей определителя Вронского не зависит от выбора фундаментальной системы. Для того чтобы определитель Вронского не обращался в нуль в некоторой точке, необходимо и достаточно, чтобы нетривиальные решения уравнения (1) не имели в этой точке кратных нулей. Если нетривиальные решения уравнения (1) не имеют кратных нулей, то нули любых двух линейно независимых решений перемежаются. Приводятся условия отсутствия кратных нулей у решений уравнения (1).

В заключение доказываются теоремы, устанавливающие связь между фундаментальными системами уравнения (1) и некоторого однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, не содержащего члена с запаздыванием, но содержащего член с первой производной.

Г. А. Каменский

6437. О применении метода моментов для вычисления собственных значений и собственных функций однородной краевой задачи с запаздывающим аргументом. Норкин С. Б., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 5, 40—46

Изучается применение метода моментов для приближенного вычисления собственных значений и собственных функций краевой задачи для уравнения

$$y''(x) + \lambda y(x) + M(x)\,y(x - \Delta(x)) = 0,\ \Delta(x) \geqslant 0, \quad (1)$$

с краевыми условиями $y(0) = y(\pi) = 0$; $y(x - \Delta(x)) \equiv 0$, если $x - \Delta(x) < 0$. В случае, когда имеется возможность точного решения уравнения

$$y''(x) + M(x)\,y(x - \Delta(x)) = f(x) \quad (2)$$

(для этого достаточно, например, чтобы $\Delta(x) \geqslant \delta_0 > 0$), приближенное нахождение собственных значений и собственных функций может быть проведено с помощью обычного метода моментов. Для случаев, когда точно решить уравнение (2) затруднительно (например, когда $x - \Delta(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$), приводится обобщение метода моментов, позволяющее, при некоторых ограничениях на функции $M(x)$ и $\Delta(x)$, приближенно вычислять собственные значения и собственные функции указанной краевой задачи также и в этих случаях.

Г. А. Каменский

6438. Сингулярная краевая задача для несамосопряженного дифференциального оператора. Кемп (A singular boundary value problem for a non-self-adjoint differential operator. Kemp R. R. D.), Canad. J. Math., 1958, **10**, № 3, 447—462 (англ.)

Рассматривается дифференциальный оператор L в $L^2(-\infty, \infty)$, порожденный дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + g(x)\,y$, $-\infty < x < \infty$, где $g(x)$ вообще комплексна. На такие операторы переносятся результаты референта (РЖМат, 1955, 3752) об аналогичном операторе на полуоси $0 \leqslant x < \infty$, в частности, в предположении $e^{a|x|}\,g(x) \in L^1(-\infty, \infty)$ при некотором $a > 0$, получаются интегральное представление ядра резольвенты, разложение заданной функции по собственным функциям оператора L и аналог равенства Парсеваля. При выводе этих результатов автор применяет метод, отличный от метода референта, основанный на рассмотрении интеграла Коши для ядра резольвенты.

М. А. Наймарк

6439. О некоторых соотношениях между решениями взаимно сопряженных линейных дифференциальных уравнений третьего порядка и об одной краевой задаче. Грегуш (O niektorých vzt'ahoch medzi integrálmi navzájom adjungovaných lineárnych diferenciálnych rovníc tretieho rádu a o jednom okrajovom probléme. Greguš M.), Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae Math., 1956, **1**, № 4-6, 265—272 (словацк.; рез. русск., нем.)

Работа состоит из двух частей. В первой части говорится о некоторых соотношениях между решениями дифференциальных уравнений:

$$y''' + 2Ay' + (A' + b)\,y = 0, \quad (1)$$

$$y''' + 2Ay' + (A' - b)\,y = 0, \quad (2)$$

которые являются сопряженными друг с другом. Результат этой части содержится в теореме:

Необходимым и достаточным условием для того, чтобы решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(\bar{x}) = y'(\bar{x}) = 0$, проходило бы через точку $(x, 0)$, является то, чтобы решение $w(x)$ уравнения (2), имеющее в x кратный нуль, имело бы нуль в $\bar{x}$. Во второй части рассмотрена краевая задача для уравнения (1): $y(x_1) = y'(x_1) = y(x_2) = 0$.

Доказано, что если коэффициент A есть функция λ на (λ_1, λ_2) и $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_2} A(x, \lambda) = +\infty$, то существует бесконечное число собственных значений.

В. А. Кондратьев

6440. Об одной ортонормированной системе функций. Хилле (On a class of orthonormal functions. Hille Einar), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1956, **25**, 214—249 (англ.)

Изучаются собственные значения и собственные функции краевой задачи $b(x)\,d^2y/dx^2 - \lambda y = 0$, $y(x, \lambda) \in C[-\infty, \infty]$ (предполагается непрерывность $y(x, \lambda)$ на замкнутом числовом множестве $[-\infty, \infty]$). Положительная функция $b(x)$ удовлетворяет условию $x/b(x) \in L(-\infty, \infty)$. Ранее автором (РЖМат, 1960, 4004) было показано, что оператор $b(x)d^2/dx^2$, рассматриваемый в $C(-\infty, \infty)$, имеет только дискретный спектр, причем собственные значе-

ния $\{\lambda_n\}$ и собственные функции $\omega_n(x)$ обладают следующими свойствами:

$$\lambda_0 = 0,\ \lambda_n < 0 \text{ для } n > 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-1} < \infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_j(x)\ \omega_k(x)\ \frac{dx}{b(x)} = \delta_{jk}.$$

Система функций $\{\omega_n(x)\}$ полна в $L_2(-\infty, \infty; dx/b(x))$. Если $x^2/b(x)$ не принадлежит $L(-\infty, \infty)$, λ_n и $\omega_n(x)$ являются собственными элементами краевой задачи

$$b(x)\,d^2y/dx^2 - \lambda y = 0,\ y(x, \lambda) \in L_2(-\infty, \infty;\ dx/b(x)) \quad (1)$$

Если же $x^2/b(x)$ принадлежит $L(-\infty, 0)$ или $L(0, \infty)$, то в задаче (1) имеет место так называемый случай предельного круга по Вейлю, и система $\{\lambda_n, \omega_n(x)\}$ может быть получена с помощью тех или иных дополнительных условий, налагаемых на решение при $|x| \to \infty$.

В данной работе с помощью методов теории функций комплексного переменного подробно исследуется асимптотика системы $\{\lambda_n, \omega_n(x)\}$ в связи с асимптотикой $b(x)$. Установлено, в частности, что показатель сходимости σ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-\sigma}$ равен 1/2, если $[b(x)]^{-1/2} \in L(-\infty, \infty)$, и лежит в замкнутом интервале [1/2, 1], если это условие не выполнено. Приведенные оценки показывают, что $\sigma \to 1$ с уменьшением скорости роста $b(x)$. Изучается также асимптотика чисел $\{M_n\} = \sup |\omega_n(x)|$. Если $x^2[b(x)]^{-1} \in L(-\infty, \infty)$, то $M_n = o(|\lambda_n|)$, если $b(x)$ возрастает достаточно медленно, то M_n растет быстрее любой степени λ_n. Если $x^2 b(x)$, начиная с некоторого x, монотонно возрастает, то $\log M_n = o(|\lambda_n|)$, и это, по мнению автора, является наилучшей оценкой такого рода. Степень точности полученных оценок иллюстрируется на ряде примеров. Л. А. Чудов

6441. Периодические и полупериодические граничные условия в задаче Штурма—Лиувилля о собственных значениях. Мор (Periodische und halbperiodische Randbedingungen beim Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblem. Mohr E.), Sitzungsber. Berliner Math. Ges., 1957—1958, 33 (нем.)

В связи с критерием разрешимости периодической и полупериодической задач для уравнения

$$-(pu')' + qu = \lambda ru \quad (1)$$

на отрезке [0,1] (Коддингтон Э. А., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, 1958, гл. 8, № 3; РЖМат, 1960, 3002К) делается замечание, что спектры этих задач могут рассматриваться как спектры двойных собственных значений задач уравнения (1) с одним из граничных условий: $u(0) = u(1) = 0$ или $p(0)u'(0) = p(1)u'(1) = 0$. М. И. Ельшин

6442. Периодические и полупериодические краевые условия в задаче Штурма — Лиувилля о собственных значениях. Мор (Periodische und halbperiodische Randbedingungen beim Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblem. Mohr Ernst), Math. Nachr., 1958, **18**, № 1-6, 333—345 (нем.)

Исследуется краевая задача для уравнения

$$-(p(x)u')' + q(x)u = \lambda r(x)u \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\left.\begin{aligned} u(1) &= u(0), \\ p(1)u'(1) &= p(0)u'(0) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

или

$$\left.\begin{aligned} u(1) &= -u(0), \\ p(1)u'(1) &= -p(0)u'(0). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Известные ранее результаты получены вариационными методами. Указаны критерии двукратности собственного значения задачи (1) — (2) и задачи (1) — (3). Р. С. Гусаров

6443. Периодические решения и предельные циклы одной нелинейной системы дифференциальных уравнений. Е Янь-цзянь (Periodic solutions and limit cycles of certain non-linear differential systems. Ye Yen-chien), Sci. Rec. 1957, **1**, № 6, 391—394 (англ.)

Рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} p_{ij} x^i y^j,$$

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y) = \sum_{0 \leqslant i+j \leqslant 2} q_{ij} x^i y^j.$$

Ссылаясь на рассмотрение взаиморасположения изоклин $P(x, y) = 0$, $Q(x, y) = 0$, кривой $P'_x + Q'_y = 0$ и предельных циклов, автор сформулировал без доказательств ряд теорем, касающихся взаиморасположения предельных циклов на фазовой плоскости. В частности, для рассматриваемой системы утверждается: невозможность существования периодических решений, охватывающих три состояния равновесия, невозможность существования трех периодических решений, охватывающих три различных состояния равновесия, возможность двух предельных циклов, охватывающих два различных состояния равновесия. Указаны некоторые достаточные условия, наложенные на коэффициенты уравнения, при которых заведомо существует устойчивый предельный цикл вокруг начала. Н. Н. Баутин

6444. О нахождении правильных предельных циклов. Захаров В. П., Уч. зап. Чувашск. гос. пед. ин-та 1956, вып. 3, 299—303

В окрестности замкнутой интегральной кривой L дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ автор переходит к криволинейным координатам s, n (n — направленный отрезок нормали к кривой L, а s — длина дуги кривой, отсчитываемая от некоторой начальной точки) и получает новое уравнение $dn/ds = F(s, n)$. Кривая L называется правильным предельным циклом, если 1) $F'_n(s, n) \cdot F(s, n) < 0$ в некоторой окрестности L; 2) $F'_n(s, n) = 0$ на L; 3) L имеет конечную кривизну в каждой точке. Из первого условия следует, что на L имеет место равенство $F''_{nn} = 0$. Это равенство автор выписывает применительно к функции $f(x, y)$ и ее производным, оно и является необходимым условием правильности предельного цикла L.

Примечание референта. В вычислениях автора допущена ошибка: равенство (3) имеет место только на кривой L, т. е. при $n = 0$, и не может быть использовано для вычисления F'_n и F''_{n^2}. П. Н. Папуш

6445. Распространение некоторых результатов типа Штурма на нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка. Бихари (Extension of certain theorems of the Sturmian type to nonlinear second order differential equations. Bihari Imre), Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 1958, **3**, № 1-2, 13—20 (англ.; рез. венг., русск.)

Рассматривается уравнение

$$(P(x)v')' + Q(x)f(v, v') = 0, \quad (1)$$

где 1) $P(x) > 0$ и $P(x)$, $Q(x) \in C_0$ на $[a, b]$, 2) $f(v, w)$ определена для всех v, w и $f(v, w) \in \mathrm{Lip}\ (1)$ в каждой ограниченной области; 3) $f(\lambda u, \lambda w) = \lambda f(v, w)$, $f(0, w) \equiv 0$, $\operatorname{sgn} f(v, w) = \operatorname{sgn} v$.

На это уравнение распространяются некоторые результаты Бохера и Штурма, полученные в линейном случае. Именно, доказана теорема о разделении нулей двух линейно независимых решений уравнения (1), об определении колеблемости или неколеблемости решений уравнения (1), конечности числа нулей на данном конечном отрезке. Р. С. Гусарова

6446. Периодические решения системы двух дифференциальных обыкновенных уравнений. Олех (Periodic solutions of a system of two ordinary differential equations. Olech C.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, **7**, № 3, 137—140, XI (англ.; рез. русск.)

Даётся условие для того, чтобы существование ограниченного решения системы дифференциальных уравнений повлекло за собой существование периодического решения с периодом 1. Результат является обобщением (полученным другим методом) аналогичного результата Опяля (РЖМат, 1960, 2930), касающегося дифференциального уравнения второго порядка. Из резюме автора

6447. Применение уравнения Брио и Буке к исследованию общего случая. Хаимов Н. Б., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1957, вып. 21, 113—122

Рассматривается уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y_n(x, y) + Y(x, y)}{X_n(x, y) + X(x, y)}, \qquad (1)$$

где X_n, Y_n — однородные многочлены от x и y степени n, X, Y — ряды по степеням x и y, не содержащие членов степени ниже $n+1$ и сходящиеся в некоторой окрестности начала координат. Предполагается, что $X_n(x, 0) \equiv Y_n(x, 0) \equiv 0$, $X^2(x, 0) + Y^2(x, 0) \not\equiv 0$. При этих условиях полуоси оси Ox являются исключительными направлениями для уравнения (1) в особой точке $(0, 0)$, причем эти направления являются особыми: их, вообще говоря, нельзя заключить в нормальные области. Автор ставит перед собой задачу исследовать вопрос о существовании интегральных кривых уравнения (1), примыкающих к точке $(0, 0)$ по направлению $y = 0$, действуя методом, отличным от метода Фроммера. Он преобразует уравнение (1) подстановкой Брио и Буке $y = ux$, сводя таким образом исходную задачу к задаче о существовании решений $u(x)$ преобразованного уравнения, обладающих свойством $u(x) \to 0$ при $x \to 0$. Если при этом уравнение для $u(x)$ не имеет в точке $(0, 0)$ особых исключительных направлений, то задача решается до конца. Если же особые исключительные направления имеются, то автор вновь делает замену $u = vx$, и т. д. При этом он показывает, что после конечного числа подстановок получится либо уравнение, не имеющее в точке $(0, 0)$ особых исключительных направлений, либо уравнение вида (1) с $n = 1$.

Примечание референта. В работе рассматриваются лишь те характеристики, которые входят в начало с целыми порядками кривизны, в то время как возможны дробные, нулевые и бесконечные порядки кривизны (см., например, И. С. Куклес, РЖМат, 1960, 2938). А. Ф. Андреев

6448. К исследованию свободных колебаний нелинейных систем с одной и двумя степенями свободы. Куликов Н. К., Изв. АН СССР, Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 2, 81—87

Разработанный автором метод приближенного решения дифференциальных уравнений (РЖМат, 1960, 2877) применяется к уравнениям

$$\ddot{x} + F(x) = 0, \qquad (1)$$

где $F(-x) \equiv F(x)$ и

$$x^{IV} + \ddot{x} + F(x) = 0. \qquad (2)$$

Решение уравнения (1) с начальными условиями $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = 0$ в нулевом приближении выражается формулами

$$F(x) = F(a)\cos pt, \quad p = \sqrt{F(a)/a}. \qquad (3)$$

Излагается метод получения дальнейших приближений. Для уравнений

$$\ddot{x} + k^2x + \alpha x^3 = 0; \quad \ddot{x} + \sin x = 0 \qquad (4)$$

в статье вычисляются 1—2 приближения, которые оказываются не менее точными, чем приближения, полученные другими методами, особенно при больших отклонениях функции $F(x)$ от линейной. В тех случаях, когда в уравнении (1) функция $F(x)$ не является нечетной, автор предлагает строить приближенные решения отдельно в областях $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 0$. Рассматривается пример $\ddot{x} + e^x - 1 = 0$.

Примечания референта. 1. Автор ошибочно считает, что негармоническое нулевое приближение (3) более точно представляет форму колебаний для уравнения (1), чем обычное гармоническое приближение

$$x = a\cos pt. \qquad (5)$$

На самом деле для уравнений (4) при любом знаке α приближенное решение (3) и точное решение отклоняются в разные стороны от кривой (5), т. е. приближение (3) хуже, чем (5).

2. В книге Боголюбова и Митропольского (РЖМат, 1959, 3786 К) другим методом получены 1-е и 2-е приближения к решению уравнения (4), более точные, чем найденные в статье. А. Ф. Филиппов

6449. Об одном решении дифференциального уравнения. Бак (On «solving» differential equations. Buck R. C.), Amer. Math. Monthly, 1956, **63**, № 6, 414—416 (англ.)

Рассматривается пример $dy/dx - 2xy = x^2$. Из явного вида общего решения этого уравнения устанавливается асимптотическое поведение решений. С. А. Гальперн

6450. О первой проблеме различения в теории Фроммера. Андреев А. Ф., Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 7, 18—25

Излагаются доказательства результатов, опубликованных в одноименной статье автора (РЖМат, 1959, 8008). И. С. Куклес

6451. Об интегральных кривых с нулевой и бесконечной мерами кривизны. Андреев А. Ф., Докл. АН БССР, 1959, **3**, № 5, 186—189

Работа посвящена уточнению некоторых результатов, полученных И. С. Куклесом (РЖМат, 1959, 1450, 1451). Автор рассматривает уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x, y)}{X(x, y)}, \qquad (1)$$

где $Y(x, y)$ и $X(x, y)$ — аналитические функции. И. С. Куклес (реф. 1451) утверждает, что характеристики уравнения (1), входящие в начало с особым порядком кривизны, имеют всевозможные меры кривизны, в том числе, возможно, нулевую и бесконечную. А. Ф. Андреев показывает, что характеристик с нулевой и бесконечной мерой кривизны в рассматриваемом случае не существует. Этот результат вытекает как очевидное следствие необходимых и достаточных условий существования характеристик уравнения (1), входящих в начало с нулевыми или бесконечными мерами кривизны.

Указанные условия были выведены впервые И. С. Куклесом, а затем повторены автором в реферируемой работе, причем формулировка теоремы 1 (условия существования характеристик с нулевой мерой кривизны) у И. С. Куклеса и автора полностью совпадают. Формулировка теоремы 2 (условия существования характеристик

с бесконечной мерой кривизны) сформулирована автором более точно, чем И. С. Куклесом. И. С. Куклес

6452. Приведение решения для простого маятника к новой аппроксимации эллиптических функций. Голд (A reduced solution for simple pendulum: new approach to elliptic functions. Gold Louis), J. Franklin Inst., 1959, **267**, № 6, 503—509 (англ.)

Изучается маятник, для которого при $t=0$ $\frac{d\theta}{dt}=0$ и $\theta=\theta_0<\frac{\pi}{2}$. После замены переменных

$$\tau=\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,\quad \Phi=\theta_0-\theta, \tag{1}$$

его уравнение принимает вид

$$\frac{d^2\Phi}{d\tau^2}+\sin(\Phi-\theta_0)=0. \tag{2}$$

Вместо непосредственного интегрирования (2) составляется уравнение для обращения

$$\tau=f(\Phi)\,[f'(\Phi)]^2\,[\cos(\theta_0-\Phi)-\cos\theta_0]=\frac{1}{2} \tag{3}$$

и ищется его решение в виде ряда

$$f(\Phi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{\nu+kp}, \tag{4}$$

в котором оказывается $\nu=\frac{1}{2}$ и $p=1$. Коэффициенты ряда

$$f(\Phi)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\Phi^{\frac{1}{2}+k} \tag{5}$$

определяются как функции θ_0. Период колебаний маятника определяется непосредственно: $T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\,f(\theta_0)$. Сравнивая решение (5) с обычным решением через эллиптические интегралы, автор получает новые разложения этих интегралов в ряды. М. И. Ельшин

6453. Некоторые топологические вопросы, связанные с вынужденными колебаниями. Рейссиг (Einige topologische Fragen in Zusammenhang mit erzwungenen Schwingungen. Reissig R.), Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, 1959, **1**, № 3, 145—154 (нем.)

Работа представляет собой обзор исследований, касающихся существования гармонических и субгармонических колебаний в динамических системах, описываемых системой двух уравнений $\dot{x}=f(x,y,t)$, $\dot{y}=\varphi(x,y,t)$, где f и φ — периодические функции, полученных топологическими методами. Приводятся критерии принадлежности этой системы к классу D систем Левинсона, и подробно анализируются результаты работы Ла-Салля (РЖМат, 1959, 1467), в которой рассматривается вопрос о существовании нескольких периодических решений. Библ. 13 назв. В. В. Немыцкий

6454. Об одном методе исследования установившихся вынужденных колебаний нелинейных систем с одной степенью свободы. Куликов Н. К., Изв. АН СССР, Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 1, 22—33

Метод автора для приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений (РЖМат, 1960, 2877) применяется для исследования периодических решений уравнения

$$\ddot{x}+\nu\dot{x}+F(x)=M\sin pt, \tag{1}$$

где $F'(x)>0$, $\nu>0$. В качестве нулевого приближения к решению получено соотношение

$$\frac{F(x)}{F'(x)}=\frac{M[(F'(x)-p^2)\sin pt-\nu p\cos pt]}{\nu^2p^2+(F'(x)-p^2)^2}, \tag{2}$$

определяющее решение $x(t)$ как неявную функцию. В тех случаях, когда эта функция неоднозначна, автор предлагает некоторые части графика $x=x(t)$ заменять вертикальными отрезками и получает разрывное решение $x(t)$.

С помощью формулы (2) исследуется зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты внешней силы и других параметров, входящих в уравнение. Для случаев, когда в уравнении (1) $F(x)$ равна одной из функций $x+0{,}5x^3$, e^x-1, $\sin x$, построены графики нулевого приближения к периодическому решению при нескольких различных частотах p и амплитудно-частотные кривые. Не проводится сравнения предлагаемого приближенного метода с ранее известными методами. А. Ф. Филиппов

6455. Приближенное решение уравнения вынужденных квазигармонических колебаний. Крапивницкая (Наближений розв'язок рівняння вимушених квазігармонічних коливань. Кропивницька К. Й.), Доповіді АН УРСР, 1959, № 7, 724—729 (укр.; рез. русск., англ.)

Рассматривается неоднородное уравнение квазигармонических колебаний вида

$$d^2x/d\theta^2+2\gamma(\theta)\,dx/d\theta+x=S(\theta), \tag{1}$$

где $\gamma(\theta)$ — периодическая функция θ, $S(\theta)$ — обобщенная возмущающая сила. Для уравнения (1) на основании результатов М. Я. Леонова (РЖМат, 1955, 741) получено приближенное решение в нерезонансном случае. Для случая, когда $|\gamma(\theta)|<<1$, это решение дано в виде

$$x(\theta)=f(\theta)+e^{-\varepsilon_0\theta}\psi(\theta)+e^{-\varepsilon_0\theta}u(\theta,c_1,c_2), \tag{2}$$

где $f(\theta)$, $\psi(\theta)$ и $u(\theta,c_1,c_2)$ — известные функции, c_1, c_2 — произвольные постоянные. Ю. А. Митропольский

6456. Опытное исследование субгармонических колебаний нелинейных систем. Гёранссон, Ханссон (An experimental investigation of subharmonic oscillations in a nonlinear system. Göransson K., Hansson L. Kungl. Tekn. Högsk. Handl. Stockholm, 1956, № 97, 16 pp.) (англ.)

Результаты Лундквиста (Lundquist S., Quart. Appl. Math., 1955, **13**, 305—310) подтверждаются экспериментально для небольших отклонений от линейного случая. Экспериментальные результаты даны для устойчивости в нелинейном случае. N. Levinson

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 7, 577.

6457. Субгармонические колебания в нелинейных системах с двумя степенями свободы. Хуан (Subharmonic oscillations in nonlinear systems of two degrees of freedom. Huang T. C. Proc. 2nd U. S. Nat. Congr. Appl. Mechanics, Ann. Arbor, 1954, New York, Amer. Soc. Mech. Engrs, 1955, 95—100) (англ.)

В противоположность общности заголовка, рассматривается лишь один случай субгармонических колебаний некоторой системы. Это вынужденные колебания с частотой вынуждающей силы, равной $^1/_3$, в механической системе, содержащей следующие последовательные звенья: неподвижный якорь, растягивающуюся пружину, массу, способную растягивать ее без трения; нелинейную, по кубическому закону, вторую растягивающуюся пружину; вторую массу, подобную первой, и, наконец, силу, которая действует на эту цепь вдоль линии ее расположения по синусоидальному закону. Эта система изучается формально, колебания предполагаемых частот и неизвестные коэффициенты вводятся в эти уравнения. Колебания, частоты которых отличны от предполагаемых, не учитываются, и из системы алгебраических уравнений определяются неизвестные коэффициенты. Задача получения на практике исследуемых

колебаний решается с помощью итерационного процесса, сходящегося для случая нулевой нелинейности. Этот анализ применим и к случаю пружины между двумя массами, когда колебание сопровождается малым амортизатором скоростей. E. Pinney

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 11, 1208

6458. О некоторых предельных амплитудах нелинейных колебаний. Манарези (Sopra alcune limitazioni per l'ampiezza delle oscillazioni non—lineari. Manaresi Gabriella. Atti Accad. Sci. Ist. Bologna. Cl. Sci. Fis. Rend., 1954—1955, **2**, 184—189) (итал.)

Автор рассматривает уравнение $\ddot{x}+F(\dot{x})+\omega_0^2 x=0$, где $F(x)=\int_0^x f(x)\,dx$, $f(x)$ — симметричная отрицательная для $|x|<\delta$, $\delta>0$, и $f(x)=\alpha>0$ в других случаях. Существует h такое, что $F(h)=F(-h)=0$. С помощью метода Мидзохата и Ямагути (Mizohata S., Yamaguti M., Mem. Coll. Sci. Univ. Tokyo, 1952, **A27**, 109—113) автор получает границы амплитуды свободных колебаний (1), которые улучшают все оценки, полученные Картаном (Cartan E., Ann. Postes, Télégraphe, Téléphone, 1925, **14**, 1196—1207). J. K. Hale

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 7, 577.

6459. О критерии колеблемости решений дифференциального уравнения $(Q(t)x')'+f(t)x=0$. Опяль (Sur un critère d'oscillation des intégrales de l'équation différentielle $(Q(t)x')'+f(t)x=0$ Opial Z.), Ann. polon. math., 1959, **6**, № 1, 99—104 (франц.)

Приводится следующее достаточное условие колеблемости решений уравнения $(Q(t)x')'+f(t)x=0$: если

$$\int_0^\infty \frac{dS}{Q(S)}=+\infty,$$

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \omega(S)\left[f(S)-\frac{1}{4}Q(S)\left(\frac{\omega'(S)}{\omega(S)}\right)^2\right]dS=+\infty,$$

то все решения рассматриваемого уравнения колеблются. Известное утверждение о том, что если решения уравнения $x''+f(t)x=0$ колеблющиеся, то существует неограниченное решение, усиливается, а именно, доказано, что существует такое решение $x(t)$, что мера множества t, при которых $x(t)<k$, конечна при любом k. Доказывается, что все решения уравнения $(fy'')''+(gy')'+hy=0$, $f>0$, ограничены на $[a,\infty)$, если ограничены все решения уравнения $u''+p(x)u=0$ и $\int_a^\infty(|q(x)|+|r(x)|)\,dx<\infty$, где $q(x)=\frac{1}{f(x)}$,

$$p(x)=\frac{g(x)}{2f(x)},\quad r(x)=\frac{g^2(x)}{4f(x)}+\frac{g''(x)}{2}-h(x).$$

Все решения уравнения четвертого порядка будут интегрируемы в квадрате на $[a,\infty)$, если все решения уравнения $u''+p(x)u=0$ интегрируемы в квадрате, а $q(x)$ и $r(x)$ ограничены. В. А. Кондратьев

6460. Колебания с большими частотами. Хартман (On oscillators with large frequencies. Hartman Philip), Boll. Unione mat. ital., 1959, **14**, № 1, 62—65 (англ.)

Дается простое доказательство теоремы, дополняющей теорему Армелини, Сансоне и Тоннелли (РЖМат, 1955, 2676К): Если $q(t)$ удовлетворяет условиям для всех $t>0$:

$$q(t)>0;\ dq\geqslant 0;\ \lim_{t\to\infty}q(t)=\infty \qquad (1)$$

и если $\ln q$ имеет "регулярный рост", то каждое решение дифференциального уравнения $x''(t)+q(t)x(t)=0$ удовлетворяет условию: $\lim_{t\to\infty}(x^2+x'^2/q)=0$. Ссылаясь ни Мийу (Milloux H., Prace mat.-fiz., 1934, **41**, 39—53), автор вводит представление $x=\sqrt{E}\sin\varphi$, где $E=x^2+x'^2/q$. Для определения E и φ получаются уравнения:

$$d\varphi=q^{1/2}\,dt+(\sin 2\varphi)\,dq/4q;\ dE/E=-(\cos^2\varphi)\,d(\ln q).$$

М. И. Ельшин

6461. Об осцилляциях линейного дифференциального уравнения второго порядка. Суяма (On the oscillation of the second ordered linear differential equation. Suyama Yukio), Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., 1959, **A13**, № 1, 30—36 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$y''+q(x)y=0, \qquad (1)$$

где $q(x)$ непрерывна при $x\geqslant x_0$ и $0<\int_{x_0}^\infty q(t)\,dt<\infty$. Если, кроме того, $q(x)>0$, то справедливы теоремы Хилла (Hille E., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **64**, 234—257):

Если $\liminf_{x\to+\infty} x\int_x^\infty q(t)\,dt>\frac{1}{4}$, то решения (1) колеблющиеся, если же $\limsup_{x\to+\infty} x\int_x^\infty q(t)\,dt<\frac{1}{4}$ — неколеблющиеся. Ссылаясь на эти теоремы, автор рассматривает уравнение (1) при условии $0<\int_x^\infty q(t)\,dt<\infty$ и доказывает, что из требования

$$\limsup_{x\to+\infty}\frac{q}{\left[\int_x^\infty q(t)\,dt\right]^2}<4$$

вытекает колеблемость решений уравнения (1), в то время как из

$$\liminf_{x\to+\infty}\frac{q}{\left[\int_x^\infty q(t)\,dt\right]^2}>4$$

вытекает их неколеблемость. Доказательства проводятся без ссылки на теоремы Хилла и очень сложны. В конце статьи доказывается простое, но сложно формулируемое достаточное условие неколеблемости решений (1) в случае

$$\int_x^\infty dt\int_t^\infty|q(s)|\,ds<\infty.$$

М. И. Ельшин

6462. Дифференциальное уравнение третьего порядка вида $y'''+2Ay'+(A'+b)y=0$ все решения которого осциллирующие. Грегуш (Diferenciálna rovnica tretieho rádu tvaru $y'''+2Ay'+(A'+b)y=0$ so všetkými integrálmi oscilatorickými. Greguš M.), Acta Fac. rerum. natur. Univ. Comenianae Math., 1956, **1**, № 1, 41—47 (словацк.; рез. русск., нем.)

Дается условие, при выполнении которого все решения уравнения $y'''+2Ay'+(A'+b)y=0$ имеют бесконечное число нулей в $(-\infty,\infty)$. Таким условием является: 1) $b(x)\geqslant 0$ при $x>a$, $\lim_{x\to+\infty}b(x)=+\infty$, $b(a)=0$ и $b(a+x)=-b(a-x)$; 2) $A(x)>a^2>0$, $A(x+a)=A(a-x)$,

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{A(x)}{\sqrt{x}}<\infty,\quad \limsup_{x\to\infty}\sqrt{x}\,[A'(x)-b(x)]<0.$$

В. А. Кондратьев

6463. Заметка о неосцилляции решений дифференциальных уравнений n-го порядка. Азбелев Н. В., Цалюк З. Б., Уч. зап. Удмуртск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 12, 44—46

Доказывается, что для того чтобы никакое решение уравнения $L(y) = y^{IV} + (A(x)y')' + B(x)y = 0$ не имело бы двух кратных нулей на $[a, c)$, необходимо и достаточно существование функции $v(x, s)$ такой, что $v^{(k)}(x, s) = \delta_{k,4}$ при $x = s$, $k \leqslant 4$, $v(x, s) > 0$, а

$$L_1(v) = (v'' + Av)'' + A(v'' + Av)' - 4Bv' - 2B'v \leqslant 0$$

при $a \leqslant s < x < c$.

Для того чтобы никакое решение уравнения $L(y) = 0$ не имело бы на $[a, c)$ более трех нулей, необходимо и достаточно, чтобы существовали две функции: $v(x, s)$, удовлетворяющая вышеуказанным условиям, и $u(x, s)$ такая, что $u^{(k)}(x, s) = \delta_{k,3}$ при $x = s$, $k \leqslant 3$, $u(x, s) > 0$, а $L(u) \leqslant 0$ при $a \leqslant s < x < c$. В. А. Кондратьев

6464. О колеблемости решений некоторых дифференциальных уравнений высшего порядка. Ананьева Г. В., Балаганский В. И., Успехи матем. наук, 1959, **14**, № 1, 135—140

Доказана теорема: Если $f(x) > 0$ и $\int_a^\infty x^{n-2} f(x)\,dx = \infty$ то всякое решение уравнения $y^{(n)} + f(x)y = 0$ либо колеблется (имеет бесконечное число нулей), либо монотонно стремится к нулю. Приводится пример, показывающий, что условие $\int_a^\infty x^{n-2} f(x)\,dx = \infty$ нельзя заменить на $\int_a^\infty x^{n-1} f(x)\,dx = \infty$. Вышеуказанная теорема распространена на некоторые нелинейные уравнения вида $y^{(n)} + f(xy) = 0$. В. А. Кондратьев

6465. О колеблемости решений самосопряженных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Лейтон, Нехари (On the oscillation of solutions of self-adjoint linear differential equations of the fourth order. Leighton Walter, Nehari Zeev), Trans. Amer. Math. Soc., 1958, **89**, № 2, 325—377 (англ.)

В работе рассматривается самосопряженное уравнение четвертого порядка

$$(r(x)y'')'' + p(x)y = 0, \qquad (1)$$

где $r(x) > 0$, а $p(x)$ сохраняет знак в $(0, \infty)$. Решение уравнения (1) называется осцилляционным, если оно имеет бесконечное число нулей в $(0, \infty)$, а уравнение (1) называется осцилляционным, если хотя бы одно решение его осцилляционное. В первой части работы рассматривается случай $p(x) < 0$. Элементарными средствами доказывается теорема о разделении нулей: если $u(x)$ и $v(x)$ — два линейно независимых решения уравнения (1) таковы, что $u(a) = v(a) = u(b) = v(b) = 0$ $(0 < a < b)$, то их нули в (a, b) разделяют друг друга. Далее доказывается следующая теорема сравнения: если $u(x)$ — решение уравнения (1), а $v(x)$ — решение уравнения $(r_1(x)y'')'' + p_1(x)y = 0$ (2), причем $r(x) \geqslant r_1(x) > 0$, $p(x) \geqslant p_1(x)$, $p_1(x) < 0$ и $u(a) = v(a) = u(b) = v(b) = 0$, $(a < b)$, то $n' \geqslant n - 1$ (здесь n' — число нулей $v(x)$ на $[a, b]$, а n — число нулей $u(x)$ на том же отрезке). Далее автор приводит некоторые достаточные условия осцилляционности уравнения (1) при $p(x) < 0$. Предварительно доказывается, что если $r(x) \geqslant r_1(x) > 0$, $p(x) \geqslant p_1(x)$ и уравнение (1) осцилляционное, то уравнение (2) также осцилляционное. Отсюда, беря за уравнение (2) $(x^{\alpha+2}y'')'' - c^2x^{\alpha-2}y = 0$, легко получить следующую теорему: Если α — произвольное число и $\limsup_{x\to\infty} x^{-2-\alpha} r(x) < 1$, $\liminf_{x\to\infty} x^{2-\alpha} p(x) > \frac{(1-\alpha^2)^2}{16}$, то уравнение (1) осцилляционно, и если $\liminf_{x\to\infty} x^{-2-\alpha} r(x) > 1$, $\limsup_{x\to\infty} x^{2-\alpha} p(x) < \frac{(1-\alpha^2)^2}{16}$, то уравнение (1) неосцилляционно. Имеются другие достаточные условия осцилляционности и неосцилляционности. Из них отметим следующее: если $r(x) = 1$ и $\int_a^\infty x^{3-\mu} |p(x)|\,dx = \infty$, то уравнение (1) осцилляционное. В конце первой части устанавливается возможный рост решения неосцилляционного уравнения (1), если $r(x) = 1$. Оказывается, что при достаточно больших x для любого решения $u(x)$ уравнения (1) справедливо неравенство $Ax^{-\frac{1}{3}} \leqslant |u(x)| \leqslant Bx^{10/3}$, где A и B — константы. Во второй части рассматриваются свойства решений уравнения (1), если $p(x) > 0$. Доказано, что числа нулей решений $u(x)$ и $v(x)$ на $[a, b]$ не могут отличаться друг от друга более чем на четыре. Приводится достаточное условие осцилляционности: если $\limsup_{x\to\infty} x^{-2-\alpha} r(x) < 1$, $\liminf_{x\to\infty} 4x^{2-\alpha} p(x) > \alpha^2$, то уравнение (1) осцилляционно, если $\liminf_{x\to\infty} x^{-2-\alpha} r(x) > 1$, $\limsup_{x\to\infty} 4x^{2-\alpha} p(x) < \alpha^2$, то уравнение (1) неосцилляционно. Многие результаты статьи пересекаются или содержатся в результатах других авторов, опубликованных в 1956—57 гг. (РЖМат, 1958, 3727, 7713, 7716; реф. 6464). В. А. Кондратьев

6466. Об «асимптотической эквивалентности» систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Конти (Sulla «equivalenza asintotica» dei sistemi di equazioni differenziali ordinarie. Conti Roberto), Ann. mat. pura ed appl., 1956, **41**, 95—104 (итал.)

В системе уравнений, записанной в векторной форме

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \qquad (1)$$

вектор-функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям $f(t, 0) = 0$, $t \geqslant 0$, $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leqslant \lambda(t)|x_1 - x_2|$, $\int_0^\infty \lambda(t)\,dt < \infty$. Система (1) называется асимптотически эквивалентной системе

$$\dot{y} = A(t)y, \qquad (2)$$

если существует гомеоморфное соответствие $x(0) \sim y(0)$ такое, что для соответствующих решений выполнено $\lim_{t\to+\infty} |x(t) - y(t)| = 0$.

Устанавливается асимптотическая эквивалентность систем (1) и (2) в предположении, что матрица-функция $A(t)$ абсолютно непрерывна в $(0, +\infty)$ и что ее $p \geqslant 0$ собственных значений чисто мнимы и имеют простые элементарные делители, и остальные собственные значения лежат в области $\operatorname{Re}\lambda \leqslant -a^2 < 0$. Автор отмечает, что этот результат примыкает к работам 1945—1951 гг. Винтнера, Левинсона, Г. Вейля и референта.

В. А. Якубович

6467. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенными однородными правыми частями. Зубов В. И., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 1, 80—88

Изучается вопрос об асимптотической устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

правые части которых $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ являются непрерывными обобщенно-однородными функциями. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется обобщенно-однородной класса $(m_1, \ldots m_n)$ порядка m, если она удовлетворяет условию

$$f(c^{m_1}x_1, \quad c^{m_2}x_2, \ldots, c^{m_n}x_n) = c^m f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

при $-\infty < c < \infty$ (m, m_i — положительные рациональные числа). Автор обобщает на такого рода системы результаты, относящиеся к системам с однородными (в обычном смысле) правыми частями, изложенные им в ранее опубликованной монографии (РЖМат, 1959, 1480). С помощью полученных теорем изучается вопрос об устойчивости нулевого решения системы

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t),$$

отличающейся от первоначальной системы „малыми добавками" $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, и вопрос об ограниченности всех решений некоторой системы дифференциальных уравнений.

П. Н. Папуш

6468. Применение теорем о неподвижной точке к различным нелинейным проблемам устойчивости. Стокс (The application of a fixed-point theorem to a variety of nonlinear stability problems. Stokes Arnold), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, 45, № 2, 231—235 (англ.)

Пусть E — пространство всех неотрицательных непрерывных функций в R^n. Топологизируем это пространство так, чтобы E было локально выпуклым линейным пространством. В таком пространстве имеет место теорема о неподвижной точке, установленная А. Н. Тихоновым. Рассматриваются три типа системы уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1}$$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \quad \| X(t) \| \leqslant K, \tag{2}$$
$$\| X(t) X^{-1}(s) \| \leqslant K,$$

$$\dot{x} = A(t)x + f(t, x), \| X(t) \| \leqslant Ke^{-\sigma t}, \tag{3}$$
$$\| X(t) X^{-1}(s) \| \leqslant Ke^{-\sigma(t-s)},$$

где K и $\sigma > 0$, $X(t)$ — матрица решения однородной системы $\dot{x} = A(t)x$.

Далее предполагается, что f непрерывно отображает R^{n+1} в R^n и $\| f(t, x) \| \leqslant G(t, \| x \|)$, $t \geqslant 0$, $x \in D \subset R^n$, и $G(t, r)$ — кусочно непрерывная функция в R^2, положительная для всех t и $r > 0$ и не убывающая по r при фиксированном t, и D — некоторые подмножества R^n. Уравнениям (1), (2), (3) ставятся в соответствие операторы

$$T_b(x)(t) = b + \int_0^t f(s, x(s))\, ds,$$

$$T_b(x)(t) = X(t)b + \int_0^t X(t) X^{-1}(s) f(s, x(s))\, ds,$$

и рассматривается выпуклое множество

$$A = \{x \in E, \| x(t) \| \leqslant g(t)\},$$

где $g(t)$ непрерывна и положительна, множества $T_b(x)(t)$, $x \in A$, компактны в E и, следовательно, вопросы о существовании решений сводятся к доказательству утверждения $T_b A \subset A$. Это включение будет установлено, если существуют функции $g(t)$, удовлетворяющие неравенствам

$$g(t) \geqslant K_1 G(t, g(t)), \; g(0) \geqslant K_1 \| b \| \quad \text{для } t \geqslant 0, \tag{4}$$

$$\dot{g}(t) \geqslant -\sigma g(t) + KG(t, g(t)), \; g(0) \geqslant K\|b\| \quad \text{для } t \geqslant 0. \tag{5}$$

Тогда имеет место теорема: Если для $r_0 > 0$ неравенство (4) имеет на $[0, \infty)$ решение и соответственно ограниченное решение или предельно ограниченное (ultimately limited), то соответственно (1) и (2) имеют решение, определенное на полуоси, ограниченное или предельно ограниченное. Приводятся конкретные условия применимости этой теоремы.

Далее устанавливается теорема 4: Если уравнение $\dot{r} = K_1 G(t, r)$ ($\dot{r} = -\sigma r + KG(t, r)$) обладает устойчивым (соответственно асимптотически устойчивым) тривиальным решением, тогда уравнения (1), (2), (3) будут иметь соответственно устойчивые и асимптотически устойчивые решения. Как следствия из этой теоремы получаются известные критерии устойчивости и асимптотической устойчивости.

Например, следствие 6: Допустим, что для $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\| f(x, t) \| < \begin{cases} k \| x \| + t^b \| x \|^{1+a}, & 0 \leqslant t \leqslant T(\varepsilon), \\ \varepsilon \| x \| + t^b \| x \|^{1+a}, & t \geqslant T(\varepsilon) \end{cases}$$

для $\| x \| \leqslant \mu(\varepsilon)$, где $k, b \geqslant 0$, $a > 0$; тогда тривиальное решение уравнения (3) асимптотически устойчиво.

В. В. Немыцкий

6469. О некотором обобщенном асимптотическом представлении решения системы линейных однородных дифференциальных уравнений, зависящих от двух параметров. Такахаси (Über eine erweiterte asymptotische Darstellung der Lösung eines Systems von linearen homogenen Differentialgleichungen, welche von zwei Parametern abhängen. Takahashi Kenichi), Tohoku Math. J., 1958, 10, № 2, 172—193 (нем.)

Обобщение результатов предыдущей статьи автора (РЖМат, 1958, 3739), относящихся к системе второго порядка

$$\frac{dY}{dx} = \lambda^m \mu^{m'} A(x, \lambda, \mu) Y,$$

на случай произвольных натуральных m и m' (вместо $m = 2$, $m' = 1$). Матрица $A(x, \lambda, \mu)$ предполагается: 1) непрерывной для вещественного $x \in [\alpha, \beta]$ и комплексных параметров λ, μ (достаточно больших по модулю, ограниченных по аргументу и связанных соотношением $\varepsilon |\lambda|^{\sigma_1} \leqslant |\mu| \leqslant K |\lambda|^{\sigma_2}$, где σ_1, σ_2, ε, $K = \text{const} > 0$); 2) разложимой в асимптотический ряд

$$A(x, \lambda, \mu) \sim \sum_{r,\, s=0}^{\infty} A_{rs}(x) \lambda^{-r} \mu^{-s}, \quad A_{00} = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Построен формальный ряд, членами которого являются функции специального вида от x, λ и μ, и доказано, что он асимптотически сходится к решению системы.

Ю. С. Богданов

6470. О допустимой линеаризации при исследовании устойчивости. Неймарк Ю. И., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 5, 961—964

Пусть $u(t)$ и $\omega(t)$ — абстрактные функции действительного переменного t со значениями в линейных нормированных функциональных пространствах U и Ω соответственно. Оператор, однозначно определяющий $u(t)$ через $\omega(\tau)$ ($\tau \leqslant t$), называется динамической системой. $\omega(t)$ называется входом этой системы, $u(t)$ — выходом. Пусть входу $\omega(t) = 0$ отвечает выход $u(t) = 0$. Движение динамической системы, отвечающее входу $\omega(t) = 0$, называется устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что $\| u(t) \| < \varepsilon$ при всех t, если

только $\| \omega(t) \| < \delta$ при всех t. Предполагается, что $\omega(t)$ при достаточно больших отрицательных t обращается в нуль.

Теорема 1. Линейная динамическая система

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t, \tau)\, \omega(\tau)\, d\tau, \qquad (1)$$

где $G(t, \tau)$ — линейный оператор, устойчива, если

$$\sup_{t_1 \geqslant t_0} \int_{t_0}^{t_1} \| G(t, \tau) \|\, d\tau < \infty. \qquad (2)$$

В некоторых случаях условие (2) является также и необходимым условием устойчивости.

Далее рассматривается нелинейная динамическая система

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t, \tau)\, (f(\tau, u(\tau)) + \omega(\tau))\, d\tau. \qquad (3)$$

В теореме 2 формулируются условия, при выполнении которых решение $u(t)$ уравнения (3), известное при $t \leqslant t_0$, допускает однозначное непрерывное продолжение на интервал $[t_0, t_1]$. В теореме 3 формулируются условия, при выполнении которых из устойчивости линейной динамической системы (1) вытекает устойчивость нелинейной динамической системы (3). Указываются приложения, в частности рассматривается конкретная система регулирования температуры. Имеются опечатки.

Я. Б. Рутицкий

6471. Устойчивость решений «порожденных» систем дифференциальных уравнений. Егоров В. Г., Тр. Уральского политехн. ин-та, 1958, сб. 74, 5—14

Изложен материал статьи с тем же названием, опубликованной ранее (РЖМат, 1959, 2641).

Е. А. Барбашин

6472. О построении функций Ляпунова в виде квадратичной формы и их применение к устойчивости регулируемых систем. Бедельбаев (Про побудову функцій Ляпунова у вигляді квадратичної форми та їх застосування до стійкості регульованих систем. Бедельбаєв А. К.), Автоматика (Київ), 1958, № 1, 37—43 (укр.; рез. русск., англ.)

1. Ссылаясь на результаты предыдущих статей, автор выводит формулы для решения специальной системы линейных уравнений

$$\sum_{s} (\sigma_{\alpha s} p_{s\beta} + p_{\alpha s} \sigma_{s\beta}) = -a_{\alpha\beta}, \qquad (1)$$

появляющейся при отыскании функции Ляпунова $V = \sum_{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta$, производная которой в силу системы $\eta_{is} = \sum_\beta p_{s\beta} \eta_{i\beta}$ с постоянными коэффициентами имеет заданный вид

$$\dot{V} = -\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta.$$

2. Система уравнений „непрямого автоматического регулирования“ приводится к виду

$$\dot{\eta}_s = \sum_{k=1}^{n} p_{sk} \eta_k + h_s f(\eta_n), \qquad s = 1, 2, \ldots, n, \qquad (2)$$

где $h_s = 0$, $s = 1, \ldots, n-1$, $h_n = -1$, функция $f(\eta)$ удовлетворяет условию $\eta f(\eta) > 0$ при $\eta \neq 0$.

Применяя известный метод Малкина, автор ищет функцию Ляпунова в виде

$$V = \sum_{\alpha\beta=1}^{n} \sigma_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta + \int_0^{\eta_n} f(\eta)\, d\eta, \qquad (3)$$

где $\sigma_{\alpha\beta}$ определяются уравнениями (1), и приходит к неравенству

$$A - \sum_{\alpha\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta} g_\alpha g_\beta > 0, \qquad (4)$$

где $g_\alpha = {}^1/_2 (\sigma_{n\alpha} - p_{n\alpha})$, $A > 0$ является многочленом степени n и $A_{\alpha\beta}$ — многочленом степени $n-1$ относительно $n(n+1)/2$ величин $a_{\alpha\beta}$. Коэффициенты этих многочленов зависят от $p_{\alpha\beta}$. Неэффективность метода Малкина, требующего установления соотношений на коэффициенты $p_{\alpha\beta}$, при выполнении которых неравенство (4) имеет вещественное решение $a_{\alpha\beta}$, автор преодолевает специальным приемом, требуя чтобы $g_\alpha = 0$ и чтобы $a_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Окончательными достаточными условиями устойчивости в целом системы (2) являются неравенства $a_{\alpha\alpha} = a_\alpha(p_{sk}) > 0$, где $a_{\alpha\alpha}$ находятся из n линейных уравнений $g_\alpha = 0$.

В заключение рассмотрен пример системы вида (2) для $n = 3$, для которого получены достаточные условия устойчивости.

В. А. Якубович

6473. К вопросу об устойчивости стационарного режима ГЭС с дифференциальным уравнительным резервуаром. Любимцев Я. К., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1958, № 2, 187—190

При помощи прямого метода Ляпунова найдены условия устойчивости состояния равновесия в начале координат для системы с нелинеаризуемой нелинейностью

$$\frac{d\eta}{dt} = -\varepsilon (2\eta + \sigma + \zeta + \eta^2), \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \mp k_1 \sqrt{|\sigma|},$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \eta + \frac{c(\sigma + \zeta)}{1 + c(\sigma + \zeta)} \pm k_1 (\alpha + 1) \sqrt{|\sigma|}$$

(верхние знаки при $\sigma < 0$, нижние знаки при $\sigma > 0$). Решение вопроса об устойчивости в малом сводится к исследованию невозмущенного движения в критическом случае двух нулевых корней. Показано, что граница области устойчивости является „опасной“.

Н. Н. Баутин

6474. Критерий существования почти периодического решения некоторой системы почти периодических дифференциальных уравнений. Массера (Un criterio de existencia de soluciones casi-periódicas de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales casi-periódicas. Massera J. L.), Bol. Fac. ingr. y agrimensura Montevideo, 1958, **6**, № 11, 345—349 (исп.; рез. англ.)

Решается система уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 + a_{11}(t)\, x_1 &= f_1(t), \\ \dot{x}_2 + a_{21}(t)\, x_1 + a_{22}(t)\, x_2 &= f_2(t), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \dot{x}_n + a_{n1}(t)\, x_1 + a_{n2}(t)\, x_2 + \ldots + a_{nn}(t)\, x_n &= f_n(t), \end{aligned} \qquad (1)$$

где $a_{ij}(t)$ — действительные почти периодические функции. Необходимое и достаточное условие существования почти периодических решений системы (1) для каждой системы действительных почти периодических функций $f_i(t)$ состоит в том, чтобы $a_{ii}(t)$ имели средние значения, отличные от нуля. В этом случае (1) для каждой системы функций $f_i(t)$ имеет одно и только одно почти периодическое решение, удовлетворяющее условию:

$$\sup_{(t)} \left\{ \sum x_i^2(t) \right\} \leqslant K^2 \sup_{(t)} \left\{ \sum f_i^2(t) \right\},$$

где K зависит только от $a_{ij}(t)$. Для системы, полученной из (1) заменой функций $f_i(t)$ функциями $h_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, определенными в области $\sum x_i^2 < a^2, 0 < a \leqslant \infty$, $-\infty < t < \infty$, почти периодическими при фиксированных x и удовлетворяющими условию $\sum \left[h_i\left(x_1', x_2', \ldots, x_n', t\right) - h_i\left(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'', t\right)\right]^2 \leqslant \gamma^2 \left\{\sum \left(x_i' - x_i''\right)^2\right\}$, при некоторых дополнительных ограничениях, наложенных на величину константы γ, получен аналогичный результат. Б. Ф. Былов

6475. Нелинейные автономные системы, допускающие семейства периодических решений, близких к некоторому периодическому решению. Урабэ (On the nonlinear autonomous system admitting of a family of periodic solutions near its certain periodic solution. Urabe Minoru), J. Sci. Hiroshima Univ. 1958, 22, № 3, 153—173 (англ.)

Исследуется система уравнений

$$\frac{dy}{dt} = Y(y) \tag{1}$$

и возмущенная система

$$\frac{dy}{dt} = Y(y) + \varepsilon H(y, \Sigma), \tag{2}$$

и рассматриваются решения этой системы вблизи заданного периодического решения $y = \psi(t)$. В окрестности данного периодического решения вводится локальная система координат; причем $n-1$ единичных векторов этой координатной системы лежат в ортогональных плоскостях к различным точкам периодического решения. После перехода к локальным координатам при соответствующей гладкости правых частей получаем систему

$$\frac{dx}{dt} = X(x, t) = A(t)x + o(\|x\|),$$

где $A(t)$ — периодическая дифференцируемая матрица. Исследование полученной системы и дает сведение о строении периодических решений в окрестности заданного периодического решения. Сама идея подобного исследования и основные результаты изложены в книге В. В. Немыцкого и В. В. Степанова (Качественная теория дифференциальных уравнений, изд. 2-е, 1949, § 4). Однако в разбираемой работе автор пошел значительно дальше. Он дает явные аналитические формулы для преобразования к локальным координатам. Именно:

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x, t) = \frac{\|Y\|^2 + \sum_{j=1}^{n} x^j Y^* \dot{\xi}_j}{Y^* Y'} \cdot \xi_i^* Y' - \sum_{j=1}^{n} x^j \xi_i^* \dot{\xi}_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$Y' = Y\left(\psi + \sum_{i=1}^{n} x^i \xi_i\right) = Y + \sum_{i=1}^{n} x^i V(t)\, \xi_i + o(\|x\|),$$

где (ξ_i) — система нормальных векторов. В этой новой системе решения представляются в форме

$$Y = \psi(t) + \sum_{i=1} x^i \xi_i.$$

Исследование разбивается на две части. В первой предполагается, что вся достаточно малая окрестность периодического решения заполнена периодическими решениями. Путем преобразования координат система может быть в окрестности $y = \psi(t)$ приведена к виду

$$dx/dt = \varepsilon F(x, t, \varepsilon).$$

Рассматривается так называемый стробоскопический образ системы

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon F_0(x) = \frac{\varepsilon}{\omega_0} \int_0^{\omega_0} F(x, t, 0)\, dt. \tag{3}$$

Теорема 2. Если стробоскопический образ не имеет особых точек, то возмущенная система не имеет периодических решений. Если (3) имеет простую критическую точку, тогда существуют периодические решения возмущенной системы и орбитная устойчивость этого решения будет вытекать из устойчивости соответствующей особой точки.

При доказательстве автор ссылается на свою предыдущую работу (РЖМат, 1959, 3750) и „Нелинейную механику" А. Н. Крылова и Н. Н. Боголюбова. Далее рассматриваются случаи, когда периодические решения заполняют некоторое гладкое многообразие: $c = c(u)$ m-измерений. Путем введения специальной системы координат уравнение сводится к системе

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{\nu=m+1}^{n} X_\nu^i(x, t)\, x^\nu, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

где $X_\nu^i(x, t)$ — непрерывные и периодические функции. Соответственно с этим возмущенная система

$$dy/dt = Y(y) + \varepsilon H(y; \varepsilon) \tag{4}$$

примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{\nu=m+1}^{n} X_\nu(x, t)\, x^\nu + \varepsilon K(x, t, \varepsilon). \tag{5}$$

Пусть $x = \varphi(t, c; \varepsilon)$ — периодические решения (5); вводим обозначения:

$$\varphi^\alpha(t, c^1, \ldots, c^m, 0, \ldots, 0) = c^\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\varphi^\nu(t, c^1, \ldots, c^m, 0, \ldots, 0) = 0 \quad (\nu = m+1, \ldots, n),$$

тогда

$$\varphi^\alpha(t, c, \varepsilon) = c^\alpha + \sum_{\mu=m+1}^{n} G_\mu^\alpha c^\mu + \varepsilon r^\alpha + o(|c^{m+1}| \ldots + |c^n| + |\varepsilon|), \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\varphi^\nu(t, c, \varepsilon) = \sum_{\mu=m+1}^{n} G_\mu^\nu c^\mu + \varepsilon r^\nu + o(|c^{m+1}| \ldots + |c^n| + |\varepsilon|) \qquad (\nu = m+1, \ldots, n).$$

Здесь

$$G_\mu^i = G_\mu^i(t, c^1, \ldots, c^m), \quad r^i = r^i(t, c^1, \ldots, c^m) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (\mu = m+1, \ldots, n).$$

Легко видеть, что

$$G_\mu^i(t) = \frac{\partial \varphi^i(t, c, \varepsilon)}{\partial c^\mu}\bigg|_{\substack{\bar{c}=0 \\ \varepsilon=0}}, \quad r^i(t) = \frac{\partial \varphi^i(t, c, \varepsilon)}{\partial \varepsilon}\bigg|_{\substack{\bar{c}=0 \\ \varepsilon=0}}.$$

Здесь $\bar{c}$ есть $n-m$-вектор с компонентами c^μ $(\mu = m+1, \ldots, n)$. Вводим обозначения $G(t) = \left\{G_\mu^i(t)\right\}$

$$J(t) = \frac{\partial}{\partial c_i^\alpha}\left[-(G'(\omega_0)[G(\omega_0) - E]^{-1} r(\omega_0) + r'(\omega_0)\right],$$

$$J_0 = J(t)\big|_{c^\alpha = c_0^\alpha}.$$

Здесь c_0^α — некоторые значения c, определяемые из условий периодичности. В зависимости от того, будут ли

уравнения $\det[G(\nu)-E]=G^i_\mu(t)$ удовлетворяться при $\nu=\omega_0$ или при $\nu=p\omega_0$, где p — частота соответствующего гармонического решения, можно сделать заключение о наличии периодических решений для возмущенной системы. Последний параграф посвящен исследованию устойчивости периодических решений, существование которых установлено предыдущей теоремой.

Теорема 5. Пусть собственные значения G_0 все меньше 1 по абсолютной величине и действительные части собственных значений εJ_0 все отрицательны, тогда существует единственное периодическое решение возмущенной системы, и это периодическое решение устойчиво, если устойчивы связки S^{m+1} решений невозмущенной системы.

В. В. Немыцкий

6476. Относительные периодични и асимптотични движения n-кратного физического маятника в плоскости, която вращается с постоянна скорост. Брадистилов Г., Бояджиев Г. (Релативни периодични и асимптотични движения на n-кратно физично махало в една равнина, подложена на ротация с постоянна скорост. Брадистилов Г., Бояджиев Г.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1959, 3, № 2, 19—37 (болг.; рез. русск., франц.)

Рассматривается вопрос о периодических и асимптотических движениях n-кратного физического маятника, расположенного в вертикальной плоскости, которая вращается с постоянной скоростью ω. Составляется система дифференциальных уравнений, описывающих движение маятников:

$$B_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}b_k\left[\cos(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k''+\sin(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k'^2\right]+$$

$$+(A_\nu+I_\nu)\varphi_\nu''+b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}B_k\left[\cos(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k''+\right.$$

$$\left.+\sin(\varphi_\nu-\varphi_k)\varphi_k'^2\right]=-gB_\nu\sin\varphi_\nu+\omega^2\Big[(A_\nu+I_\nu''-I_\nu')\times$$

$$\times\sin\varphi_\nu\cos\varphi_\nu+B_\nu\cos\varphi_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}b_k\sin\varphi_k+ \qquad (1)$$

$$+b_\nu\cos\varphi_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}B_k\sin\varphi_k\Big],\qquad \nu=1,\ldots,n,$$

где

$$A_\nu=a_\nu^2m_\nu+b_\nu^2\sum_{k=\nu+1}^{n}m_k,\quad B_\nu=a_\nu m_\nu+b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}m_k,$$

m_ν — масса ν-го маятника, $I_\nu=I_\nu''+I_\nu'$ — момент инерции ν-го маятника. Показывается, что система (1) допускает периодическое решение, если при своем движении n-кратный маятник два раза проходит через вертикальное положение. Для установления периодических и асимптотических движений в системе (1) полагается $\varphi_{r_p}=\lambda\psi_{r_p}$ и $\varphi_{r_q}=\pi+\lambda\psi_{r_q}$.

Раскладывая $\sin\lambda\psi_\nu$ и $\cos\lambda\psi_\nu$ в ряды в правой части (1), сокращая на λ и полагая $\lambda=1$, авторы получают порождающую систему

$$\varepsilon_\nu B_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}\varepsilon_k b_k\psi_k''+(A_\nu+I_\nu)\psi_\nu''+\varepsilon_\nu b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\varepsilon_k B_k\psi_k''=$$

$$=g\varepsilon_\nu B_\nu\psi_\nu+\omega^2\Big[\left(A_\nu+I_\nu''-I_\nu'\right)\psi_\nu+\varepsilon_\nu B_\nu\sum_{k=1}^{\nu-1}\varepsilon_k b_k\psi_k+$$

$$+\varepsilon_\nu b_\nu\sum_{k=\nu+1}^{n}\varepsilon_k B_k\varphi_k\Big], \qquad (2)$$

где $\varepsilon_{r_p}=+1$, $\varepsilon_{r_q}=-1$.

После этого составляется характеристическое уравнение для системы (2), анализируя корни которого, авторы делают интересные выводы о характере движения системы маятников. Так, например, если q маятников направлены вверх, то при выполнении условий

$$\omega^2<\frac{B_{r_q}g}{2I'_{r_q}},\qquad \omega^2<-\frac{g}{u_1}$$

n-кратный физический маятник при своем относительном движении теряет q семейств периодических движений, взамен которых появляется одно семейство асимптотических движений, зависящих от q параметров. Кроме того, в конце работы приведено подробное исследование двойного маятника при различных значениях угловой скорости ω.

Ю. А. Митропольский

6477. Вывод некоторых асимптотических оценок для решений дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Мищенко Е. Ф., Понтрягин Л. С., Изв. АН СССР, Сер. матем., 1959, **23**, № 5, 643—660

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\varepsilon\dot{x}=f(x,y),\quad \dot{y}=g(x,y), \qquad (1)$$

$\varepsilon>0$—малый параметр, x—k-мерный, y—l-мерный вектор. Дано доказательство справедливости асимптотических разложений решения этой системы в окрестности так называемой точки срыва, т. е. точки, где $\det\|\partial f^i/\partial x^\alpha\|=0$. Схема этого доказательства была сформулирована ранее (РЖМат, 1959, 2644). Эти асимптотические разложения были выписаны и использованы авторами в предшествующих работах (РЖМат, 1 58, 6709; 6712), в частности в целях приближенного вычисления периодических решений системы типа (1). В окрестности точки срыва делается линейная замена переменных, и одно из новых переменных ξ^1, выделяемое по определенному признаку, принимается за независимое на некотором участке $-p\leqslant\xi^1\leqslant p$ (p — малое, но не зависящее от ε число). Асимптотическое разложение имеет различный вид на каждом из трех участков

$$-p\leqslant\xi^1\leqslant-\sigma_1,\ -\sigma_1\leqslant\xi^1\leqslant\sigma_2,\ \sigma_2\leqslant\xi^1\leqslant p$$

$$(\sigma_1=\varepsilon^{1/7},\quad \sigma_2=\varepsilon^{1/3}),$$

на которые разбивается участок $(-p,p)$, и обоснование проводится отдельно для каждого из этих участков. В основу доказательств положена одна и та же идея, фигурирующая также в работах других авторов, посвященных родственным явлениям: построение около формального решения бесконечно сужающейся при $\varepsilon\to0$ трубки, обладающей тем свойством, что траектории, начинающиеся внутри этой трубки, не выходят из нее на протяжении всего рассматриваемого участка. При построении таких трубок используются функции Ляпунова.

А. Б. Васильева

6478. О периодическом интегральном многообразии нелинейной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. Задирака К. В., Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 3, 243—250 (рез. англ.)

Рассматривается решение $x(t,\mu)$, $z(t,\mu)$ системы

$$dx/dt=f(t,x,z),\quad \mu dz/dt=F(t,x,z) \qquad (1)$$

(x, f — n-мерные, z, F — m-мерные векторы) и решение $\bar{x}(t)$, $\bar{z}(t)$ соответствующей вырожденной системы ($\mu=0$)

$$d\bar{x}/dt = f(t, \bar{x}, \bar{z}),\ \bar{z} = \varphi(t, \bar{x}).$$

При некоторых условиях гладкости относительно правых частей системы (1) в области $-\infty < t < \infty$, $x \in G$, $|z - \varphi(x, t)| \leqslant \rho$, $0 < \mu < \mu^*$, при обычном условии устойчивости (корни характеристического уравнения $\det \| pE - A \| = 0$, где $A = \partial F/\partial z\,(t, x, \varphi)$, удовлетворяют требованию $\mathrm{Re}\, p(t, x) \leqslant -\alpha < 0$) и при условии периодичности F, f и φ по t с периодом 2π доказывается существование и единственность периодического интегрального многообразия $z = z(t, x, \mu)$ системы (1) и его близость к $z = \varphi(t, x)$. Для $\mu \leqslant \mu_0$ доказывается возможность представления $z(t, x, \mu)$ в виде $z(t, x, \mu) = \varphi(t, x) + \psi(t, x, \mu)$, где для $-\infty < t < \infty$, $x \in G$, ψ удовлетворяет неравенству $|\psi| \leqslant D(\mu)$ и условию Липшица по x с константой $\Delta(\mu)$, причем $D(\mu) \to 0$, $\Delta(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. Доказывается также, что при соответствующих дополнительных условиях гладкости на правые части (1) $z(t, x, \mu)$ имеет ограниченные и равномерно непрерывные производные по x (любого порядка) и ограниченную и равномерно непрерывную производную по μ первого порядка. А. Б. Васильева

6479. Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений. Ч. I. Основные свойства счетных систем дифференциальных уравнений. Персидский К. П., КазССР Гылым Акад. хабарлары, Изв. АН КазССР, Сер. матем. и механ., 1959, вып. 7 (11), 52—71 (рез. каз.)

Рассматривается счетная система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = f_s(t, x_1, x_2, \ldots) \quad s = 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

где 1) f_s непрерывны по t во всякой точке $H\{|t| < \infty, |x_s| < \infty, s = 1, 2, \ldots\}$; 2) f_s удовлетворяют условию Коши относительно величин $x_1, x_2, \ldots$, т. е.

$$|f_s(t, x_1', x_2', \ldots) - f_s(t, x_1'', x_2'', \ldots)| \leqslant \alpha(t)\,\Delta x, \quad s = 1, 2, \ldots,$$

где $\Delta x = \sup[|x_s' - x_s''|]$, $\alpha(t)$ — некоторая непрерывная функция от t; 3) при любом t и при $x_1 = x_2 = \ldots = 0$ имеют место неравенства

$$|f_s(t, 0, 0, \ldots)| \leqslant \beta(t), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

$\beta(t)$ — непрерывная функция от t.

Для таких систем методом последовательных приближений доказана теорема существования и единственности ограниченного решения, которое будет и равностепенно непрерывным. Доказана непрерывная зависимость решения от начальных условий. При дополнительных условиях на правые части системы (1) указан метод приближенного решения таких систем. Изучены голоморфные решения счетных систем дифференциальных уравнений. Р. С. Гусарова

6480 К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Примеры и задачи. Кретнер (Gewöhnliche Differentialgleichungen. Beispiele und Aufgaben. Krettner Josef. München, Lindauer, 1959, 124 S., 9.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 24, 1861 (нем.)

6481 К. Курс дифференциальных уравнений. [Для ун-тов]. Изд. 8-е, стереотип. Степанов В. В. М., Физматгиз, 1959, 468 стр., илл., 12 р. 10 к.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Редакторы *И. Н. Векуа, Н. И. Мозжерова*

6482. О гладких линейных дифференциальных уравнениях в частных производных, не имеющих решений. Хартман (On smooth linear partial differential equations without solutions. Hartman Philip), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 252—257 (англ.)

В работе Леви (РЖМат, 1958, 8827) рассматривалась следующая система двух уравнений первого порядка с двумя неизвестными функциями u_1 и u_2 и тремя независимыми переменными s, x и y: $L(u) = F(s, x, y)$, где $u = u_1 + iu_2$, F — некоторая бесконечно дифференцируемая по всем переменным функция и $L(u) = -(\partial u/\partial x + i\,\partial u/\partial y) + 2i(x + iy)\,\partial u/\partial s$. Леви было показано, что рассматриваемая система ни в какой области трехмерного пространства (s, x, y) не может иметь решения, первые производные которого удовлетворяют условию Гёльдера. Показывается, что существуют линейные системы уравнений с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, не имеющие ни в какой области трехмерного пространства ни непрерывно дифференцируемого решения, ни „сильного" обобщенного решения в L_2. В качестве системы, не имеющей непрерывного дифференцируемого решения, может быть взята система $L(v) = \partial F/\partial s$. Системой, не имеющей „сильного" обобщенного решения, будет система $L(v) = \partial^3 F/\partial s^3$. А. И. Кошелев

6483. Формальные асимптотические представления интегралов дифференциального уравнения в частных производных с малым параметром. Гольденвейзер А. Л., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**, М., АН СССР, 1959, 102—104

6484. Унитарное решение линейного дифференциального оператора (Задача Коши II). Лере (La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire (problème de Cauchy, II). Leray Jean), Bull. Soc. math. France, 1958, **86**, № 1, 75—96 (франц.)

Унитарным решением линейного дифференциального оператора $a(x, \partial/\partial x)$ называется решение $U(\xi, x)$ задачи Коши для уравнения $aU = 1$ при нулевых начальных условиях на гиперплоскости $\xi_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_l x_l = 0$. Пусть $U^*(x, \xi)$ — унитарное решение для сопряженного оператора a^*. С помощью результатов предыдущей статьи автора (РЖМат, 1959, 9090) проводится униформизация унитарного решения. Для случая, когда коэффициенты a — полиномы от x, определяется преобразование Лапласа $A(-\partial/\partial\xi, \xi)$ оператора a. Устанавливается, что a^* и A имеют одно и то же (с точностью до дифференцирований $-\partial/\partial\xi_0$) унитарное решение $U^*(x, \xi)$. В случае, когда a однороден по $\partial/\partial x$ и линеен по x, это позволяет найти U, U^* в явном виде. В качестве примеров рассмотрены унитарные решения однородного оператора с постоянными коэффициентами, оператора $\sum_1^l x_l \frac{\partial}{\partial x_l}$ и оператора Трикоми.

А. А. Дезин

6485. Теорема существования и единственности для уравнений Навье—Стокса в двумерном случае. Лион, Продди (Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier—Stokes en dimension 2. Lions Jacques-Louis, Prodi Giovanni), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 25, 3519—3521 (франц.)

В обозначениях заметки (РЖМат, 1960, 4000) для уравнений Навье — Стокса в двумерном случае доказывается

Теорема. Пусть дана функция f из $L^2_{\mathrm{loc}}(0, \infty; H)$ и из $\bar{V}$-пространства, сопряженного в H к V. Тогда существует единственная функция u, удовлетворяющая соотношениям

$$u \in L^2_{\mathrm{loc}}(0, \infty, V), \quad u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(0, \infty, H), \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty \{-(u(t), \varphi'(t)) + \nu((u(t), \varphi(t))) - b(u(t), \varphi(t), u(t)\}\, dt =$$

$$= \int_0^\infty (f(t), \varphi(t))\,dt + (a, \varphi(0)), \qquad (2)$$

для каждой функции φ, непрерывной, с компактным носителем при $t \geqslant 0$, со значениями в V и с $\varphi' = d\varphi/dt \in L^2(0, \infty, H)$.

Функция u, удовлетворяющая условиям (1) и (2), является турбулентным решением Лере (Leray J., J. math. pures et appl., 1934, **13**, 331—418; Acta math., 1934, **63**, 193—248).

Полученный результат близок к установленному ранее О. А. Ладыженской (РЖМат, 1960, 1681).

О. В. Гусева

6486. Системы типа Ковалевской. Мидзохата (Systèmes Kowalewskiens. Mizohata Sigeru), Ann. Inst. Fourier, 1957, **7**, 283—292 (франц.)

Шварц показал, что системы типа Ковалевской с коэффициентами, не зависящими от t, для которых однородная задача Коши равномерно корректно поставлена на $(\overrightarrow{a, b})$ пространства (φ'), обладают свойством конечной скорости распространения возмущений. В настоящей заметке этот результат распространяется на случай коэффициентов, зависящих от (x, t).

1. Рассматривается матричная система первого порядка

$$\frac{d}{dt}U = \sum_{k=1}^{n} A_k(x, t)\frac{\partial U}{\partial x_k} + B(x, t)U, \qquad (1)$$

где A_k и B — аналитические и ограниченные по x функции, непрерывные по t со значениями в $H(E_x^{0'}) : E_x^0$ — пространство непрерывных функций с топологией равномерной сходимости на каждом компакте; $E_x^{0'}$ — пространство мер с компактным носителем; $H(E_x^{0'})$ имеет топологию, полученную преобразованием Фурье из слабой топологии на $E_x^{0'}$. Преобразованием Фурье по x получим систему, эквивалентную (1):

$$\frac{d}{dt}U = \sum_{k=1}^{n} \mu_k * 2\pi i y_k U + \nu * U. \qquad (2)$$

Предложение. 1. 1. Система (1) имеет не более одного ограниченного решения для данного начального условия.

Предложение 1. 2. Система (2) имеет не более одного решения экспоненциального растущего распределения для данного начального условия. Достаточно доказать второе из этих предложений. Доказательство проводится методом построения мажорирующего уравнения.

Предложение 1. 3. Если U есть ограниченное решение (1) и $U(t_0) \in E'$, то $U \in E'$ для всех t и дифференцируемо по t со значениями в E'.

Следствие. Если задача Коши корректна в φ', то она корректна и в E'.

2. Пусть теперь $A_k(x, t)$, $B(x, t)$ — аналитические по x функции, непрерывные по t со значениями в $a(D_\varepsilon)$ в пространстве аналитических функций $a(z)$, определенных на $D_\varepsilon (z = x + ix', x \in R^n, |x'| < \varepsilon)$ с нормой $\|a(z)\|^\varepsilon = \sup_{z \in D_\varepsilon} |a(z)|$.

Лемма 2. Пусть

$$\|A_k(z, t)\| < M, \quad \|B(z, t)\| \leqslant M \quad \text{для } t_1 < t < t_2.$$

Тогда существуют числа $\tau, \eta (< \varepsilon)$ и β такие, что для начального условия $U_0(x) \in a(D_\varepsilon)$, заданного при $t = t_0$, существует одно и только одно решение $U(x, t)$, определенное для $|t - t_0| < \tau$, $t_0 < t < t_1$, непрерывно дифференцируемое по t со значениями в $a(D_\eta)$, и при этом $|U(x, t)| < \beta \sup_{|\zeta - x| < \varepsilon} |U_0(\zeta)|$, $x \in R^n$, $|t - t_0| < \tau$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$; τ, η и β не зависят от t_0.

Предложение 2. 1. Если задача Коши равномерно корректно поставлена в φ', то она равномерно корректна и в E'. Метод доказательства близок к методу первой части работы.

А. Л. Крылов

6487. О решении задачи Дарбу для уравнения $s = f(x, y, z)$. Гульельмино (Sulla risoluzione del problema di Darboux per l'equazione $s = f(x, y, z)$. Guglielmino Francesco), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 3, 308—318 (итал.; рез. англ.)

Вместо задачи Дарбу рассматривается интегральное уравнение

$$z(x, y) = \sigma(x) + \tau(y) - z_0 + \int_0^x \int_0^y f(\xi, \eta, z(\xi, \eta))\,d\xi d\eta, \qquad (1)$$

где $\sigma(x)$, $\tau(y)$ — известные непрерывные функции в интервалах $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, причем $\sigma(0) = \tau(0) = z_0$. В работе доказывается теорема существования решения уравнения (1) в области $R\,(0 \leqslant x \leqslant a;\ 0 \leqslant y \leqslant b)$, если данная функция $f(x, y, z)$ в области $S(0 \leqslant x \leqslant a;\ 0 \leqslant y \leqslant b;\ -\infty < z < +\infty)$ непрерывна относительно z удовлетворяет неравенству $|f(x, y, z)| \leqslant M(x, y, |z|)$, где $M(x, y, u)$ — неубывающая функция относительно u; кроме того, существует по крайней мере одна функция $\tilde{u}(x, y)$ в области R, удовлетворяющая соотношению

$$\tilde{u}(x, y) \geqslant |\sigma(x) + \tau(y) - z_0| + \int_0^x \int_0^y M(\xi, \eta, \tilde{u}(\xi, \eta))\,d\xi d\eta.$$

В работе также доказывается теорема единственности при условии, если для любых двух точек (x, y, z_1), (x, y, z_2), из S функция $f(x, y, z)$ удовлетворяет неравенству $|f(x, y, z_1) - f(x, y, z_2)| \leqslant \psi(x, y, |z_1 - z_2|)$, причем интегральное уравнение

$$u(x, y) = \int_0^x \int_0^y \psi(\xi, \eta, u(\xi, \eta))\,d\xi d\eta$$

в четырехугольнике $(0 \leqslant x \leqslant \alpha \leqslant a;\ 0 \leqslant y \leqslant b)$ имеет только нулевое решение.

Е. И. Ким

6488. О проблеме Шмидт, касающееся уравнения $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Бельецкий, Кисынский (Sur un probième de Mlle Z. Szmydt relatif à l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$. Bielecki A., Kisyński J.), Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron., et phys., 1958, **6**, № 5, 321—325, XXV (франц.; рез. русск.)

Автор доказывает существование решения уравнения

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad (1)$$

определенного в области $|x| \leqslant \alpha$, $|y| \leqslant \beta\ (\alpha > 0, \beta > 0)$, удовлетворяющего граничным условиям:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = G\left(x, z, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{для } |x| \leqslant \alpha,\ y = g(x),$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = H\left(y, z, \frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{для } |y| \leqslant \beta,\ x = h(y), \qquad (2)$$

при некоторых предположениях относительно функций, которые входят в уравнение (1) и условия (2). Подобная проблема при иных условиях на функции G и H была поставлена и решена Шмидтом (РЖМат, 1958, 6760).

M. Krzyżański

6489. Нелокальная проблема существования решения линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка. Плись (The problem

of non-local existence for solutions of a linear partial differential equation of the first order. Pliś A.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 2, 271—293 (англ.)

В плоской области D рассматривается уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad (1)$$

где $Q(x, y)$ — функция класса C^1. Важевский (Ważewski T., Mathe matica, 1934, 8, 103—116) построил пример уравнения вида (1), не имеющего, кроме $z = \text{const}$, решений класса C^1, определенных во всей (односвязной) области D. В реферируемой статье доказано, что в односвязной области любое уравнение вида (1) имеет решения, отличные от тождественной постоянной и обладающие в каждой точке полным дифференциалом. Несколько более слабый результат получен для многосвязных областей. Отмечается, что для уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial x} + Q_1(x, y_1, y_2)\frac{\partial z}{\partial y_1} + Q_2(x, y_1, y_2)\frac{\partial z}{\partial y_2} = 0 \qquad (2)$$

аналогичный результат не имеет места: существуют уравнения вида (2), для которых единственными решениями, обладающими в каждой точке области полным дифференциалом, служат $z = \text{const}$. М. З. Соломяк

6490. Принцип упорядочения и обобщенные решения некоторых квазилинейных уравнений с частными производными. Дуглис (An ordering principle and generalized solutions of certain quasi-linear partial differential equations. Douglis Avron), Communs Pure and Appl. Math., 1959, 12, № 1, 87—112 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$u_t + (F(u))_x = 0 \qquad (1)$$

с выпуклой $F(u)$, обладающей непрерывной возрастающей производной, при начальных условиях $u(x, 0) = \bar{u}(x)$. Обобщенным решением (1), при строго выпуклой $F(u)$ (F'' существует почти всюду, ограничена, интегрируема и $F'' \geqslant a > 0$), называется ограниченная при $t \geqslant 0$ функция u, удовлетворяющая соотношению $\oint -u\,dx + F(u)\,dt = 0$ вдоль любого кусочно-гладкого замкнутого контура и соотношению

$$u(x + h, t) - u(x, t) \leqslant h/at \text{ для } h > 0,\ t > 0. \qquad (2)$$

Обобщенное решение нормализуется требованием $u(x, t) = u(x - 0, t)$, $t > 0$, и для него вводится „треугольник определенности" T. Если u, v — два обобщенных решения с общим T, то „принцип упорядочения" заключается в требовании, чтобы неравенство $u \leqslant v$, справедливое почти всюду на основании T, влекло $u < v$ в каждой внутренней точке T.

Теорема: Принцип упорядочения справедлив для класса ограниченных, нормализованных обобщенных решений. Из приведенной теоремы получается теорема единственности. При отказе от строгой выпуклости, (2) заменяется на $u(x - 0, t) \geqslant u(x + 0, t)$ и устанавливается теорема существования обобщенного решения. В рассмотрениях существенную роль играет изучение решений, соответствующих кусочно-постоянным начальным данным. А. А. Дезин

6491. Обобщенные решения дифференциальных уравнений первого порядка в гильбертовом пространстве. Соболевский П. Е., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 6, 994—996

Функция $x(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве H называется обобщенным решением на $[0, T]$ задачи

$$x' + A(t)x = f(t, x) \quad (0 < t \leqslant T), \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0, \qquad (2)$$

если $x(t)$ почти при всех t удовлетворяет уравнению (1), если $x(t) = x_0 + \int_0^t x'(\tau)\,d\tau$ и если $x'(t)$ и $A(t)x(t)$ принадлежат $B_2([0, T], H)$.

Вначале изучается линейное уравнение

$$x' + A(t)x = f(t). \qquad (3)$$

Теорема 1. Пусть $A(t) = A_1(t) + A_2(t)$ и положительно определенные самосопряженные операторы $A_1(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ имеют общую область определения D. Пусть оператор-функция от t $A_1(t)A_1^{-1}(0)$ имеет разрывы только первого рода (свойство а)). Пусть $D \subset D(A_2(t))$ и функция $A_2(t)x$ при $x \in D$ сильно измерима и

$$\|A_2(t)x\| \leqslant \delta \|A_1(t)x\| + C\|x\| \quad (0 \leqslant \delta < 1,\ C \geqslant 0). \qquad (4)$$

Тогда при $f(t) \in B_2([0, T], H)$ и $x_0 \in D(A^{1/2}(0))$ существует единственное обобщенное решение $x(t)$ задачи (2)—(3). Функция $A_1^{1/2}(0)x(t)$ при этом непрерывна. Через $U(t, s)x_0$ обозначается решение однородного уравнения, удовлетворяющее начальному условию $U(s, s)x_0 = x_0$; предполагаеся, что $A(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, причем $A_2(t) \equiv 0$. Указываются различные оценки для оператора $U(t, s)$ (теоремы 2 и 6), из которых отметим неравенство

$$\|A^{\beta}(t)U(t, s)A^{-\alpha}(s)\| \leqslant \frac{K_{\alpha\beta}}{|t - s|^{\beta - \alpha}},$$

справедливое при любых $0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1$ в случае, если $A(t)A^{-1}(0)$ имеет ограниченную вариацию (свойство б)), и при любых $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta < 1 + \varepsilon$, $\alpha \leqslant \beta$ в случае, когда $A(t)A^{-1}(0)$ удовлетворяет условию $\mathrm{Lip}\,\varepsilon$ (свойство с)).

Изучается оператор

$$Qf(t) = \int_0^t U(t, s)f(s)\,ds. \qquad (5)$$

Обобщенные решения задачи (3)—(2) представимы формулой $x(t) = U(t, 0)x_0 + Qf(t)$ (теорема 3). Указаны оценки (теорема 4), которые детально характеризуют свойства оператора Q. Задача (1)—(2) заменяется по обычной схеме изучения уравнения

$$x(t) = U(t, 0)x_0 + Qf[t, x(t)]. \qquad (6)$$

Оказывается, что $x(t)$ является обобщенным решением задачи (1)—(2) в том и только том случае, когда $x(t)$ является решением уравнения (6) и $f[t, x(t)] \in B_2([0, T], H)$. С помощью принципа Шаудера найдены различные достаточные условия существования обобщенных решений задачи (1)—(2) (теоремы 5 и 7). М. А. Красносельский

6492. Оценка области существования интеграла инволютивной системы уравнений в частных производных первого порядка. Павельский (Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'un système involutif d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. Pawelski W.), Ann. polon. math., 1955, 2, № 1, 29—36 (франц.)

Рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial t_\alpha} + H_\alpha(t_\beta, x_l, q_l, z) = 0 \qquad (1)$$

$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m;\ i = 1, \ldots, n)$ со следующим условием совместности:

$$\frac{\partial H_\beta}{\partial t_\alpha} - H_\alpha\frac{\partial H_\beta}{\partial z} - \frac{\partial H_\alpha}{\partial t_\beta} + H_\beta\frac{\partial H_\alpha}{\partial z} + \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}\left(\frac{\partial H_\beta}{\partial x_i} + q_l\frac{\partial H_\beta}{\partial z}\right) - \frac{\partial H_\beta}{\partial q_l}\left(\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i} + q_l\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\right)\right\} \equiv 0,$$

где $q_l \equiv \dfrac{\partial z}{\partial x_l}$ $(i = 1, \ldots, n)$. Функции H_α дважды непрерывно дифференцируемы по t_α, x_l, q_l, z в кубе

$r: |t_\alpha - t_\alpha^0| \leqslant c$, $|x_i - x_i^0| \leqslant c$, $|z - z_0| \leqslant c$, $|q_i - q_i^0| \leqslant c$ и $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая функция в кубе $r_1: |x_i - x_i^0| \leqslant c$, для которой $|\omega(x_i^0) - z_0| < \frac{c}{4}$, $|\omega_{x_i}(x_i^0) - q_i^0| < \frac{c}{4}$. В этих предположениях система (1) имеет единственный интеграл $z(t_\alpha, x_i)$, непрерывно дифференцируемый в области $R: |t_\alpha - t_\alpha^0| < \rho_0$, $|x_i - x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)} - M\sum_{\alpha=1}^{m} |t_\alpha - t_\alpha^0|$, где

$$\rho_0 = \min\left\{\delta, \frac{1}{m}, \rho_1\right\}, \quad \delta = \frac{c^2}{[(n+1)(M+c+1)]^5},$$

$$\rho_1 = \frac{c}{4n(M+1)Mm},$$

который совпадает с функцией $\omega(x_1, \ldots, x_n)$ в области $\left\{t_\alpha = t_\alpha^0, |x_i - x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)}\right\}$; здесь M — положительное число такое, что

$$|H_\alpha|, \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial z}\right|, \left|\frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial z^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial q_i \partial q_j}\right|,$$
$$\left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i \partial z}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial z \partial q_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 H_\alpha}{\partial x_i \partial q_j}\right| < M$$

в кубе r, $\left|\frac{\partial \omega}{\partial x_i}\right|, \left|\frac{\partial^2 \omega}{\partial x_i \partial x_j}\right| < M$ в кубе r_1, $|q_i^0| < M$. Доказательство состоит из трех частей.

В первой части с помощью преобразования $T\{t_\alpha = t_\alpha^0 + t\mu_\alpha\}$ нахождение интеграла системы (1) сводится к изучению уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial t} + F\left(t, \mu_\alpha, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right) = 0, \qquad (2)$$

где F выражается через H_α. Уравнение (2) зависит от μ_α, как от параметров. При некоторых предположениях на F, являющихся следствием предположений на H_α в теореме, уравнение (2) имеет единственный интеграл $z(t, x_i, \mu_\alpha)$, непрерывно дифференцируемый в области $0 \leqslant t \leqslant 1$, $|x_i - x_i^0| < \frac{c}{4n(M+1)} - \left(M\sum_{\alpha=1}^{m} |\mu_\alpha|\right)t$, $|\mu_\alpha| < \rho_0$, который в области $\left\{t=0, |x_i - x_i^0| \leqslant \frac{c}{4n(M+1)}\right\}$ совпадает с функцией $\omega(x_1, \ldots, x_n)$.

Во второй части приводится классический метод нахождения интеграла $z(t, x_i, \mu_\alpha)$ уравнения (2). В третьей части доказывается, что совокупность интегралов уравнения (2), проходящих через точку $t = 0$, $x_i^* = v_i$, $q_i^* = \frac{\partial \omega(v_1, \ldots, v_n)}{\partial v_i}$, $z^* = \omega$, является совокупностью интегралов для уравнения

$$\frac{\partial z}{\partial \mu_\alpha} + tH_\alpha\left(t_\beta^0 + t\mu_\beta, x_i, \frac{\partial z}{\partial x_i}, z\right) = 0, \qquad (3)$$

что позволяет утверждать, что интеграл $z(t, x_i, \mu_\alpha)$ уравнения (2) удовлетворяет уравнению (3) в своей области существования. Отсюда следует, что $z(1, x_i, t_\alpha - t_\alpha^0)$ является решением системы (1). Это решение удовлетворяет начальным условиям и является единственным.

В. Ф. Осипов

6493. Об уравнениях с частными производными первого порядка. Неванлинна (Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nevanlinna Rolf), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 22, 1953—1954 (франц.)

Пусть L_x^m, L_y^n — конечномерные линейные нормированные пространства, размерности m и n соответственно. Обозначим через $f(x, y)$ оператор, действующий из $L_x^m \times L_y^n$ в L_y^n, определенный для $|x - x_0| \leqslant r_x$, $|y - y_0| \leqslant r_y$, и через $f(x, y)\,dx$ — образ вектора $dx \in L_x^m$ в L_y^n. Можно рассмотреть уравнение $dy = f(x, y)\,dx$, где dy — дифференциал Фреше искомой функции $y(x)$. В дальнейшем изучается частный случай

$$dy = f(x)\,dxy, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — непрерывная вектор-функция и правая часть билинейна по dx и y. Положив $y(x_1) = y_1$ и интегрируя (1) вдоль прямой l, соединяющей x_1, x_2, получим $y_2 = T_l y_1$, где T_l — автоморфизм L_y^n, удовлетворяющий соотношениям $T_{l_1 l_2} = T_{l_1} T_{l_2}$; $T_{ll_{-1}} = T_{l_{-1}l} = 1$. Таким образом может быть установлена связь между линейными однородными уравнениями в частных производных и полугруппами автоморфизмов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Что касается уравнения (1), то оно разрешимо тогда и только тогда, когда для соответствующего T выполняется условие:

$$T_\gamma = 1 \qquad (2)$$

для любого замкнутого контура γ в шаре $|x - x_0| < r_x$.

Примечание референта. Определение f, даваемое автором в первых строках, противоречит дальнейшим рассмотрениям. А. А. Дезин

6494. Применение принципа Гурса в теории уравнений с частными производными первого порядка. Неванлинна (Application d'un principe de E. Goursat dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Nevanlinna Rolf), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 23, 2087—2090 (франц.)

Условия ( ) предыдущего референта с помощью приема, принадлежащего Гурса, заменяются дифференциальными. Указывается, что уравнение (1) (реф. 6493) можно трактовать как определение параллелизма в дифференцируемом многообразии V^m. Тогда условия (2) переходят в классические условия интегрируемости.

А. А. Дезин

6495. Об одной теореме вложения. Смолицкий Х. Л., Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 7, 32—40 (рез. англ.)

Пусть Ω — конечная область n-мерного ($n \geqslant 2$) евклидова пространства, звездная относительно некоторого шара, или конечная сумма таких областей. Пусть, далее, $l \geqslant 0$ — целое число, $0 < \alpha \leqslant 1$, $p \geqslant 1$, $0 \leqslant k < n$. Положим

$$\|u\|_{N(l,k,p)} = \left\{\sup_{x\in\Omega} \int_\Omega r^{-k} \sum |D^l u(y)|^p dy + \int_\Omega |u(y)|^p dy\right\}^{\frac{1}{p}} \quad (l \geqslant 1),$$

$$\|u\|_{l+\alpha} = \sup_{x,y\in\Omega} (|D^l u(x) - D^l u(y)| r^{-\alpha}) + \sum_{0<m<l} \sup_{x\in\Omega} |D^m u(x)| \quad (r = |x - y|).$$

С помощью интегрального тождества С. Л. Соболева устанавливаются неравенства

$$\| u \|_{s+\alpha} \leqslant K \| u \|_{N(l,k,p)}, \quad (1)$$

где $s = l - \left[\frac{n-k}{p}\right] - 1$, $\alpha = 1 - \frac{n-k}{p} + \left[\frac{n-k}{p}\right]$ и $l > \frac{n-k}{p} \neq$ целому числу, и

$$\left\{\sup_{x \in \Omega_j} \int_{\Omega_j} | D^m u(y) |^q r^{-\varkappa} dy\right\}^{\frac{1}{q}} \leqslant K \| u \|_{N(l,k,p)}, \quad (2)$$

где $l \leqslant \frac{n-k}{p}$, $k < \varkappa < j \leqslant n$, $0 \leqslant n - k - p(l-m) < j - \varkappa$, $1 \leqslant q < p \frac{j-\varkappa}{n-k-p(l-m)}$ и Ω_j — j-мерное сечение области Ω. Неравенство (1) было получено ранее Ниренбергом (РЖМат, 1958, 1202) для областей, подчиненных более строгими ограничениями.

Л. Н. Слободецкий

6496. О теореме Гарнака. Адамар (Sur le théorème de A. Harnack. Hadamard Jacques), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1957, 3, № 3-4, 1—6 (франц.; рез. русск., рум.)

Дается простое доказательство теоремы Гарнака для функций — решений общего эллиптического уравнения второго порядка. При доказательстве используется решение задачи Дирихле методом интегральных уравнений.

А. А. Дезин

6497. Некоторые замечания о наилучшем приближении дифференциальных уравнений полиномами. Зуховицкий С. И., Эскин Г. И., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 6, 1158—1160

Рассматривается построение приближенного решения системы дифференциальных уравнений $Lu = f$, $u = (u_1, \ldots, u_n) = f = (f_1, \ldots, f_n)$ с некоторыми граничными условиями $lu |_\Gamma = \psi$ в форме полинома $u_m = \sum_{k=1}^m \xi_k \varphi_k$, для которого достигается

$$\rho_m = \inf_\zeta \max \left\{ \max_{\overline{G}} \left| \sum_{k=1}^m \xi_k L\varphi_k - f \right|, \right.$$

$$\left. \max_\Gamma \left| \sum_{k=1}^m \xi_k l\varphi_k - \psi \right| \right\}.$$

Полученная задача чебышевского приближения непрерывной на компакте функции полиномом с помощью выбора сетки на G и Γ сводится к наилучшему приближению системы несовместных линейных уравнений.

Показывается на примерах задачи Дирихле для уравнения Лапласа, первой краевой задачи для бигармонического уравнения (плоский случай) и краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (в случае, когда существует функция Грина в собственном смысле), что указанный метод дает равномерную сходимость.

В. С. Виноградов

6498. Непрерывность решений параболических и эллиптических уравнений. Наш (Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. Nash J.), Amer. J. Math., 1958, **80**, № 4, 931—954 (англ.)

Статья посвящена подробному изложению метода, позволяющего получить важные априорные оценки любого ограниченного решения уравнений

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[C_{ij}(x_1, \ldots, x_n, t) \frac{\partial T}{\partial x_j}\right];$$

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left[C_{ij}(x_1, \ldots, x_n, t) \frac{\partial T}{\partial x_j}\right] = 0. \quad (1)$$

Окончательные результаты были раньше опубликованы автором (РЖМат, 1959, 403). Для получения оценок любого ограниченного решения параболического уравнения (1) вначале автор находит априорную оценку фундаментального решения (ф. р.) этого уравнения $S(x, t, 0, 0) = T(x, t)$, его момента $M = \int |x| T dx$, „энтропии" $Q = -\int T \ln T dx$ и функции $G(x, t) = \int e^{-|\xi|^2} \ln(U + \delta) d\xi$; $U = t^{n/2} T(t^{1/2}\xi, t)$, позволяющей оценить поведение в окрестности источника; затем производится оценка разности ф. р., соответствующих двум источникам; все это позволяет получить оценки ф. р., из которых следует такая оценка для любых решений $|u(x, t)| \leqslant B$ уравнения (1)

$$|u(x_1, t_1) - u(x_2, t_2)| \leqslant BA\left[\left(\frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{t_1 - t_0}}\right)^\alpha + \left(\frac{t_2 - t_1}{t_1 - t_0}\right)^{\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}}\right], \quad (2)$$

где A, α зависят от n, $c_2 \geqslant c_1 > 0$ (c_1, c_2 — константы, ограничивающие снизу и сверху собственные значения матрицы $\| C_{ij} \|$). Из оценок (2) получается априорная оценка для решений равномерно эллиптического уравнения (1).

В дополнение к основному тексту работы устанавливается следующая двухсторонняя априорная оценка ф. р.

$$k_1 (t_2 - t_1)^{-n/2} \exp\left\{-k_2 \left(\frac{|x_2 - x_1|}{(t_2 - t_1)^{1/2}}\right)^{2+\varepsilon}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant S(x_2, t_2, x_1, t_1) \leqslant k (t_2 - t_1)^{-n/2} \exp\{-k|x_1 - x_2| \times$$

$$\times (t_2 - t_1)^{1/2} \ln(k |x_1 - x_2| (t_2 - t_1)^{1/2})\},$$

k_1 и k_2 зависят от ε, n, c_1, c_2. Показывается, как оценить характер решений 1 краевой задачи для эллиптического уравнения (1) в окрестности границы, а также получить неравенство типа неравенства Гарнака для решений параболических и эллиптических уравнений.

С. Д. Эйдельман

6499. Теорема сравнения для эллиптических уравнений. Протер (A comparison theorem for elliptic equations. Protter M. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 296—299 (англ.)

Внутри плоской ограниченной области D с границей Γ рассматриваются два линейных эллиптических дифференциальных уравнения

$$L_1 u = (au_x)_x + (bu_x)_y + (bu_y)_x + (cu_y)_y + 2du_x + 2eu_y + fu = 0 \quad (1)$$

$$L_2 v = (\alpha v_x)_x + (\beta v_x)_y + (\beta v_y)_x + (\gamma v_y)_y + 2\delta v_x + 2\varepsilon v_y + Fv = 0. \quad (2)$$

Пусть ξ и η определяются из системы равенств

$$(a\beta - b\alpha)\eta + (c\alpha - b\beta)\xi = -\delta(ac - b^2),$$

$$(a\gamma - b\beta)\eta + (c\beta - b\gamma)\xi = -\varepsilon(ac - b^2).$$

Доказывается следующее утверждение: Если коэффициенты рассматриваемых уравнений удовлетворяют неравенствам

$$a > \alpha,\ (a-\alpha)(c-\gamma) - (b-\beta)^2 \geqslant 0,$$
$$(ac-b^2)(F-f-\xi_x-\eta_y+d_x+e_y) -$$
$$-(a\eta^2 - 2b\xi\eta + c\xi^2) \geqslant 0$$

и если существует неотрицательное, отличное от тождественного нуля, решение уравнения (1), обращающееся в нуль на Γ, то любое решение уравнения (2) должно иметь нуль в $D+\Gamma$.

Автор отмечает, что аналогичный результат может быть получен для любого числа независимых переменных. Указывается также, что для уравнений самосопряженного вида второго порядка с любым числом независимых переменных этот результат был получен ранее Хартманом и Винтнером (РЖМат, 1957, 3996).

А. И. Кошелев

6500. Об отображениях, соответствующих решениям уравнений эллиптического типа. Данилюк И. И., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 1, 17—20

Показывается, что любая система уравнений 1-го порядка эллиптического типа с двумя неизвестными на плоскости, в частности система

$$u_x - v_y = au + bv,\quad u_y + v_x = cu + dv \qquad (1)$$

с аналитическими коэффициентами в односвязной области G, допускает решение $f = u + iv$, осуществляющее внутреннее отображение области G. Аналогичное утверждение имеется для уравнения 2-го порядка. Кроме того, указывается геометрическое объяснение возникновения „складок" при отображениях, осуществляемых любыми решениями системы (1). Б. В. Боярский

6501. О свойстве гармонических функций. Манн (On a property of harmonic functions. Mann H. B.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 5, 414 (англ.)

Для произвольной гармонической в окрестности точки (x, y) функции $f(x, y)$ рассматривается полином n-й степени $(D_x h + D_y k)^n f(x, y) \equiv \varphi_n(h, k)$ относительно вещественных чисел h и k.

Доказывается, что $\varphi_n(h, k)$ — либо неопределенная форма, либо тождественный нуль. В качестве следствия получается известный результат, что гармоническая функция не может иметь максимума или минимума внутри области ее определения. О. В. Гусева

6502. Существование и однозначность задачи Дирихле на областях общего вида. Бабушка, Выборный (Die Existenz und Eindeutigkeit der Dirichletschen Aufgabe auf allgemeinen Gebieten. Babuška Ivo, Výborný Rudolf), Чехосл. матем. ж., 1959, **9**, № 1, 130—153 (нем., рез. русск.)

Пусть G — открытое не пустое множество трехмерного евклидова пространства E_3, причем его граница $\dot{G}$ не предполагается ограниченной. Пусть f — непрерывная на $\dot{G}$ функция. Функция $u(x)$ $(x \in G)$ называется обобщенным решением задачи Дирихле для G и f, если $u(x)$ гармоническая в G и для каждой регулярной точки $y \in \dot{G}$ имеет место $\lim\limits_{x \to y} u(x) = f(y)$ (регулярность — наличие барьера). Пусть φ и ψ суб- и супергармонические функции в G, непрерывные в $\bar{G} = G + \dot{G}$, такие что на $\dot{G}$ $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$. Доказывается существование хотя бы одного обобщенного решения $u(x)$ для которого $\varphi \leqslant u \leqslant \psi$ в G, и существование среди этих решений наибольшего и наименьшего $\overline{W}$ и $\underline{W}$. Непрерывная в G супергармоническая (субгармоническая) функция $\Phi(x)$ называется верхней (нижней), если для $y \in \dot{G}$ $\varliminf\limits_{x \to y} \Phi(x) \geqslant f(y)$, $\left(\varlimsup\limits_{x \to y} \Phi(x) \leqslant f(y)\right)$. Устанавливается, что $\underline{W}$ есть нижняя граница всех верхних функций, для которых $\Phi(x) \geqslant \varphi(x)$, и если множество M всех нерегулярных точек $y \in \dot{G}$ замкнуто, и $\mathfrak{M}$ есть множество всех $\Phi(x)$, непрерывных в $\bar{G} = G + \dot{G}$, то $\underline{W} = \inf \Phi(x)$ $(\Phi \in \mathfrak{M})$.

Область G называется нормальной, если для любой ограниченной на $\dot{G}$ функции f существует не более одного обобщенного ограниченного решения задачи Дирихле. Пусть $\lambda > 1$ и K_n есть шар $|x| < \lambda^n$, $A_n = (E_3 - K_n) \cap G$, $W(1, A_n)$ обобщенное (в смысле Винера) решение задачи Дирихле для A_n со значением L на A_n. Функции $W(1, A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ в G образуют неубывающую ограниченную последовательность и пусть $W_1(x)$ — ее предел. Доказывается, что область G нормальна тогда и только тогда, когда $W_1(x) \equiv 1$. Указываются и другие признаки нормальности G, связанные с емкостью множества l_n точек $x \in E_3 - G$, для которых $\lambda^{n-1} \leqslant |x| < \lambda^n$. В последнем разделе работы $\dot{G}$ предполагается ограниченной и f непрерывной, за возможным исключением некоторой точки $z \in \dot{G}$, в окрестности которой $|f(y)| \leqslant O\left(\frac{1}{|y-z|}\right)$. Функция $u(x)$, гармоническая в G (равная нулю на бесконечности в случае неограниченной G), обращающаяся в $f(y)$ для регулярных точек $y \in G$, $(y \neq z)$ и такая, что $|u(x)| < \frac{c}{|x-z|}$ для $x \in G$, называется решением задачи D. Доказывается, что задача D однозначно разрешима тогда и только тогда, когда z — регулярная точка границы.

Пусть $z_1, \ldots, z_k \in \dot{G}$ — регулярные точки границы и гармоническая в G функция $u(x)$ такова, что $|u(x)| < C \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{|x-z_i|}$ и $\lim\limits_{x \to y} n(x) \leqslant 0$ для всякой регулярной $y \in \dot{G}$. Доказывается, что $u(x) \leqslant 0$ в G $(u(x) \to 0$ для $|x| \to \infty$ в случае неограниченной $G)$.

В статье имеется ряд других теорем, имеющих самостоятельный интерес. Отмечается, что все результаты легко переносятся с трехмерного пространства на пространство E_k $(k \geqslant 3)$. Некоторые теоремы верны и для $k = 2$. Х. Л. Смолицкий

6503. Об операторах типа потенциала и некоторых теоремах вложения. Глушко В. П., Докл. АН СССР, 1959, **126**, № 3, 467—470

Рассматриваются функции $\varphi(Q)$, определенные в некоторой области Ω n-мерного пространства R_n; Ω_s означает пересечение Ω с подпространством s измерений $R_s: x_{s+1} = \ldots = x_n = 0$ (для $s = n$ $\Omega_s = \Omega$). Пусть $M, P, Q \in R_n$ и r, r_1, r_2 означают расстояния PQ, MQ, MP. Пусть p, k — постоянные, $p > 1$. Для функций, определенных в Ω_s, вводятся нормы (M — фиксированная точка)

$$\|\varphi\|_{L^s_{p,k,M}} = \left\{\int_\Omega |\varphi(Q)|^p r_1^{-kp} dQ\right\}^{1/p},$$

$$\|\varphi\|_{L^s_{p,k}} = \operatorname*{vrai\,sup}_{M \in \Omega} \|\varphi\|_{L^s_{p,k,M}}$$

Рассматривается оператор $A_\lambda \varphi$ $A_\lambda \varphi(p) = \int_\Omega \varphi(Q) r^{-\lambda} dQ$, переводящий функции, заданные в Ω, в функции, определенные в Ω_s.

Теорема 1. Если k, s таковы, что $-n/p' < k < s/p$, $(1/p + 1/p' = 1)$, $n/p' + k < \lambda < n/p' + s/p$, то $A_\lambda \varphi$ есть ограниченный оператор на $L^n_{p,k,M}$ в $L^{(s)}_{q,h,M}$, где h и q таковы:

$$k < h \leqslant k + n/p' + s/p - \lambda,\quad q = \frac{sp}{n-(n-\lambda-h+k)p}. \qquad (1)$$

При этом имеет место неравенство (ограниченность A_λ)

$$\|A_\lambda \varphi\|_{L^s_{q,h,M}} \leqslant K_1 \|\varphi\|_{L^n_{p,k}} \qquad (2)$$

(K_1 не зависит от Ω и M). В силу независимости K_1 от M $A_\lambda\varphi$ ограничен так же, как оператор из $L^n_{p,k}$ в $L^s_{q,h}$. Если область Ω ограничена, то имеет место (2) также в случае $h=k$ с заменой q на $q_1<q$.

Теорема 2. Пусть $0<k<{}^s/_p$. а) Если ${}^n/_{p'}+k<\lambda<{}^n/_{p'}+{}^s/_p$, то A_λ ограничен из $L^n_{p,k}$ в $L^s_{q,h}$, где h из промежутка $k[n-(n-\lambda+k)p](s-kp)^{-1}<h\leqslant k$, q из (1). б) Если $\lambda={}^n/_{p'}+k$ и область Ω ограничена, то A_λ ограничен из $L^n_{p,k}$ в $L^s_{q,h}$ при любых $h>0$, $p\leqslant q<{}^s/_h$.

Совокупность всех суммируемых в Ω функций, все обобщенные производные порядка l которых принадлежат $L^n_{p,k,M}\left(L^n_{p,k}\right)$, образуют пространства $W^{(l)}_{p,k,M}\left(W^{(l)}_{p,k}\right)$.

Пусть $\overset{0}{W}{}^{(l)}_{p,k,M}\left(\overset{0}{W}{}^{(l)}_{p,k}\right)$ суть замыкания в $W^{(l)}_{p,k,M}\left(W^{(l)}_{p,k}\right)$ финитных в Ω функций.

Имеет место теорема 3: Пусть m — целое $\geqslant 0$ таково, что $l+k-{}^n/_p<m<l-(n-s)/p$; а) Если $-{}^n/_{p'}<k<{}^s/_p$ и $\varphi\in\overset{0}{W}{}^{(l)}_{p,k}\left(\overset{0}{W}{}^{(l)}_{p,k}\right)$, то производные порядка m функции φ принадлежат $L^s_{q,h,M}\left(L^s_{q,h}\right)$, где q и h таковы:

$$q=\frac{sp}{n-(l+k-m-h)}, \tag{3}$$

$k<h<l+k-m-\dfrac{n-s}{p}$; б) Если $0<k<\dfrac{s}{p}$, $\varphi\in\overset{0}{W}{}^{(l)}_{p,k}$, то производные порядка m функции φ принадлежат $L^s_{q,h}$, где h из промежутка $k[n-(l-m+k)p](s-kp)^{-1}<h\leqslant k$ и q из (3). Х. Л. Смолицкий

6504. Краевые задачи и биортогональные разложения в банаховых пространствах. Крылов А. Л., Докл. АН СССР, 1958, **119**, № 5, 865—867

Дано представление пространства $L_p(\Omega)$ вектор-функций с m компонентами из $L_p(\Omega)$, где Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства с гладкой границей S, в виде суммы:

$$L_p=\Psi^0_p+U_p+Z_p. \tag{1}$$

Здесь Ψ^0_p состоит из вектор-функций ψ, для которых $\operatorname{div}\psi=0$ и $(\psi,n)|_S=0$ (n — нормаль к S); U_p состоит из градиентов гармонических функций; Z_p состоит из градиентов функций, обращающихся в нуль на S (граничные условия понимаются в обобщенном смысле). Пространства Ψ^0_p; U_p, Z_p и $\Psi^0_{p'}$, $U_{p'}$, $Z_{p'}$ биортогональны при $1/p+1/p'=1$. Представление (1) получается как следствие формул, дающих решения задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа; принадлежность этих решений нужным пространствам устанавливается с помощью теоремы Кальдерона — Зигмунда о сингулярных интегралах. Как отмечается в работе, для случая $p=2$ представление вида (1) было получено ранее М. И. Вишиком (Матем. сб., 1949, **25** (67), № 2, 189—234).

А. С. Калашников

6505. О непрерывности обобщенного потенциала. Нодзаки (Nozaki Yasuo), Сибаура когё дайгаку кэнкю хококу, Res. Repts Shibaura Inst. Technol., 1957, № 4, 79—82 (японск.; рез. англ.)

В статье (РЖМат, 1958, 1206) Цудзи доказывает теорему для случая объемного ньютонова потенциала $\lim\limits_{\sigma\to 0}u_{\sigma,\rho}(P_0)=u_\rho(P_0)$. В реферируемой статье доказывается та же самая теорема в случае обобщенного объемного потенциала. Резюме автора

6506. Решение одной смешанной граничной задачи теории ньютонова потенциала для составной области. Векилов Ш. И., Физ., вә ријазијјат инст. әсәрләри. АзәрбССР Елмләр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем., АН АзербССР, 1959, **8**, 146—168 (рез. азерб.)

Пусть связная область D трехмерного пространства состоит из двух областей D_1 и D_2: D_1 ограничена непересекающимися замкнутыми поверхностями Ляпунова $\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$; $\gamma_1,\ldots,\gamma_r$; σ, из которых Γ_0 содержит внутри все остальные, внешние друг другу; D_2 ограничена σ; $\Gamma_{k+1},\ldots,\Gamma_m$; $\gamma_{r+1},\ldots,\gamma_n$, из которых σ содержит все остальные, внешние друг другу. Ставится и решается задача А: В области D найти функцию U, гармоническую в D_1 и D_2 в отдельности, принимающую заданные значения на поверхностях $\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_m$, имеющую заданные нормальные производные на поверхностях $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n$, непрерывную при переходе через σ и такую что $k_1\left(\dfrac{\partial U}{\partial n}\right)_- - k_2\left(\dfrac{\partial U}{\partial n}\right)_+$ принимает заданные значения на σ (здесь $k_1,k_2>0$ — заданные постоянные, $\left(\dfrac{\partial U}{\partial n}\right)_-$ и $\left(\dfrac{\partial U}{\partial n}\right)_+$ — производные U в направлении внутренней нормали к σ со стороны D_1 и D_2).

Решение разыскивается в виде $U=V+W+\sum_{k=1}^m\dfrac{B_k}{r_k}$, где V — потенциал простого слоя на поверхности, составленной из $\sigma,\gamma_1,\ldots,\gamma_n$; W — потенциал двойного слоя по поверхности, составленной из $\Gamma_0,\ldots,\Gamma_m$, и r_k — расстояние от некоторой точки области внутри Γ_k, $B_k=\text{const}$. Составляется и исследуется система интегральных уравнений для плотностей потенциалов V и W, и постоянные $B_1,\ldots,B_m$ подбираются из условия существования соответствующей системы интегральных уравнений.

Х. Л. Смолицкий

6507. О задаче Дирихле для эллиптических уравнений с малым параметром при старших производных. Копачек И., Успехи матем. наук, 1957, **12**, № 5, 211—220

Рассматривается задача Дирихле для общего эллиптического уравнения с любым числом независимых переменных вида

$$\varepsilon\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^n A_i(x)\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}+C(x)u_\varepsilon=F(x) \tag{1}$$

при $C(x)\leqslant -C_0<0$ с условием

$$u_\varepsilon=\varphi \tag{2}$$

на границе S области G.

Обозначим через S_1 множество точек S, где $\sum_{i=1}^n A_i n_i>0$, через S_2 множество точек S, где $\sum_{i=1}^n A_i n_i<0$, и через S_0 множество точек S, где $\sum_{i=1}^n A_i n_i=0$ ($n_1,n_2,\ldots,n_n$) — компоненты вектора внешней нормали к границе S.

Предполагается, что существует такая окрестность $D(S_1)$ множества $S_1\subset S$, что для почти всех точек P, принадлежащих $D(S_1)\cap G$, выполнено условие: интегральная кривая системы $dx_1/A_1=dx_2/A_2=\ldots=dx_n/A_n$ при продолжении пересекает границу S во внутренней точке множества $(S_0\cup S_1)$. Кроме этого, предполагается,

что $C(x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \leqslant -C_0' < 0$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant m\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2$, а коэффициенты уравнения (1), граница S и функция φ, заданная на S, достаточно гладкие. Доказано, что при $\varepsilon \to 0$ решения u_ε задачи (1), (2) сходятся слабо в $L_2(G)$ к функции $u \subset L_2(G)$, удовлетворяющей интегральному соотношению

$$\iint_G \left[\sum_{i=1}^{n} -A_i\frac{\partial f}{\partial x_i} + \left(C - \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial A_i}{\partial x_i}\right) f\right] u\,dx = \iint_G Ff\,dx + \int_{S_1} \varphi f \sum A_i \cos(n, x_i)\,d\sigma$$

для любой $f \in C^{(1)}(G)$, равной нулю на S_2.

С. Л. Каменомостская

6508. О регулярности решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Стампаккья (Contributi alla regolarizzazione delle soluzioni dei problemi al contorno per equazioni del secondo ordine ellittiche. Stampacchia Guido), Ann. Scuola normale super. Pisa, 1958, 12, № 3, 223—245 (итал.)

Пусть Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства E_m, ограниченная достаточно гладкой поверхностью. Рассматриваются основные краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка с m независимыми переменными. Точнее, ищется решение соответствующего интегрального тождества.

Приведем основной результат автора для задачи Дирихле с однородными краевыми условиями (задачи Неймана и смешанная задача рассматриваются аналогичным образом). Пусть измеримые и ограниченные в Ω функции $a_{ij}(x)$, $b_j(x)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ и $c(x)$ для любых вещественных $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и некоторых положительных ν, μ и M удовлетворяют неравенствам

$$M\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2 \geqslant \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\lambda_i\lambda_j \geqslant \mu\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^2,$$

$$4\mu c(x) - \sum_{i=1}^{m} b_i^2 \geqslant \nu > 0$$

и пусть $f_i(x) \in L_p(\Omega)$ $(i = 1, \ldots, m)$ при $p > m$. Функция $u(x) \in \overset{0}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, удовлетворяющая равенству

$$\int_\Omega \left\{\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}v + c(x)u\cdot v\right\} dx = \sum_{i=1}^{m}\int_\Omega f_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx$$

для любой $v \in \overset{0}{W}{}_2^{(1)}(\Omega)$, будет удовлетворять также неравенству

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)| \leqslant C\sum_{i=1}^{m}\|f_i\|_{L_p(\Omega)},$$

где C — постоянная, зависящая от верхней границы модуля коэффициентов $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$ $(i, j = 1, \ldots, m)$, $c(x)$, области Ω и постоянных μ, ν и M. Если же $p \geqslant \frac{2m}{m+2}$, то $u \in L_q(\Omega)$, где $\frac{1}{q} > \frac{1}{p} - \frac{2}{m}$ и имеет место неравенство $\|u\|_{L_q(\Omega)} \leqslant C\|f\|_{L_p(\Omega)}$.

А. И. Кошелев

6509. О некоторых квазилинейных смешанных задачах. Лион (Sur certains problèmes mixtes quasilinéaires. Lions Jacques-Louis), C. r. Acad. sci., 1958, 246, № 12, 1796—1799 (франц.)

Работа является продолжением работы автора (РЖМат, 1960, 1651). Приведены достаточные условия разрешимости (в обобщенном смысле) смешанной задачи для оператора вида:

$$\sum_{p,q\leqslant m}(-1)^{|p|} D^p(a_{pq}(x,t)D^q u) + \sum_{|p|\leqslant m} b_q(x,t,D_x^{2m-1}u(x,t))\times D_x^p u + D_t u \equiv Au + D_t u \qquad (1)$$

в цилиндрической области. Рассмотрена также первая краевая задача в нецилиндрической области O, $O \in (0 < t < \mu)$, для уравнения вида

$$Au + Bu + D_t u = S, \qquad (2)$$

где Au совпадает с первым слагаемым (1),

$$Bu = \sum_{|p|\leqslant m-1, q\leqslant m}(-1)^{|p|}\times D^p(b_{pq}(x,t,D_x^{m-1}u(x,t))D_x^q u);$$

A — сильно эллиптический оператор:

$$\mathrm{Re}(Au,u) + \lambda\int_0 |u(x,t)|^2\,dxdt \geqslant \alpha\|u\|_{m,0}^2,\ \alpha > 0,$$

для любых u, обращающихся вместе с производными до $(m-1)$-го порядка в нуль на границе O; $b_{p,q}(x,t,\lambda)$ непрерывны и ограничены в определенном смысле.

М. И. Вишик

6510. К теории вырождающихся эллиптических дифференциальных уравнений класса Бесселя. Капилевич М. Б., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 4, 719—722

В области $\Delta_{1/8}$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0)$ рассматривается вырождающееся эллиптическое уравнение (класса Бесселя)

$$E(k,m,n,F,u) = \Delta u + kx^{-1}u_x + my^{-1}u_y + nz^{-1}u_z + F(\tau)u = 0, \qquad (1)$$

где $0 < k < 1$, $0 < m < 1$, $0 < n < 1$, а функция $F(r)$ непрерывна в $\Delta_{1/8}$, за исключением точки $r = 0$, где

$$F(r) = b_0 r^{-1} + \sum_{s=0}^{\infty} b_{s+1} r^s.$$

Пусть $\xi = (1-k)^{k-1}x^{1-k}$, $\eta = (1-m)^{m-1}y^{1-m}$, $\zeta = (1-n)^{n-1}z^{1-n}$. Каждому решению $u^{(0)} = u(k, m, n, P)$ $P(=(x,y,z))$ уравнения (1) тогда отвечают решения того же уравнения

$$u^{(1)} = \xi u(2-k, m, n, P),\ u^{(2)} = \eta u(k, 2-m, n, P),$$
$$u^{(3)} = \zeta u(k, m, 2-n, P),\ u^{(4)} = \xi\eta u(2-k, 2-m, n, P),$$
$$u^{(5)} = \xi\zeta(2-k, m, 2-n, P)\ u^{(6)} = \eta\zeta u(k, 2-m, 2-n, P),$$
$$u^{(7)} = \xi\eta\zeta u(2-k, 2-m, 2-n, P).$$

В работе изучаются средние значения решений $u^{(s)}(s=0, 1, 2, \ldots, 7)$ по частям сфер радиуса r, лежащим в области $\Delta_{1/8}$. Вводятся функции $H_s(\theta, \varphi) = \sin^{\alpha s}\theta\cos^{\beta s}\theta\times \sin^{\gamma s}\varphi\cos^{\lambda s}\varphi$ и рассматриваются решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям: $u^{(0)}(P) \subset L_2(\Delta_{1/8})$ $u_\xi^0(0,y,z) = u_\eta^{(0)}(x,0,z) = u_\zeta^{(0)}(x,y,0) = 0$, $u(0,0,0) \neq 0$. Для

каждого $s = 0, \ldots, 7$ указываются числа α_s, β_s, γ_s, δ_s, λ_s, p_s, q_s такие, что имеет место равенство

$$r^{q_s} M(p_s, r) U_s(0) = \delta_s \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} u^{(s)}(r, \theta, \varphi) H_s(\theta, \varphi) d\theta d\varphi.$$

Здесь $U_0(0) = u^{(0)}(0)$, $U_s(0) = u_\xi^{(1)}(0)$, $U_2(0) = u_\eta^{(2)}(0)$, а $M(p_s, r)$ есть решение уравнения $rM_{rr} + p_s M_r + \tau F(r) M = 0$ подчиненное условию $M(p_s, 0) = 1$. Автор указывает, что доказанные в работе теоремы о среднем полезны при изучении вопроса о единственности сингулярных задач Дирихле — Неймана для уравнения (1).

Л. Р. Волевич

6511. О нелинейных смешанных задачах для уравнений гиперболического типа. Гольдберг В. Н., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 5, 949—952

Рассматривается смешанная задача $u_{xx} - u_{tt} + a(x, t) u_x + b(x, t) u_t + c(x, t) u = -e(x, t) - \mu F(x, t, u, u_x, u_t)$, $A_i u_x + B_i u_t + C_i u + g_i(t) + \mu f_i(t, u, u_x, u_t) = 0$ при $x = i$ $(i = 0, 1)$, $u(x, 0) = \varphi_0(x, \mu)$, $u_t(x, 0) = \varphi_1(x, \mu)$. Предполагается, что A_i, B_i, C_i — постоянные, $B_i - (-1)^i A_i \neq 0$ $(i = 0, 1)$; функции $g_i(t) \in C_1[0, 1]$; функции $f_i(t, u, u_x, u_t)$ дважды непрерывно дифференцируемы по t, u, u_x, u_t в области $G_0 = \{0 \leqslant t \leqslant 1, \ -\infty < u, u_x, u_t < \infty\}$; функция $F(x, t, u, u_x, u_t)$ дважды непрерывно дифференцируема в области $G = G_0 \times [0 \leqslant x \leqslant 1]$; коэффициенты уравнения принадлежат пространству $C_3(\overline{\Pi}_1)$, $e(x, t) \in C_1(\overline{\Pi}_1)$, $\overline{\Pi}_1 = \{0 \leqslant x \leqslant 1; \ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$; μ — параметр, $|\mu| \leqslant 1$. Сформулированы достаточные условия для существования, единственности и непрерывной зависимости от начальных данных дважды непрерывно дифференцируемого решения смешанной задачи в прямоугольнике $\overline{\Pi}_1$. Указан метод доказательства. Имеются опечатки.

В. Э. Аболина

6512. Об одном внутреннем представлении дифференциальных операторов второго порядка. Феллер (Sur une forme intrinsèque pour les opérateurs différentiels du second ordre. Feller William), Publs Inst. statist. Univ. Paris, 1957, 6, № 4, 291—301 (франц.)

Пусть I — замкнутый интервал, Ω — линейный оператор, определенный на множестве действительных функций, непрерывных на некоторой части I. Под $\mathfrak{P}(\Omega, x)$ понимается множество функций f таких, что f и Ωf непрерывны в окрестности $x \in I$, $\mathfrak{P}(\Omega, I) = \bigcap_{x \in I} \mathfrak{P}(\Omega, x)$.

Оператор Ω называется локальным, если для каждого $x \in I$ всякая функция, тождественно равная нулю в окрестности x, принадлежит $\mathfrak{P}(\Omega, I)$. Оператор Ω обладает свойством минимума, если он локальный и если $\Omega f(x) \geqslant 0$ для любой функции $f \in \mathfrak{P}(\Omega, x)$, которая в точке x достигает минимума $f(x) = 0$. Если то же самое имеет место для любой функции $f \in \mathfrak{P}(\Omega, x)$, имеющей в точке x минимум, не обязательно равный нулю, то говорят, что Ω обладает сильным свойством минимума.

Автор нашел явное представление наиболее общих операторов, обладающих свойством минимума (Illinois J. Math, 1958, 2, № 1, 1—18), которое является внутренним свойством оператора, не зависящим от параметризации интервала. Всякий дифференциальный оператор является локальным и, в частности, оператор Λ, $\Lambda f = af'' + bf' + cf$ при $a \geqslant 0$ обладает свойством минимума. Далее приводятся приложения понятия оператора, обладающего свойством минимума и сильным свойством минимума, к абстрактной задаче колебаний струны $\partial^2 u/\partial t^2 = \Omega u$, к вопросам в теории полугрупп положительных преобразований T_t (для которых из $f \geqslant 0$ следует $T_t f \geqslant 0$), к теории теплопроводности и диффузии. Среди формулируемых теорем отметим следующую:

Для того чтобы преобразования T_t полугруппы $\{T_t\}$ были положительными, необходимо и достаточно, чтобы оператор Ω, $\Omega f(x) = \lim_{t \to +0} T_t f(x)/t$, обладал свойством минимума.

В абстрактной теории теплопроводности борелевы меры μ трактуются как распределения температур на I и $\mu_t = T_t \mu$, где $\{T_t\}$ — полугруппа положительных операторов, определенных на борелевых мерах I. Имеет место общая формула $T_t \mu = \int_I \mu(dx) P(t, x; \cdot)$, которая решает абстрактную задачу теории теплопроводности, если предположить, что для каждой окрестности I_x точки $x \in I$:

$$\lim_{t \to +0} \frac{1}{t} P(t, x; I - I_x) = 0 \qquad (1)$$

(физический смысл: непрерывность потока тепла). При условии $P(t, x; I) = I$ ядро P может рассматриваться как вероятность перехода в марковском процессе; если, кроме того, выполнено условие (1), то μ является решением абстрактной теории диффузии. Условие (1) по существу эквивалентно сильному свойству минимума оператора Ω.

В заключение приводится каноническая форма оператора, обладающего свойством минимума: $\Omega = D_\varphi D_x$, где для любой возрастающей функции φ

$$D_\varphi f(x) = \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{\varphi(y) - \varphi(x)},$$

и рассматриваются частные случаи таких операторов.

В. И. Левин

6513. Об одной смешанной задаче. Харитоненко П. И., Сб. научн. тр. Белорусск. политехн. ин-та, 1957(1958), вып. 60, 34—47

Рассматривается смешанная задача

$$\partial^2 u/\partial t^2 = Lu + \alpha \partial^2 \ Lu/\partial t^2 + f(x, t), \quad \alpha > 0,$$

$$u(x, t)\,|_{t=0} = \varphi(x), \ \partial u(x, t)/\partial t\,|_{t=0} = \psi(x); \ u\,|_S = 0,$$

где $Lu = \sum_{i, j=1}^{n} \partial/\partial x_i \left(a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - a(x) u$; коэффициенты a_{ij} и a определены в конечной области $\overline{\Omega}$ изменения $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и удовлетворяют в $\overline{\Omega}$ условиям

$$a(x) \geqslant 0, \ a_{ij} = a_{ji}, \ \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \xi_j \geqslant C \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2,$$

$$C = \text{const} > 0$$

для всех вещественных ξ_i, ξ_j; свободный член $f(x, t)$ определен в цилиндре $\overline{Q}_t = \overline{\Omega} \times [0 \leqslant t \leqslant t]$, S — боковая поверхность цилиндра Q_t. Следуя О. А. Ладыженской (РЖМат, 1955, 3774), введены определения решения почти всюду и обобщенного решения поставленной смешанной задачи. Доказаны единственность обобщенного решения, методом Фурье существование обобщенного решения, решения почти всюду, классического решения и корректность постановки задачи. Указано, что разрешимость и корректность постановки смешанной задачи в случае граничных условий $\{\partial u/\partial N + hu\}_S = 0$ исследуются аналогично. Имеются опечатки.

В. Э. Аболина

6514. Об одной смешанной задаче для уравнения четвертого порядка с малым параметром при старших производных. Харитоненко П. И., Докл. АН БССР, 1959, 3, № 4, 131—135

Краткое изложение результатов предыдущей работы (реф. 6513). Замеченная неточность: на стр. 133 в формуле для общего члена суммы $u_\mu = \sum_{s=1}^{\infty} u_s$ пропущен множитель $v_s(x)$.

В. Э. Аболина

6515. Аналог второго метода Ляпунова в нелинейных краевых задачах для гиперболических уравнений. Волков Д. М., Уч. зап. ЛГУ, 1958, № 271, 90—95

Приводится более подробное изложение результатов заметки автора (РЖМат, 1959, 8042). В. М. Бабич

6516. Корректно поставленные задачи для линейного ультрагиперболического уравнения в частных производных. Бюро (Problèmes correctement posés pour une équation linéaire aux dérivées partielles ultrahyperbolique. Bureau Florent), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 10, 1469—1470 (франц.)

Рассмотрена задача:

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 u}{\partial t_i^2} = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2};$$

$$u(x_1, \ldots, x_q, t_1, \ldots, t_p) \mid_{t_1 = \ldots = t_p = 0} = f(x_1, x_2, \ldots, x_q)$$

($p > 1$, $q \geqslant 1$, f — достаточно гладкая функция). Функцию u, удовлетворяющую условиям задачи, нетрудно найти, если искать ее в виде:

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_q, t_1, \ldots, t_p) = u(x_1, x_2, \ldots, x_q, \rho)$$
$$\left(\rho = \sqrt{t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_p^2}\right).$$

Из полученных формул следует непрерывная зависимость $u(x_1, \ldots, x_q, \rho)$ от „начального данного" $f(x_1, \ldots, x_q)$. Для корректности поставленной задачи в обычном смысле в заметке не хватает теоремы единственности.

В. М. Бабич

6517. Сведение одной нелинейной смешанной задачи к линейной задаче. Рзаев У., Елми әсәрләр. Азәрб. унив. Физ.-ријазијјат вә кимја сер., Уч. зап. Азерб. ун-т. Физ.-матем. и хим. сер., 1959, № 1, 63—66 (рез. азерб.)

Рассматривается смешанная задача для нелинейного уравнения

$$\partial p/\partial t = a^2 \partial^2 p/\partial x^2 + \alpha (\partial p/\partial x)^2 \quad (\alpha \neq 0),$$
$$p(0, t) = \psi_1(t), \quad p(l, t) = \psi_2(t), \quad p(x, 0) = \psi(x).$$

С помощью замены $p(x, t) = \frac{a^2}{\alpha} \ln z(x, t)$ показывается эквивалентность этой задачи соответствующей смешанной задаче для линейного уравнения $\partial z/\partial t = a^2 \partial^2 z/\partial x^2$.

М. Л. Расулов

6518. Почти периодические решения линейных гиперболических дифференциальных уравнений. Гюнцлер (Fastperiodische Lösungen linearer hyperbolischer Differentialgleichungen. Günzler Hans), Math. Z., 1959, 71, № 3, 223—250 (нем.)

Рассматривается дифференциальное уравнение $F_{xx}(x, y) - F_{yy}(x, y) = a(x) F(x, y)$ ($x \in I$, $-\infty < y < \infty$), где комплекснозначная функция $a(x)$ определена на некотором интервале I (замкнутом, открытом или полузамкнутом) и суммируема на каждой его компактной части. Определение обобщенного решения дается с помощью перехода к равносильному интегральному уравнению с интегрированием по характеристическому треугольнику и допускает разрывные решения. Пусть далее $\rho(x)$ ($x \in I$) фиксированная локально положительная „нормировочная" функция, а $\mathfrak{E}$ — банахово пространство решений, для которых $\| F \|_\rho = \sup_{x, y} \{\rho(x) F(x, y)\} < \infty$. $\mathfrak{F}$ — подпространство почти периодических функций, т. е. функций F, для которых множество сдвигов $T_c F(x, y) = F(x, y + c)$ компактно в $\mathfrak{E}$. Каждую такую функцию можно с произвольной точностью аппроксимировать (в ρ-метрике) конечными суммами функций вида $h_\omega(x) \exp(i\omega y)$, где $h''(x) - (a(x) - \omega^2) h(x) = 0$, $\sup(\rho h) < \infty$. Любая функция $F \in \mathfrak{F}$ непрерывна, а $\rho(x) F(x, y)$ равномерно непрерывны по y. Определение почти периодичности можно дать также „по Бору" с естественным изменением (с ρ-метрикой). Далее обычным образом вводятся ряды Фурье $F(x, y) \sim \sum_\omega h_\omega(x) \exp(i\omega y)$. Рассматривается скалярное произведение в $\mathfrak{F}$

$$(F, G)_\sigma = \int_I \sigma(x) \left(\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} F(x, y) \overline{G(x, y)}\, dy \right) dx,$$

где $\sigma(x)$ — фиксированная локально положительная функция, для которой $\int_I \sigma \rho^{-2}\, dx = 1$. При этом $|(F, G)_\sigma| \leqslant \| F \|_\rho \| G \|_\rho$. В качестве примеров рассмотрены $a(x) = A$; $-x$; k/x^2; $-e^{2x}$. Систематически применяются результаты Маака (Math. Ann., 1950, 122, 157—166).

А. Д. Мышкис

6519. К обоснованию метода Фурье для одномерных задач. Левитан Б. М., Уч. зап. Моск. гос. заочн. пед. ин-та. Сер. физ.-матем., 1959, вып. 3, 72—84

Общее гиперболическое уравнение с одной пространственной переменной $a(x) u_{xx} + b(x) u_x + c(x) u = u_{tt}$ ($a > 0$) замене неизвестной функции сведено к уравнению вида $u_{xx} - q(x) u = u_{tt}$. Для этого уравнения изучается смешанная задача $u|_{t=0} = 0$; $u_t|_{t=0} = f(x)$; $\alpha u + \beta u_x|_{x=0} = 0$; $\gamma u + \delta u_x|_{x=l} = 0$. Решение получается с помощью метода, являющегося обобщением известного метода продолжения начальной функции при $q(x) = 0$. Продолжение осуществляется с помощью интегрального уравнения типа Вольтерра. На данные задачи накладываются условия: $f(x)$ удовлетворяет краевым условиям и имеет одну непрерывную производную, $q(x)$ — непрерывная функция. Полученное решение используется для обоснования метода Фурье для решения задачи. Доказано, что решение разлагается в абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям соответствующей задачи Штурма—Лиувилля. Отмечается, что при подобном подходе отпадает необходимость исследовать сходимость продифференцированного ряда для решения.

Л. Д. Фаддеев

6520. Задача Фукухара для гиперболических уравнений с двумя независимыми переменными. II. Квазилинейный случай. Иосида (Hukuhara's problem for hyperbolic equations with two independent variables. II. Quasi-linear case. Yosida Setuzo), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 8, 466—470 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1959, 4741.

Рассматривается вещественная квазилинейная гиперболическая система уравнений в частных производных:

$$\partial u_i/\partial t - \lambda_i(t, x, u) \frac{\partial u_i}{\partial x} = f_i(t, x, u), \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Искомые функции $u_i(t, x)$ задаются каждая на своей кривой. Требуется еще, чтобы при всех u_j, удовлетворяющих условию $|u_j| \leqslant \rho$, угол между касательной к i-й кривой и i-й характеристикой был равномерно ограничен снизу. При некоторых других ограничениях доказывается корректность поставленной задачи. Существование искомого решения удается показать, разумеется, только в малом. Область, где решение существует, оценивается через данные задачи.

Задача сводится к системе интегральных уравнений, аналогичных уравнению Вольтерра, к которым затем применяется метод последовательных приближений. Такая же задача для системы более частного вида рассмотрена в первой части реферируемой работы.

В. М. Бабич

6521. О единственности решения задачи Коши для одного класса квазилинейных гиперболических систем. Калашников А. С., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 2, 195—202

Рассматривается вопрос о единственности обобщенного (разрывного) решения задачи Коши для системы квазилинейных уравнений:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\partial \varphi_i(t,x,u)}{\partial x}+\psi_i(t,x,u)=0 \quad (i=1,2),\ u=\{u_1;u_2\}$$

при определенных предположениях относительно функций $\varphi_i(t,x,u)$, $\psi_i(t,x,u)$. Одно из этих предположений есть $\lambda_1(t,x,\underline{u})<\lambda_2(t,x,\overline{\overline{u}})$, где λ_1,λ_2 — характеристические значения рассматриваемой системы, а $\underline{u}$ и $\overline{\overline{u}}$ произвольны. Относительно обобщенного решения предполагается, что оно имеет конечное число кусочно-гладких линий разрыва, кусочно-непрерывно, имеет кусочно-непрерывные ограниченные производные до второго порядка и удовлетворяет „условиям устойчивости обобщенного решения". При этих ограничениях доказывается теорема единственности обобщенного решения. Метод состоит в доказательстве существования классического решения некоторой системы линейных уравнений с разрывными коэффициентами.

Примечание референта. Доказательство существования непрерывного при $t>0$ решения системы линейных уравнений (7) проводится в реферируемой статье для некоторого предполагаемого расположения характеристик этой системы уравнений. Детальный учет свойств коэффициентов этой системы уравнений показывает, что крайние линии разрывов A_0A_1 и A_0A_4 являются характеристиками системы уравнений (7) (обозначения из реферируемой статьи). В этом случае доказательство, повидимому, может быть проведено тем же методом. По поводу этого случая, реально вытекающего из сделанного предположения о существовании двух обобщенных решений исходной системы квазилинейных уравнений, автор статьи далает лишь замечание о возможности проведения доказательства и в случае касания линий разрыва A_0A_k с характеристиками h_i.

Б. Л. Рождественский

6522. Применение конечных интегральных преобразований к решению задач теплопроводности. Иванов А. В., Тр. Ин-та энерг. АН БССР, 1959, вып. 9, 3—32

Функцию $F(M)$, дважды непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую условию $(k\,\partial F/\partial n-\gamma F)_\sigma=0$ на поверхности σ, автор разлагает в ряд Фурье

$$F(M)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n v_n(M,\lambda_n) \qquad (1)$$

по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля: $L(v)+\lambda\rho v=0$, $k(\partial v/\partial n-\gamma v)_\sigma=0$, где $L(v)=\operatorname{div}(k\operatorname{grad}v)-qv$. Определив коэффициенты Фурье a_n из (1), автор получает

$$F(M)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{F}(\lambda_n)}{\iiint_v\rho(M')\,v_n^2(M',\lambda_n)\,d\tau}\,v_n(M,\lambda_n), \qquad (2)$$

где

$$\overline{F}(\lambda_n)=\iiint_v\rho(M')\,v_n(M',\lambda_n)\,F(M')\,d\tau. \qquad (3)$$

Функцию $\overline{F}(\lambda_n)$ автор называет интегральным преобразованием Кошлякова—Гринберга, а формулу (2) — формулой обращения (3). С помощью этих формул автор решает третью граничную задачу в произвольной ограниченной области и смешанную граничную задачу в ограниченном цилиндре для неоднородного уравнения теплопроводности.

Е. И. Ким

6523. Задача теплопроводности для слоисто-однородных сред. Иванов А. В., Шимко Н. Г., Тр. Ин-та энерг. АН БССР, 1959, вып. 9, 77—91

Рассматривается уравнение теплопроводности

$$a_1\partial^2u^{(1)}/\partial x^2=\partial u^{(1)}/\partial t+f^{(1)}(x,t),\ x_1<x<\zeta,\ 0<t<\infty,$$

$$a_2\partial^1u^{(2)}/\partial x^2=\partial u^{(2)}/\partial t+f^{(2)}(x,t),\ \zeta<x<x_1,\ 0<t<\infty,$$

с начальным условием: $u^{(1)}(x,0)=\psi^{(1)}(x)$, $u^{(2)}(x,0)=\psi^{(2)}(x)$, и краевыми условиями: $\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}u^{(1)}(x_1,t)+\beta_1\times u^{(1)}(x_1,t)=\varphi_1(t)$, $\beta_{12}u^{(1)}(\zeta,t)+\beta_{22}u^{(2)}(\zeta,t)=\varphi_{12}(t)$, $\alpha_{12}\frac{\partial}{\partial x}u^{(1)}(\zeta,t)+\alpha_{22}\frac{\partial}{\partial x}u^{(1)}(\zeta,t)=\varphi_{22}(t)$, $\alpha_3\frac{\partial}{\partial x}u^{(2)}(x_2,t)+\beta_3u^{(2)}(x_2,t)=\varphi_3(t)$, где α и β — постоянные, ψ, φ — заданные функции.

Автор находит решение в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма—Лиувилля для уравнения

$$\frac{1}{\alpha_{22}\beta_{22}}K_j^{(1)''}(x)+\mu_j^2L_1K_j^{(1)}(x)=0,\ x_1<x<\zeta,$$

$$\frac{1}{\alpha_{12}\beta_{12}}K_j^{(2)''}(x)+\mu_j^2L_2K_j^{(2)}(x)=0,\ \zeta<x<x_2,$$

с граничными условиями:

$$\alpha_1K_j^{(1)'}(x_1)+\beta_1K_j^{(1)}(x_1)=0,\quad \beta_{12}K_j^{(1)}(\zeta)+\beta_{22}K_j^{(2)}(\zeta)=0,$$

$$\alpha_{12}K_j^{(1)'}(\zeta)+\alpha_{22}K_j^{(2)'}(\zeta)=0,\quad \alpha_3K_j^{(2)'}(x_2)+\beta_3K_j^{(2)}(x_2)=0,$$

где $L_1=1/\alpha_{22}\beta_{22}a_1$, $L_2=1/\beta_{12}\alpha_{12}a_2$. Если $u(x,t)=u^{(1)}(x,t)$ при $x_1\leqslant x\leqslant\zeta$, $u(x,t)=u^{(2)}(x,t)$ при $\zeta\leqslant x\leqslant x_2$, то в силу ортогональности системы функций $\{K_j(x)\}$

$$u(x,t)=\sum_{(j)}\overline{u}_j(t)K_j(x), \qquad (1)$$

где

$$\overline{u}_j(t)=L_1\int_{x_1}^{\zeta}K_j^{(1)}(x)\,u^{(1)}(x,t)\,dx+L_2\int_{\zeta}^{x_2}K_j^{(2)}(x)\,u^{(2)}(x,t)\,dx. \qquad (2)$$

Функцию $\overline{u}_j(t)$ авторы называют интегральным преобразованием, а формулу (1) — формулой обращения.

Используя указанное выше преобразование, авторы приводят поставленную ими задачу к решению уравнения $\overline{u}_j'(t)+\mu_j^2\overline{u}_j(t)=F_j(t)$ с начальным условием $\overline{u}_j(0)=\overline{\psi}_j$, где $F_j(t)$, $\overline{\psi}_j$ — известные величины. В работе не приведено доказательства существования собственных значений и полноты собственных функций.

Е. И. Ким

6524. Об одном способе применения функции Дирака к решению задач теплопроводности и диффузии. Алексеева О. П., Иванов А. В., Тр. Ин-та энерг. АН БССР, 1959, вып. 9, 33—76

Строится функция Грина для ряда стандартных граничных задач. Новых результатов статья не содержит.

М. З. Соломяк

6525. Асимптотика решений некоторых краевых задач с осциллирующими граничными условиями. Вишик М. И., Люстерник Л. А., Докл. АН СССР, 1958, 120, № 1, 13—16

Рассмотрена асимптотика решений краевых задач для параболических и гиперболических, а также некоторых других типов уравнений с быстро осциллирующими граничными условиями. Изложение ведется для двух пространственных переменных и локально заданных граничных условий, имеющих вид простой гармоники, умноженной на гладкую функцию, обращающуюся в нуль вне окрестности некоторой точки. В заметке описывается первый шаг итерационного процесса и строится пограничный слой. Переход к общему случаю и оценки остаточных членов проводятся, как в ранних работах авторов.

Обозначения: Q — область в плоскости (x,y) с границей Γ, $\Omega=Q\times T$ $(T=(-\infty<t<\infty))$, $\Gamma_1=\Gamma\times T$, (ρ,φ) — координаты вблизи Γ.

1. Рассматривается уравнение

$$u_t+L_{2k}u=0, \qquad (1)$$

где L_{2k} — эллиптический оператор порядка $2k$ с граничными условиями

$$\left.\frac{\partial^s u}{\partial n^s}\right|_{\Gamma_1} = A_s(\varphi, t)\, e^{i(\omega t+\gamma\varphi)}, \quad s=0, 1, \ldots, k-1. \qquad (2)$$

Асимптотика ищется в виде

$$u = v(\rho, \varphi, t)\, e^{i(\omega t+\gamma\varphi)}. \qquad (3)$$

Рассмотрены случаи 1) $\gamma = O(\omega^{1/s})$, $s>2k$, 2) $\gamma = a\omega^{1/2k}$, $a=O(1)$, 3) $\gamma = O(\omega^{1/s})$, $s<2k$; все они дают пограничный слой вида

$$v_0 = \sum^k c_l(\varphi, t) \exp(-\lambda_l \omega^{1/2k}\rho).$$

II. Гиперболические уравнения второго порядка $u_{tt} - L_2 u = 0$ с граничным условием

$$u|_{\Gamma_1} = A(\varphi, t)\, e^{i(\omega t+\gamma\varphi)}. \qquad (4)$$

Асимптотика ищется в том же виде. Пусть

$$L_2 = M_2(\partial/\partial\rho, \partial/\partial\varphi) + \ldots = a_0(\varphi, t)\,\partial^2/\partial\rho^2 + 2a_1(\varphi, t)\,\partial^2/\partial\rho\partial\varphi + a_2(\varphi_1, t)\,\partial^2/\partial\varphi^2 + \ldots$$

и

$$q \equiv a_0 a_2 - a_1^2 - a_0\omega^2.$$

Пограничный эффект наблюдается при условии $q>0$.

III. Вырождение эллиптических операторов в эллиптические. Рассматривается эллиптическое уравнение $L_\varepsilon u = \sum_{s=0}^{2l} \varepsilon^s L_{2k+s} u = 0$, для которого всегда разрешима первая краевая задача, удовлетворяющее некоторому условию на характеристические корни.

Граничные условия имеют вид $\partial^s u/\partial n^s|_\Gamma = A_s(\varphi)\, e^{i\omega\varphi}$. Пограничный эффект наблюдается всегда, но построение пограничного слоя различно в зависимости от соотношения порядков $1/\varepsilon$ и ω.

IV. Вырождение гиперболического уравнения в параболическое. Рассматривается уравнение $\varepsilon u_{tt} + u_t - L_2 u = 0$ с граничным условием (4). Пограничный эффект наблюдается всегда, но уравнения для первого приближения разные в зависимости от того, имеет место $\omega \gg \gamma^2$, $\omega = O(\gamma^2)$ или $\omega = o(\gamma^2)$. А. Л. Крылов

6526. Теорема единственности и полноты типичной смешанной задачи для уравнения теплопроводности. Паньи (Teoremi di unicità e di completezza relativi ad un problema misto tipico per l'equazione del calore. Pagni Mauro), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1958, 28, № 1, 31—39 (итал.)

Продолжается изучение смешанной задачи с косой производной для уравнения $E(u) \equiv \partial^2 u/\partial x_1^2 + \partial^2 u/\partial x_2^2 - \partial u/\partial y = 0$, начатое автором в работе (РЖМат 1959, 11074). Вначале устанавливается ряд оценок поверхностных тепловых потенциалов, в которых вместо фундаментального решения уравнения теплопроводности поставлена функция $H(M, N)$, определенная в вышеупомянутой работе с квадратично суммируемой плотностью. Замечается, что может быть рассмотрена многосвязная нецилиндрическая область. Определяется класс функций $u(P)$ Γ^*: 1) $E(u) = 0$; $P \in D \times (0, y_0] = G$; 2) $\lim_{P\to M} u(P) = A(M)$; $M \in FD \times (0, y_0] = S$; $\lim_{P\to M} u(P) = A(M)$ $\{M \in D;\ y = 0\}\ \sigma_0$; 3) $\lim_{P\to M} \partial u(P)/\partial l_M^* = B(M)$; $M \in S$; 4) $A(M)$, $B(M)$ — квадратично суммируемые в $S + \sigma_0$ функции, удовлетворяющие условию:

$$Ku(P) = \int_S A(M)\, a_*^{(l)} \frac{\partial F(M, P)}{\partial l_M^*}\, ds_M - \int_S B(M)\, a^{(l)} \times F(M, P)\, ds_M - \int_S A(M)\, b^{(l)} F(M, P)\, ds_M.$$

$K = \begin{cases} 0, & P \in G \\ 4\pi, & P \in \overline{G} \end{cases}$; $F(M, P)$ — фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Устанавливается:

Теорема 1. Пусть S разбита на 2 части S' и S'', тогда функция $u(x_1, x_2, y)$ из Γ^*, удовлетворяющая условиям: $\lim_{P\to M} u(P) = 0$; $M \in S' + \sigma_0$; $\lim_{P\to M} \left\{\frac{\partial u(P)}{\partial e_M} - h(M)\, u(P)\right\} = 0$; $M \in S''$, $h(M)$ — измеримая и неотрицательная на S'' тождественно равна нулю.

Теорема 2. Пусть $f_r(M) = \int_G g_r(Q) F(M, Q)\, dG_Q$, $g_r(Q)$ — последовательность непрерывных функций. Рассмотрим последовательность векторов Ω_r с компонентами: f_r на множестве $\{G \mid y = y_0\}\ \sigma_{y_0}$, $a^{(l)} f_r$ на S, $\left(-a_*^{(l)} \frac{\partial f_r}{\partial l_*} + f_r\, b^{(l)} + a^{(l)} h f_r\right)$ на S''. Последовательность $\{\Omega_r\}$ полна в совокупности векторов с компонентами $\{g_1, g_2, g_3\}$, суммируемых с квадратом соответственно с σ_{y_0}, S' и S''. С. Д. Эйдельман

6527. Замечание к моей статье «Граничная задача для уравнений в частных производных параболического типа». Ито (A remark on my paper «A boundary value problem of partial differential equation of parabolic type» in Duke Mathematical Journal Ito Seizo), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 463—465 (англ.)

Дается модифицированное доказательство непрерывности фундаментального решения, недостаточно четко проведенное в статье (РЖМат, 1959, 1516).

А. Л. Крылов

6528. Одно обобщение основной краевой задачи для линейных параболических уравнений. Каттабриг (Una generalizzazione del problema fondamentale coi valori al contorno per equazioni paraboliche lineari Cattabriga Lamberto), Ann. mat. pura appl., 1958, 46, 215—247 (итал.)

Рассматривается краевая задача, которая для случая классических решений была исследована Пини (РЖМат 1959, 1515, откуда мы возьмем обозначения); цель работы — существенно ослабить требования, накладываемые на функции φ_{jl} и f (при $\varphi_0(x) \equiv 0$, $a_l(x, y) \equiv 1$). При этом достижение граничных условий понимается в обобщенном смысле, как в работе Пини (РЖМат, 1959, 2703). В предположениях на a_l и $\varkappa_l$, поставленных в первой работе, строится функция Грина для рассматриваемой краевой задачи; с помощью этой функции доказывается единственность решения задачи (понимаемой в указанном обобщенном смысле). Далее сначала предполагается, что $f \equiv 0$. Априорная оценка классических решений

$$\int_0^1 \left(|u| + \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\right)_{\gamma_j(t)} dy < H \sum_{i=1}^2 \int_0^1 (|\varphi'_{il}| + |\varphi_{il}|)\, dt \qquad (j = 1, 2)$$

(H не зависит от φ_{jl} и t) дает возможность доказать существование решения задачи, если функции φ_{1l} абсолютно непрерывны, $\varphi_{1l}(0) = 0$, а функции φ_{2l} суммируемы. Затем для перехода к неоднородному уравнению исследуется площадной потенциал с ядром $u(P, Q)$ непрерывной плотностью и выводится условие, необходимое и достаточное для того, чтобы он обладал производной по x 4-го порядка (это условие аналогично известному условию Петрини для логарифмического потенциала). Отсюда можно построить пример непрерывной функции f, для которой рассматриваемое уравнение

не имеет классического решения ни в какой подобласти D. Поэтому приходится обобщить и понятие решения, ослабив степень его гладкости, что и делается (при этом, в частности, требуется, чтобы уравнение удовлетворялось почти всюду). Проведенное исследование потенциала с квадратично суммируемой плотностью показывает, что поставленная краевая задача имеет обобщенное решение и в случае $f \in L^2(D)$. А. Д. Мышкис

6529. Асимптотические распределения, связанные с лапласианом для форм. Гафни (Asymptotic distributions associated with the Laplacian for forms. Gaffney Matthew P.), Communs Pure and Appl. Math., 1958, **11**, № 4, 535—545 (англ.)

Устанавливается асимптотическая формула

$$\sum_{k=1}^{K} |\omega_k(P)|^2 \sim \frac{K}{V},$$

где $\omega_k(P)$ — характеристические формы оператора Лапласа, рассматриваемого на ориентированном компактном римановом многообразии M, размерности n, класса c^∞, $P \in M$ и V — объем M. Используемый метод заключается в получении разложения фундаментального решения уравнения теплопроводности, нахождения его асимптотического поведения при малых t и использования тауберовой теоремы. А. А. Дезин

6530. Свойство сохранения для уравнения теплопроводности на римановом многообразии. Гафни (The conservation property of the heat equation on Riemannian manifolds. Gaffney Matthew P.), Communs Pure and Appl. Math., 1959, **12**, № 1, 1—11 (англ.)

Пусть M — ориентируемое риманово многообразие класса C^∞. Уравнение теплопроводности записывается в виде

$$\operatorname{div}[\varkappa(P)\operatorname{grad} u(P,t)] = \sigma(P)\frac{\partial}{\partial t}u(P,t);$$

$$\sigma,\ \varkappa > 0,\ P \in M \qquad (1)$$

В предположении, что на M (не предполагаемом замкнутым) интегрируема любая положительная степень e^{-r}, где r — расстояние до фиксированной точки P_0, устанавливается свойство сохранения: $\int_M u\sigma dV = \int_M f\sigma\, dV$ при любом $t > 0$, где f — начальная функция с компактным носителем. Доказательство проводится путем построения полугруппы $W_t(f)$ решений (1) при использовании расширений операторов div и grad в соответствующих гильбертовых пространствах. А. А. Дезин

6531. Уравнение теплопроводности и полиномы Эрмита. Кампе-де-Ферье (Equation de la chaleur et polynomes d'Hermite. Kampé de Fériet Joseph), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 7, 883—887 (франц.)

Пусть

$$K_n(x,t) = (i\sqrt{2t})^n H_n\left(\frac{x}{i\sqrt{2t}}\right),$$

где H_n — полином Эрмита. Известно, что полиномы $K_n(x,t)$ удовлетворяют уравнению теплопроводности $U_t = U_{xx}$. Рассмотрим семейство операторов T_t, зависящих от t ($-\infty < t < +\infty$) как от параметра и определенных на множестве всех полиномов формулой $T_t x^n = K_n(x,t)$. Это семейство образует абелеву группу, так как $T_t T_s = T_{t+s}$. Для достаточно широких классов целых функций $f(x)$ оператор T_t можно определить формулой

$$T_t f(x) = T_t\left(\sum_{n=0}^{+\infty} A_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n K_n(x,t).$$

В работе введен весьма естественный класс таких целых функций F_τ и изучены некоторые свойства преобразования $f(x) \to u(x,t) = T_t f$ ($f \in F_\tau$). Важнейшими свойствами функции $u(x,t)$ являются: 1) удовлетворение в некоторой полосе $|t| < \tau$ уравнению теплопроводности ($u_t = u_{xx}$), 2) удовлетворение начальному условию $u|_{t=0} = f(x)$. В. М. Бабич

6532. Об асимптотическом поведении решений уравнения $\Delta u - \partial u/\partial t + c(x)u = 0$. Шибяк (On the asymptotic behaviour of the solutions of the equation $\Delta u - du/dt + c(x)u = 0$. Szybiak A.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1959, **7**, № 4, 183—186 (англ.; рез. русск.)

Указанное в заглавии статьи уравнение рассматривается в m-мерном евклидовом пространстве; $c(x)$ — ограниченная неотрицательная функция, удовлетворяющая условию Гёльдера. Доказывается, что фундаментальное решение $U(t,x,s,y)$ при $t \to \infty$ растет как показательная функция, причем рост равномерен относительно x и y на любом компактном множестве. Тот же порядок роста имеет место для решения задачи Коши, если начальная функция неотрицательна. М. З. Соломяк

6533. Решение одномерного уравнения теплопроводности с произвольным распределением источников тепла. Шелленбергер (Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung mit willkürlicher Wärmequellenverteilung. Schellenberger Günter), Acta hydrophys., 1959, **5**, № 4, 201—212 (нем.)

С помощью преобразования Лапласа решаются краевые задачи для уравнения $\partial T/\partial t - A\,\partial T/\partial z^2 = Q(z,t)$ на полупрямой $z > 0$ на отрезке $0 < z < z_*$. Новых результатов работа не содержит. Е. Д. Гарбер

6534. Об уравнении Томотика и Тамада. Трикоми (Sull'equazione di Tomotika e Tamada. Tricomi Francesco G.), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1958, **25**, № 3-4, 135—139 (итал.)

Автор находит правильное решение особого уравнения Томотика и Тамада (Quart. Appl. Math., 1951, **9**, 129—147)

$$(1-y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad (1)$$

встречающегося в приложениях к аэродинамике. Для этой цели автор делает замену независимых переменных и приводит уравнение (1) к виду

$$(1-\xi)\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} - 2\eta\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\,\partial \eta} + (1+\xi)\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} - 2\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0. \qquad (2)$$

Можно легко найти решение уравнения (2), положив $z = f(\xi) + g(\eta)$. Полученное таким способом решение встречается в приложениях.

Если $\varphi(x,y)$ — решение уравнения (1), то находим другое решение, полагая

$$z = \int_{x_0}^{x} \varphi(s,y)\,ds + \psi(y);$$

получим относительно $\psi(y)$ обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно легко эффективно решить. M. Krzyżański

6535. Слабое решение для одной системы уравнений эллиптико-гиперболического типа. Моравец (A weak solution for a system of equations of elliptic-hyperbolic type. Morawetz Cathleen S.), Communs Pure and Appl. Math., 1958, **11**, № 3, 315—331 (англ.)

Рассматривается система

$$K(y)\,\partial u_1/\partial x + \partial u_2/\partial y = g_1;\ \partial u_1/\partial y - \partial u_2/\partial x = g_2;$$
$$yK(y) \geqslant 0;\quad K'(y) > 0 \qquad (1)$$

в области D, с границей $C+\gamma$; $C=C_1+C_2+C_3$; $\gamma=\gamma_1+\gamma_2$, где C_0 — дуга с кусочно-непрерывной касательной, лежащая в полуплоскости $y>0$ и пересекающая $y=0$ в двух точках: $x_1<0$, $x_2>0$; C_1, C_2 — ее продолжения в полуплоскости $y<0$, выходящие из точек x_1, x_2; γ_1, γ_2 — отрезки характеристик уравнения (1), выходящие из $(0,0)$, лежащие в $y<0$, $x<0$ и $y<0$, $x>0$ соответственно и кончающиеся в точках пересечения с C_1, C_2. На C задаются граничные условия

$$u_1 dx/ds + u_2 dy/ds = 0. \qquad (2)$$

Вводится гильбертово пространство со скалярным произведением

$$\int_D (ru_1v_1 + u_2v_2)\,dxdy, \qquad (3)$$

где r — расстояние до $(0,0)$. С помощью специального класса пробных функций определяется слабое решение уравнения (1) при условиях (2) и доказывается его существование при любой правой части с конечной нормой $\int_D \left(\frac{1}{r}g_1^2 + g_2^2\right)dxdy$. Искомое слабое решение строится с помощью теоремы Рисса как реализация некоторого ограниченного (в норме (3)) функционала.

А. А. Дезин

6536. Смешанная задача для одного функционального уравнения. Агаев Г. Н., Алиханова Р. И., Физ. вә ријазијјат инст. әсәрләри АзәрбССР Елмләр Акад., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1959, 8, 183—189 (рез. азерб.)

Рассматривается смешанная задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi\left(\int_a^b u^2(x,t)\,dx\right) Lu, \quad u|_{t=0} = f(x),$$

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} \alpha_{j\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=a} + \sum_{\nu=0}^{p-1} \beta_{j\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=b} = 0,$$

$$j = 0,1,\ldots,p-1,$$

где $Lu \equiv \sum_{\nu=0}^{p} A_\nu(x)\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}$, $\frac{1}{A_0(x)}$, $A_\nu(x)$, $\nu = 1,2,\ldots,p$, $\varphi(z)>0$ — непрерывные функции при $a \leqslant x \leqslant b$, $z \geqslant 0$.

Решение ищется в виде ряда $u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(t)v_\nu(x)$.

Даны достаточные условия, при которых написанный ряд является решением поставленной задачи. Имеются опечатки.

В. Э. Аболиня

6537. Об одном методе решения краевой задачи полигармонического уравнения. Ким Ю. Ц., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 65—73

Ищется решение полигармонического уравнения $\Delta^n u = 0$ в некоторой ограниченной многосвязной двумерной области при краевых условиях:

$$u|_L = F_1(s), \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L = F_2(s), \ \Delta u|_L = F_3(s),$$

$$\left.\frac{\partial \Delta u}{\partial n}\right|_L = F_4(s), \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots, \Delta^{\frac{n-1}{2}} u|_L = F_n(s), \quad (n \text{ — нечетное});$$

$$u|_L = F_1(s), \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_L = F_2(s), \quad \Delta u|_L = F_3(s), \ldots$$

$$\ldots\ldots \left.\frac{\partial \Delta^{\frac{n-2}{2}} u}{\partial n}\right|_L = F_n(s) \ (n \text{ — четное}).$$

Подробно рассмотрен случай $n=3$ и указано, что таким же можно получить решение при произвольном n. Представляя полигармонические функции через аналитические, применяя аппарат сингулярного интеграла типа Коши и используя метод, подобный методу Д. И. Шермана (Докл. АН СССР, 1940, 28, № 1; 37, № 40), автор сводит указанную краевую задачу к некоторой системе интегральных уравнений и доказывает ее разрешимость. На граничные функции F_l наложены такие требования, чтобы выражения $\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)^k u$, $k = 0,1,\ldots,n$, удовлетворяли условию Гёльдера на контуре L.

О. И. Панич

6538. Разностные уравнения полигармонического типа. Даффин, Шелли (Difference equations of polyharmonic type. Duffin R. J., Shelly E. P.), Duke Math. J., 1958, 25, № 2, 209—238 (англ.)

Рассматриваются дискретные функции, определенные на точках решетки в n-мерном пространстве с единичным шагом по всем координатам. Пусть D — обычный разностный оператор, соответствующий непрерывному оператору Лапласа Δ. Дискретные полигармонические функции p-го порядка определяются, как решения уравнения $D^p f = 0$. Дискретные полигармонические функции более высокого порядка строятся автором из полигармонических дискретных функций низшего порядка. Перед этим устанавливается ряд свойств этих функций, аналогичных таким свойствам непрерывных полигармонических функций, как то, что операторы $\bar{r}\cdot\mathrm{grad}$ и $\bar{r}\times\mathrm{grad}$ не выводят из класса гармонических функций (r — расстояние до начала). Используя ряды Фурье, автор строит фундаментальное решение для оператора D^p.

В случае двух и трех пространственных переменных указывается асимптотическое поведение построенного фундаментального решения на бесконечности. Более подробно асимптотика изучается для $p=1$ и $n=3$. Далее автор доказывает, что если дискретная полигармоническая функция имеет степенной порядок роста на бесконечности, то эта функция есть полином. Результат вытекает из более общей теоремы, доказанной для операторов с полигармонической главной частью. В заключение доказывается, что любая дискретная полигармоническая функция p-го порядка, определенная внутри некоторого прямоугольного параллелепипеда, может быть представлена p-гармоническим полиномом. В статье доказан также ряд положений, устанавливающих аналогии между дискретными и непрерывными полигармоническими функциями. Библ. 14 назв.

А. И. Кошелев

6539. Изучение системы дифференциальных уравнений газовой динамики. Пуччи (Studio di un sistema di equazioni differenziali della dinamica dei gas. Pucci Carlo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1958, 24, № 6, 653—657 (итал.)

Исследуются вопросы существования и единственности, а также доказываются некоторые теоремы максимума и минимума для системы уравнений

$$T(U_{xx} + U_{yy}) - U_x T_y - U_y T_x = 0,$$

$$T_{xx} + T_{yy} - aU_{xx} - aU_{yy} = 0.$$

Как указывает автор, задача была поставлена М. Пиконе и встречается при изучении влияния распределения температуры на стенке диффузионной камеры, на процесс диффузии пара в газе.

Ф. И. Франкль

6540. Об аналитичности решений аналитических нелинейных систем уравнений в частных производных эллиптического типа. Ч. I. Аналитичность внутри области. Ч. II. Аналитичность на границе. Морри (On the analyticity of the solutions of analytic non-linear elliptic systems of partial differential equations. Part I. Analyticity in the interior. Part II. Analyticity at the

boundary. Morrey Charles B., Jr), Amer. J. Math., 1958, 80, № 1, 198—237 (англ.)

Изучаются решения нелинейных аналитических систем дифференциальных уравнений

$$\Phi_j(x, u_k, Du_k, \ldots D^{s_j+t_k}u_k, \ldots) = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N, \qquad (1)$$

с неизвестными $u = (u_1, \ldots, u_N)$, где s_j и t_k — некоторые целые числа, $s_j \leqslant 0$, в j-м уравнении (1) $s_j + t_k$ есть наивысший порядок производной функции u_k по x $(x = (x^1, \ldots, x^\nu)$; $D^\alpha u_k = \dfrac{\partial^\alpha u_k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x^{\alpha_\nu}}$, $\sum \alpha_\nu = \alpha)$. Эллиптичность системы (1) в точке $u = u_0$ обозначает, что соответствующая линейная система в вариациях (в точке $u = u_0$) эллиптична в смысле определения Дугласа — Ниренберга (РЖМат, 1958, 1201).

Основной результат статьи это доказательство того, что любое решение системы (1) эллиптического типа аналитично, если $u_k \in C^{t_k+\mu}$, $0 < \mu < 1$. Этот результат является некоторым усилением известного результата И. Г. Петровского. Кроме того, метод доказательства, предложенный автором, проще; этот метод соединяет применявшуюся ранее идею аналитического продолжения в комплексную область с некоторыми простыми фактами из функционального анализа.

Основная часть доказательства состоит в подробном изучении систем уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_k L_{lk} v^k = f_l \qquad (2)$$

или $Lv = f$, где L_{lk} — совокупность членов порядка $t_k + s_l$ в фиксированной точке x, например $x = 0$. Система (2) изучается в некоторой сфере B_R радиуса R с центром в точке $x = 0$ действительного пространства переменных x.

Система (2) изучается в пространстве E_R (комплексных) векторов $u, u^k \in C^{t_k+\mu}$ в $\overline{B}_R$, и в более узком пространстве E^*_{Rh} аналитических векторов в (2ν-мерной) области B^*_{hR} комплексного ν-мерного пространства переменных $x = x_1 + ix_2$, определяемой неравенством $|x_2| < h(R - |x_1|)$, $|x_1| < R$; $x_l = (x_l^1, \ldots, x_l^\nu)$, $l = 1, 2$; $|x| = (\sum |x^l|^2)^{1/2}$. Показывается, что если $f \in E^*_{Rh}$ и u решение системы (2), принадлежащее E_R, то u может быть аналитически распространено на $\overline{B}^*_{hR}$, причем

$$\|u\|^* < K_2(h, \mu) \max_{1<j<N} |D^{-s_j} f_j|,$$

где $\|u\|^*$ — норма вектора u как элемента пространства E^*_{Rh} (определения норм мы опускаем).

Далее показывается, что принадлежащие E_R решения однородной системы (2) можно распространить до некоторых функций из E^*_{Rh}, причем имеет место аналогичная оценка. Для доказательства аналитичности решений системы (1), грубо говоря, сначала автор записывает ее в виде эквивалентного операторного уравнения

$$V_R - T_R(V_R; H_R) = W_R, \qquad (3)$$

где V_R, H_R, W_R — некоторые векторы при достаточно малом R, определяемые рассматриваемым решением системы (1), причем $L(H_R) = 0$, W_R выражается через H_R и $T_R(V_R; H_R)$ — нелинейный оператор такой, что $T_R(0; H_R) = 0$.

В силу принципа сжатых отображений уравнение (3) имеет единственное решение в E_R и в E^*_{Rh} при любых правых частях W_R. Так как $E^*_{Rh} \subset E_R$, то решения уравнения (3) в E_R принадлежат E^*_{Rh} и то же верно для решений системы (1).

Во второй части работы показывается, что решение аналитической сильно эллиптической системы в смысле определения Ниренберга (РЖМат, 1958, 1203), принимающие аналитические данные Дирихле на аналитическом куске границы области, аналитически продолжимо через границу области. Вопрос о необходимости условия сильной эллиптичности для справедливости этого результата автором не рассматривается. Б. В. Боярский

6541. О решении смешанной задачи для нелинейных гиперболических уравнений с помощью конечных разностей. Проузе (Sulla risoluzione del problema misto per le equazioni iperboliche non lineari mediante le differenze finite. Prouse Giovanni), Ann. mat. pura ed appl., 1958, 46, 313—341 (итал.)

Рассматривается система

$$\sum_{i=1}^n \alpha^{jl} [\partial w^l/\partial y + \gamma^l \partial w^l/\partial x] = \beta^j \quad (j = 1, \ldots, n),$$

где все α^{jl}, β^j, γ^l являются функциями $x, y, w^1, \ldots, w^n$, Краевое условие имеет вид:

$$w^l(x, 0) = 0 \ (0 \leqslant x \leqslant \alpha; \ \ i = 1, \ldots, n); \ w^k(0, y) = 0$$
$$(0 \leqslant y \leqslant \beta; \ k = 1, \ldots, r),$$

где $\gamma^l(0, \ldots, 0) > 0$ $(j = 1, \ldots, r)$, < 0 $(j = r+1, \ldots, n)$. Требуется выполнение определенных (не очень сильных) условий гладкости, естественных условий согласования и невырожденности матриц $\|\alpha^{jl}\|_1^n$ и $\|\alpha^{jl}\|_{r+1}^n$. С помощью метода конечных разностей (подобно тому, как это сделано в статье Куранта, Исааксона и Риса, Communs Pure and Appl. Math., 1952, 5) доказано существование и единственность классического решения в некоторой окрестности отрезка $0 \leqslant x < \alpha$, $y = 0$ (при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$). А. Д. Мышкис

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

Редакторы *В. В. Немыцкий, А. Г. Свешников, Н. И. Мозжерова*

6542. Тяжелый симметричный гироскоп в карданном подвесе. Магнус (Der schwere symmetrische Kreisel in kardanischer Lagerung. Magnus K.), Ingr.-Arch., 1959, 28, 184—198 (нем.)

Исследуются устойчивость и движение гироскопа в карданном подвесе. В первой части выписываются в форме Лагранжа уравнения движения гироскопа, у которого ось внешнего кольца наклонена под произвольным углом ϑ_0 к вертикали, а также отмечаются первые интегралы, имеющие место в этом случае. Поскольку в этом случае интегралов недостаточно для выяснения характера движения гироскопа, автор в дальнейшем переходит к случаю вертикального положения оси внешнего кольца. Вычерчиваются различные типы траекторий, описываемых вершиной оси ротора на сфере, а также проекции этих кривых на касательную плоскость, построенную в полюсе. Затем проводится срав-

нение с траекториями, полученными экспериментально для различных начальных условий. Дается аналитическое исследование регулярной прецессии гироскопа. Проведен в первом приближении анализ устойчивости вертикального положения оси ротора. Получены в виде неравенств условия устойчивости для разных положений центра тяжести системы гироскоп — внутреннее кольцо.

В заключение возможные типы движений иллюстрируются на фазовой диаграмме: $(\dot\psi, \vartheta)$, $(\dot\vartheta, \vartheta)$. Разовые кривые рисуются для разных значений варьируемых постоянных k_2 (входящей в интеграл момента количества движения) и k_4 (входящей в интеграл энергии). Отмечены устойчивые и неустойчивые положения равновесия, асимптотические движения. Показано, как с помощью фазовых кривых можно вывести суждение о форме траекторий, вычерчиваемых на сфере концом оси фигуры гироскопа. В. В. Кременту́ло

6543. Дифференциальные уравнения траекторий, описываемых материальной точкой в поле сил. Брайер (L'équation différentielle des trajectoires décrites par un point matériel dans un champ de forces. Braier Alfred), Bul. Inst. politehn. Iaşi, 1958, **4**, № 1-2, 103—112 (франц.; рез. русск., рум.)

Считая уравнения движения материальной точки уравнениями, решающими вариационную задачу, выражаемую принципом Мопертюи, автор и составляет данные уравнения в следующих случаях: 1) для плоского движения точки как в потенциальном силовом поле в обобщенных координатах, так и для движения под действием произвольной силы; 2) то же самое для пространственного движения точки. Во всех случаях одна координата принимается за независимую, и уравнения не содержат времени. В случае центрального поля сил автор получает формулу Бине. Кроме того, автор отмечает очевидное положение, что из дифференциальных уравнений движения данной формы можно найти, при заданном уравнении траектории, силу, действующую на точку в функции координаты, принятой за независимую. В. В. Добронравов

6544. О резонансных процессах в колебательной системе, содержащей двигатель. Кононенко В. О., Изв. АН СССР, Отд. техн. н. Механ. и машиностр., 1959, № 2, 75—80

Рассматривается задача о взаимодействии двигателя с колебательной системой с n степенями свободы в областях резонансов. Уравнения движения такой системы записываются в виде:

$$I\ddot\varphi = L(\dot\varphi) - q\dot\varphi + m\ddot y_1 \sin\varphi$$
$$m_1\ddot y_1 + c_1(y_1 - y_2) = mr\ddot\varphi\sin\varphi + mr\dot\varphi^2\cos\varphi - q_1\dot y_1$$
$$m_2\ddot y_2 + c_1(y_2 - y_1) + c_2(y_2 - y_3) = -q_2\dot y_2 \qquad (1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$m_n\ddot y_n + c_{n-1}(y_n - y_{n-1}) + c_n y_n = -q_n\dot y_n.$$

Анализ системы (1) проводится с помощью асимптотических методов нелинейной механики в предположении существования одночастотного режима в механической системе, описываемой уравнениями (1). Производя в уравнениях (1) замену переменных (введя квазиконформные координаты) и применяя метод осреднения, автор приходит к системе трех уравнений, которые позволяют построить резонансные кривые, а также путем численного интегрирования исследовать вопрос о прохождении через резонанс.

Приводится подробный анализ характера стационарного колебательного процесса, при котором учитывается взаимодействие колебательной системы и двигателя. Полученные теоретические выводы подтверждаются экспериментально. Ю. А. Митропольский

6545. Дополнительные исследования по интегрированию уравнений движения механических систем с неголономными связями. Гриндей (Contribuţii la studiul integrării ecuaţiilor mişcării unui sistem mecanic supus la legături neolonome. Grindei I.), Ann. ştiinţ. Univ. Iaşi, 1958, Sec. 1, **4**, № 1, 81—90 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается механическая система с нелинейными неголономными реономными связями первого порядка. Исходя из принципа Гаусса, выводятся уравнения движения в форме Лагранжа с неопределенными множителями. Затем неопределенные множители исключаются при помощи уравнений, получающихся дифференцированием по времени уравнений связей. Далее решается такая задача: найти такие преобразования первоначальных координат системы и времени в другие переменные, чтобы уравнения движения приняли вид классических канонических уравнений Гамильтона, которые затем можно было бы проинтегрировать методом Гамильтона — Якоби. Для нахождения искомых преобразований выводится сложная система нелинейных уравнений в частных производных первого порядка. Кроме того, автор отмечает те случаи, когда подобное преобразование может быть выполнено иначе, более просто. Никакого примера, даже формального характера, не приводится. В. В. Добронравов

6546. О построении асимптотических приближений, описывающих нестационарные процессы в нелинейных гироскопических системах, с помощью принципа усреднения. Гробов В. А., Укр. матем. ж., 1959, **11**, № 2, 213—216

Рассматривается гироскопическая система, гамильтониан которой представляется в виде суммы:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}[a_{ik}(\tau)\,q_i q_k + 2b_{ik}(\tau)\,q_i p_k + c_{ik}(\tau)p_i p_k] +$$
$$+ \mu H_1(t, q_1, \ldots, q_n; p_1, \ldots, p_n) + \mu^2 \ldots, \qquad (1)$$

где μ — малый параметр, $\tau = \mu t$ и уравнения движения в канонической форме имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(\tau)\,q_k + \sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{ik}\frac{dp_k}{dt} + b_{ik}(\tau)\,p_k\right) = -\mu\frac{\partial H_1}{\partial q_i} + \mu^2$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(-\delta_{ik}\frac{dq_k}{dt} + b_{ki}(\tau)\,q_k\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{n} c_{ik}(\tau)\,p_k = \mu\frac{\partial H_1}{\partial p_i} + \mu^2, \qquad (2)$$

где δ_{ik} — символ Кронекера. Система (2) с помощью введения квазиканонического преобразования согласно Б. В. Булгакову и Ю. А. Митропольскому и последующему введению медленно меняющихся переменных сводится к стандартному виду, после чего для получения первого приближения применяется принцип усреднения. Ю. А. Митропольский

6547. О канонических уравнениях механики. Тири (Remarques sur les équations canoniques de la mécanique. Thiry Y.), Ann. Scuola norm. super. Pisa sci. fis. e mat., 1959, **13**, № 2, 205—221 (франц.)

Предлагается матричная обработка канонических уравнений для уравнений движения динамической системы с n степенями свободы в форме Лагранжа. Исходя из теоремы Картана о существовании для этих уравнений инвариантной интегральной формы

$$\Omega = \textstyle\sum_i dp_i \wedge dq_i - dH \wedge dt,$$

можно получить канонические уравнения Гамильтона в матричной форме

$$E\begin{bmatrix}\dot{p}\\ \dot{q}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_p\\ H_q\end{bmatrix},$$

составив предварительно характеристическую систему для интегральной формы Ω. Эта характеристическая система получается от приравнивания нулю производных Ω по p_i, q_i, t, вычисленных предварительно с помощью матричного выражения $\Omega(d, \delta)$. Подобная форма записи позволяет уяснить роль оператора E в фазовом пространстве. При рассмотрении проблемы замены канонических переменных p_i, q_i, не зависящих от времени в фазовом пространстве, предлагаются канонические уравнения движения с новыми переменными r_i, s_i в тензорной форме, позволяющие вывести соотношение между скоростью V^α фигуративной точки системы и градиента гамильтониана H в этой точке: $F_{\alpha\beta}V^\alpha=\mathrm{grad}_\beta H$, где $F_{\alpha\beta}$ — некоторый антисимметричный тензор. Поскольку вышеуказанная замена переменных p_i, q_i на r_i, s_i дает канонические уравнения Гамильтона в виде: $J'EJ\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}H_r\\ H_s\end{bmatrix}$, где J — матрица Якоби, автор формулирует "условие каноничности" $J'EJ=E$, которое непосредственно приводит к образованию скобок Лагранжа и скобок Пуассона. Применение матричного метода к методу вариации канонических постоянных дает возможность записать уравнения Лагранжа теории возмущений в виде: $\dot{Z}=KEK'\,\mathrm{grad}_Z R$, где R — пертурбационная функция.

Доказывается теорема: Если гамильтониан H явно зависит от времени, можно, вводя добавочный параметр, записать уравнения движения в виде дифференциальной канонической системы $2n+4$-го порядка, интегрирование которой сводится к интегрированию дифференциальной канонической системы порядка $2n$ и к одной квадратуре. На основе этого положения возможна запись уравнения Гамильтона — Якоби в виде уравнения в частных производных

$$\gamma^{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial q^\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q^\beta}=1.$$

Пользуясь матричным методом изложения, автор указывает на ряд его преимуществ перед другими методами, не только в смысле простоты записи, но и в смысле применения его как метода исследования в подобного рода вопросах. Е. Н. Поляхова

6548. О нелинейных дифференциальных уравнениях. Гарсия (On non-linear differential equations. Garcia Godofredo. Actas Acad. Cienc. Lima, 1956, 19, 27—50) (англ.)

6549. О нахождении функций влияния параболической арки. Меляховецкий (Про знаходження функцій впливу параболічної арки. Меляховецький А. С.), Прикл. механіка, 1959, 5, № 3, 340—343 (укр., рез. русск.)

Рассматривается параболическая арка, жесткость которой изменяется по закону $B=B_0\sec\Theta$. Показано, что функция влияния касательных перемещений арки может быть найдена как функция Грина краевой задачи для дифференциального уравнения $y^{VI}=0$. Даны выражения для функций влияния двухшарнирной и бесшарнирной арок и консоли. Резюме автора

6550. Плоская n-слойная проблема сейсмологии с постоянной скоростью фронта волны любого наклона и при любом положении источника. Вебер (Das ebene n-Schichtenproblem der Reflexionsseismik mit konstanten Frontgeschwindigkeiten beliebigen Neigungen und beliebiger Lage der Quelle. Weber Max), Geofis. pura e appl., 1959, **43**, № 2, 12—22 (нем.; рез. англ.)

6551. Классификация дифференциальных уравнений Горева — Парка. Веретенников Л. П., Электричество, 1959, № 11, 13—20

6552. К вопросу о различном написании дифференциальных уравнений Горева — Парка (в переменных ψ). [В порядке обсуждения]. **Веретенников Л. П., Вилесов Д. В.**, Электричество, 1959, № 11, 7—12

6553. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Гамкрелидзе Р. В., Изв. АН СССР, Сер. матем., 1958, **22**, № 4, 449—474

Рассматривается задача оптимального по быстродействию регулирования (РЖМат, 1957, 8685) для систем, описываемых линейными уравнениями

$$\dot{x}^i=\sum_{\alpha=1}^n a_\alpha^i x^\alpha+b_1^i u^1+\ldots+b_r^i u^r\ (i=1,\ldots,n) \quad (1)$$

при условии, что допустимы кусочно-непрерывные управляющие функции $u^i(t)$, стесненные условием

$$|u^i(t)|\leqslant 1. \quad (2)$$

Дается подробное изложение результатов, опубликованных кратко ранее (РЖМат, 1958, 7764). Доказываются теоремы существования оптимальных траекторий, выясняются вид оптимального управления $u(t)$ и структура области фазового пространства $\{x^i\}$, из которой точка $x^i=0$ достижима оптимальным управлением. Рассматривается задача синтеза системы регулирования (определение управления u в виде функции фазовых координат $u(x)$), дается параметрическое представление поверхности переключения управлений u (поверхности, при переходе которой релейная функция $u(t)$ меняет знак) и описывается приближенный метод построения этой поверхности. Приведем некоторые результаты (для $r=1$). Основной важный вывод: в линейных системах оптимальный режим ни на каком участке времени не может быть скользящим (т. е. не может быть предельным для последовательности управлений $u_\varepsilon(t)$ с неограниченно сгущающимися моментами смен знака $u_\varepsilon(t)$). В дальнейшем предполагаем, что система (1) является невырожденной, т. е. вектор $b=\{b_1^i\}$ не лежит ни в каком инвариантном подпространстве размерности $\leqslant n-1$ преобразования $A(\{A\}_{ij}=a_j^i)$ (в случае вырожденности (1) время перехода из положения $x=\xi_0$ в положение $x=\xi_1$ либо не зависит от выбора $u(t)$, либо задача сводится к аналогичной задаче для системы меньшей размерности). Если ξ_0 — фиксированная точка пространства $\{x^i\}$ и $\Omega(t)$ — множество точек, до которых можно дойти за время t при помощи произвольного допустимого управления с начальным условием $\{x^i(0)\}=\xi_0$, то $\Omega(t)$ — выпукло, все оптимальные управления $u(t)$ и соответствующие им оптимальные траектории $x^i(t)$, выходящие из ξ_0, содержатся в множестве управлений и траекторий, получаемых при решении следующей системы уравнений и неравенств:

$$\begin{aligned}&\dot{x}=Ax+bu,\ x(0)=\xi_0,\\ &\dot{\psi}=-A'\psi\ (A'\text{ — транспонированная матрица }A)\\ &u(t)=\mathrm{sign}\,\psi(t)\cdot b,\\ &\psi(0)\,x(0)=\psi(0)\,(Ax(0)+bu(0))\geqslant 0.\end{aligned} \quad (3)$$

Эта система определяет экстремальные управления и выражает в рассматриваемом случае общий принцип максимума Л. С. Понтрягина (РЖМат, 1957, 8615). Если $u_1(t)$, $u_2(t)$ — оптимальные управления, переводящие фазовую точку ξ_0 по оптимальным траекториям

из положения ξ_0 в положение ξ_1 за время T, то $u_1 \equiv u_2$, $x_1^i(t) = x_2^i(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Если ξ_0, ξ_1 — две произвольные точки фазового пространства $\{x^i\}$, соединимые траекторией уравнений (1) при помощи некоторого допустимого управления $(u^1(t), \ldots, u^r(t))$, то существует оптимальное управление, переводящее фазовую точку из положения ξ_0 в положение ξ_1 по оптимальной траектории. Н. Н. Красовский

6554. Проблема качества для нелинейных авторегулируемых систем с квадратичной метрикой. Летов А. М., Изв. АН СССР. Отд. техн. н. Энерг. и автоматика, 1959, № 3, 25—31

Рассматривается регулируемая система, описываемая уравнениями

$$\dot{x}_k = \sum_\alpha b_{k\alpha} x_\alpha + f_k(x_1, \ldots, x_n, t) \quad (k = 1, \ldots, n), \qquad (1)$$

где x_k — обобщенные координаты системы, $b_{k\alpha} = \text{const}$, f_k — нелинейные функции, числа $b_{k\alpha}$ и функции f_k зависят от параметров $p_1, \ldots, p_m$. Пусть R — расстояние изображающей точки M в фазовом пространстве $\{x_s\}$ системы от начала координат. Изучаются следующие проблемы качества регулирования:

1. Пусть B — область пространства параметров $\{p_1, \ldots, p_m\}$, в которой система (1) устойчива (асимптотически). Для каждой точки P из B требуется определить момент t^*, при котором фазовое расстояние R изображающей точки удовлетворяет условию

$$R(t)/R(0) < e^{-a} \quad (t > t^*),$$

где a — заданное положительное число.

2. Требуется определить подобласть B' в области B, для которой время t^* не превосходит заданного числа t^{**}. Для решения задачи система (1) преобразуется заменой переменных

$$\sum_k a_{kl} x_k = \sqrt{a_{ll}}\, R\, y_l, \quad R^2 = \sum_{k,l} a_{kl} x_k x_l,$$

где форма $\sum a_{kl} x_k x_l$ определяет метрику фазового пространства системы. Указывается первый квадратичный интеграл преобразуемой системы $F(y)$ и интегрированием уравнения для $R(t)$ $\dot{R} = -WR + \Phi/R$ (W — квадратичная форма y_l, Φ выражается известным образом через y_l, f_k, R) выводятся оценки скорости затухания переходного процесса. Эти оценки определяются экстремальными значениями формы W на сфере $F = 1$, а также оценками нелинейных функций f_s ($|f_s| \leqslant L_s R$).

Приводятся конкретные примеры оценки качества регулирования по методу, данному в статье (изучается система $T^2 \dddot{\psi} + U \ddot{\psi} + k\dot{\psi} + \mu = 0$, $\dot{\mu} = f(\sigma)$. $\sigma = a\psi + E\ddot{\psi} + G^2 \dddot{\psi} - \frac{1}{e}\mu$, T^2, U, k — постоянные, a, E, G^2, e — параметры, $f(\sigma)$ — нелинейная функция).

Н. Н. Красовский

6555. О математической трактовке систем автоматического регулирования. Хан (Über die mathematische Behandlung von selbsttätigen Regelungsvorgängen. Hahn Wolfgang), Math.-phys. Semesterber., 1959, 6, № 3-4, 233—244 (нем.)

6556. Об отражении слабых разрывов от центра сопла. Рыжов С. В., Чернявский С. Ю., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 1, 86—92

Авторы продолжают исследования О. С. Рыжова, впервые подробно изучавшего трансзвуковые течения в пространственном сопле Лаваля вблизи центра течения. На этот раз изучается случай, когда на характеристических поверхностях, проходящих через центр, имеют место разрывы первых производных скоростей. Дается подробное обсуждение этих случаев.

Ф. И. Франкль

6557. Условия на ударных волнах в общей теории относительности. Скрипкин В. А., Докл. АН СССР, 1958, 123, № 5, 799—802

Рассматривается интегральная форма уравнений, описывающих движение идеальной жидкости в общей теории относительности: уравнения сохранения полного 4-импульса

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau_3^*} (-g)(w u^i u^0 - g^{i0} p - t^{i0})\, d\tau =$$

$$= \int_\sigma [p(g^{i\alpha} - g^{i0} v^\alpha) - t^{i\alpha} + t^{i0} v^\alpha](-g)\, n_\alpha\, d\sigma,$$

уравнение неразрывности

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau_3^*} \rho u^0 \sqrt{-g}\, d\tau = 0,$$

где τ_3^* — пространственный жидкий объем; σ — поверхность, ограничивающая объем; n_α — вектор внешней нормали в σ.

Для любой изолированной кусочно-гладкой поверхности разрыва $\sum$, движущейся с нормальной скоростью D и целиком лежащей внутри объема τ_3, который неподвижно с ней скреплен и совпадает в данный момент времени с τ_3^*, и для любой функции $A(t, x^1, x^2, x^3)$ имеет место формула

$$\frac{d}{dt}\int_{\tau_3} A\, d\tau = \frac{d}{dt}\int_{\tau_3^*} A\, d\tau + \int_\sigma A(D_n - v^\alpha n_\alpha)\, d\sigma,$$

где D_n — нормальная скорость на поверхности σ объема τ_3. При стягивании объема τ_3 к поверхности $\sum \frac{d}{dt}\int_{\tau_3} A\, d\tau$ стремится к нулю равномерно относительно t. Применяя эту формулу к исходным интегральным уравнениям, автор получает следующие выражения:

$$[(-g)\{w u^0 u^i (D - v_n) - p(g^{i0} D - g^{i\alpha} n_\alpha) + t^{i0} D - t^{i\alpha} n_\alpha\}] = 0,$$

$$[\rho\sqrt{-g}\, u^0 (D - v_n)] = 0;$$

здесь квадратные скобки означают скачок заключенных в них величин.

В качестве примера рассматривается центрально симметричное поле и показывается, что в этом случае компоненты метрического тензора непрерывны при переходе через поверхность сильного разрыва. Указываются также условия, налагаемые на производные этих компонент.

В заключение ставится задача с данными Коши на поверхности сильного разрыва как в случае центрально симметрического поля, так и произвольного поля тяготения. Ю. Я. Погодин

6558. О звуковых барьерах при исследованиях методом годографа. Ладфорд, Шот (On sonic limit lines in the hodograph method. Ludford G. S. S. Schot S. H.), Math. Z., 1957, 67, № 3, 229—231 (англ.)

6559. Характеристические направления уравнений движения неньютоновских жидкостей. Эриксен (Characteristic direction for equations of motion of non-New

tonian fluids. Ericksen J. L.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 4, 1557—1562 (англ.)

Рассматриваются несжимаемые жидкости, для которых тензор напряжений t_j^i и тензор скоростей деформации d_j^i связаны нелинейной зависимостью: $t_j^i = -p\,\delta_j^i + F_1 d_j^i + F_2 d_k^i d_j^k$, где p — гидростатическое давление, а F_1 и F_2 — произвольные дифференцируемые функции аргументов: $\mathrm{II} = -\frac{1}{2} d_j^i d_i^j$, $\mathrm{III} = \det d_j^i$. Для таких жидкостей известно, что характеристические направления уравнений движения обладают единичными векторами ν_i, удовлетворяющими уравнению

$$F(\nu_i) \equiv 2U^2 + 2U U_i^i + (U_i^i)^2 - U_j^i U_i^j = 0,$$

где $U = F_1 + \mu^i \nu_i F_2$, $\mu_i = d_{ij}\nu^j$,

$$U_j^i = F_2 (d_j^i - \nu^i \mu_j) +$$

$$+ 2(\mu^i - \nu^i \mu_k \nu^k)\left(\mu^m d m_j \frac{\partial F_1}{\partial \mathrm{III}} - \mu_j \frac{\partial F_1}{\partial \mathrm{II}}\right) +$$

$$+ 2(d_m^i \mu^m - \nu^i \mu_m \nu^m)\left(\mu^n d_{nj} \frac{\partial F_2}{\partial \mathrm{III}} - \mu_j \frac{\partial F_2}{\partial \mathrm{II}}\right).$$

Доказываются следующие теоремы:

1. Необходимое и достаточное условие для отсутствия действительных характеристических направлений заключается в том, что $F(\nu_i) > 0$.

2. Когда собственные значения тензора d_j^i все различны, необходимое и достаточное условие отсутствия действительного характеристического направления, перпендикулярного к собственному вектору тензора d_j^i, заключается в выполнении неравенств

$$\frac{t_i - t_j}{d_i - d_j}\left\{\frac{\partial (t_i - t_j)}{\partial (d_i - d_j)}\bigg|_{d_k = \mathrm{const}}\right\} > 0 \quad (i, j, k \neq).$$

3. Векторы ν_i, $d_{ij}\nu^j$, $d_i^k d_{km}\nu^m$ линейно зависимы только в том случае, когда ν_i перпендикулярен к собственному вектору тензора d_j^i.

4. Экстремальные значения функций $F(\nu_i) = 2F_1 G(\nu_i)$ и $G(\nu_i) = F_1 + 2(\mu^i - \nu^i \mu_k \nu^k)\left(\mu^m d_{mi} \frac{\partial F_1}{\partial \mathrm{III}} - \mu_i \frac{\partial F_1}{\partial \mathrm{II}}\right)$ достигаются только при таких значениях ν_i, когда векторы ν_i, $d_{ij}\nu^j$, $d_i^k d_{km}\nu^m$ линейно зависимы.

Ю. Я. Погодин

6560. Решение задачи об обтекании тела вращения. Сидоров О. П., Тр. Казанск. авиац. ин-та, 1958, 38, 23—42

Рассматривается продольное обтекание тела вращения потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Устанавливается соотношение, связывающее функцию тока $\psi(x, r)$ со скоростью потока v в точках поверхности тела

$$\psi(x, r) = -\frac{r}{4\pi}\iint_s \frac{v\cos\Theta\, ds}{\rho}, \tag{1}$$

$$\rho = \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2 + r^2 + 2\eta r\cos\Theta},$$

здесь η — расстояние от точки интегрирования до оси. Интегрирование ведется по всей поверхности тела $ds = \eta\, d\Theta\, dl$. Скорость на поверхности может быть определена либо из интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$\iint_s \frac{v\cos\Theta}{\rho} ds = 2\pi v_\infty r, \tag{2}$$

либо из интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$v = \frac{1}{2\pi}\iint_s \frac{v\cos\Theta\cos(n, \rho)}{\rho^2} ds - v_\infty \cos(t, x), \tag{3}$$

где t — касательная к контуру в меридианальном сечении, n — внешняя нормаль. Доказывается, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (3), имеет лишь тривиальное решение. Уравнение (3) приводится к виду, удобному для применения метода последовательных приближений. Отмечается, что уже первое приближение является обычно хорошей аппроксимацией.

Д. П. Костомаров

6561. К теории плоских течений газа. Юрьев И. М., Прикл. матем. и механ., 1955, 23, № 1, 201—208

Предлагается новый эффективный метод преобразования газодинамических уравнений типа С. А. Чаплыгина. Этот метод позволяет шаг за шагом переходить от более простых к более сложным уравнениям, общее выражение коэффициентов которых содержит большее число произвольных постоянных. Этим путем автор переходит от уравнений Трикоми — Фальковича к более сложным уравнениям, допускающим хорошее приближение на большом диапазоне околозвуковых скоростей уравнения Чаплыгина для идеального газа. Автор применяет свой метод к расчету околозвуковых течений в соплах Лаваля. Метод автора является дальнейшим развитием того метода, который впервые предложил Эйлер (Интегральное исчисление т. III, разд. 2, гл. V РЖМат, 1959, 10683 К), а затем применили к уравнениям Чаплыгина Перес и Домбровский.

Ф. И. Франкль

6562. Течение сжимаемой жидкости в гиперболическом канале. Эзоклав (Flow of a compressible fluid in a hyperbolic channel. Özoklav Hasan), J. Math. and Mech., 1959, 8, № 1, 27—45 (англ.)

Автор рассматривает плоское стационарное течение идеального газа в канале, стенки которого имеют форму гиперболы. Применяемый метод основан на использовании условий динамической возможности движения (А. А. Фридман), которые в плоском случае сводятся к уравнению

$$\mathrm{rot}\left(\frac{\mathbf{V}\times\mathrm{rot}\dfrac{d\mathbf{V}}{dt} - \dfrac{d\mathbf{V}}{dt}\mathrm{div}\mathbf{V}}{\mathbf{V}\dfrac{d\mathbf{V}}{dt}}\right) = 0 \tag{1}$$

(исключается течение, для которого $\mathbf{V}\frac{d\mathbf{V}}{pt} = 0$).

Автор предполагает, что линии тока и их ортогональные траектории образуют изометрическую координатную сетку (α, β) ($\beta = \mathrm{const}$ вдоль линии тока, $\alpha = \mathrm{const}$ вдоль ортогональной траектории). Первая квадратичная форма имеет вид: $ds^2 = w^{-2}(d\alpha^2 + d\beta^2)$. В этих координатах уравнение (1) дает семейство течений

$$V = g(\beta)\, G(\alpha, \beta), \tag{2}$$

где

$$\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial\alpha\partial\beta} - \frac{1}{w}\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial w} = 0, \tag{3}$$

обладающих одними и теми же линиями тока. Для течения в гиперболическом канале $x = a\,\mathrm{ch}\,\alpha\cos\beta$,

$y = a \operatorname{sh}\alpha \sin\beta$, стенки соответствуют значениям $\beta = \beta_0 < \frac{\pi}{2}$, $\beta = \pi - \beta_0$.

Рассматривая (2), можно непосредственно видеть, что дозвуковой поток ускоряется, а сверхзвуковой замедляется в направлении сужения канала. Возникающая в рассматриваемом случае краевая задача для уравнения (3) точно решается методом Римана. Решение имеет вид:

$$G(u, v) = G(u_0, v_0)\, R(u, v; u_0, v_0) +$$

$$+ \int_{u_0}^{u} R(u, v; \xi, v_0)\psi'(\xi)d\xi + \int_{v_0}^{v} R(u, v; u_0, \eta)\varphi'(\eta)d\eta, \quad (4)$$

где $u = \operatorname{ch} 2\alpha$, $v = \cos 2\beta$, $\varphi(v) = G(u_0, v)$, $\psi(u) = G(u, v_0)$, функция Римана

$$R(u, v; \xi, \eta) =$$

$$= \left(1 - \frac{(u-\xi)(v-\eta)}{(v-\xi)(u-\eta)}\right)^{-1/2} \times$$

$$\times F\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{(u-\xi)(v-\eta)}{(v-\xi)(u-\eta)}\right).$$

Эта функция, как показывает автор, может быть выражена через хорошо затабулированные эллиптические интегралы.

В заключение автор рассматривает конкретный пример и приводит результаты численных расчетов по формуле 4). И. Н. Кузнецов

6563. О линеаризированных уравнениях течений газа в аксиально-симметричных компрессорах. Кшивоблоцкий (On the linearized mathematical representation of the flow in axial compressors. Krzywoblocki M. Z. v.), Österr. Ingr-Arch., 1959, **13**, № 1, 27—49 (англ.)

Рассматривается вихревое течение идеального газа между вращающимися лопастями компрессора. Допускается наличие внешних сил и притока тепла. Вводится система криволинейных, вообще говоря, не ортогональных координат, связанная с движущейся частицей. Записываются линеаризованные уравнения движения в этих координатах. Н. Н. Кузнецов

6564. Об уравнениях невязкой сжимаемой жидкости в аксиально-симметричных компрессорах. I. Кшивоблоцкий (On the mathematical formulation of the motion of an inviscid compressible fluid in axial compressors. I. Krzywoblocki M. Z. v.), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1959, **7**, № 1, 35—55 (англ.)

Первая часть статьи, посвященной подробному изложению вопросов, затронутых в работе (реф. 6563). Н. Н. Кузнецов

6565. Об одной возможности получения в замкнутой форме точных интегралов уравнения Рейнольдса. Котляр Я. М., Докл. АН СССР, 1959, **127**, № 1, 59—62

Рассматривается краевая задача для уравнения Рейнольдса

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(h^3 \frac{\partial P}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(h^3 \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0$$

в прямоугольнике $0 < x < 2\pi$, $-a < y < a$ при следующих условиях: P регулярно внутри прямоугольника, за исключением точки $\zeta_j = x_j + iy_j$, непрерывно при $x = 0$ и $x = 2\pi$, а при $y = \pm a$ оно принимает заданное значение. Здесь P обозначает функцию давления вязкого баротропного газа. В статье приводятся результаты решения поставленной задачи в случае периодического коэффициента h, имеющего вид $h = 2\delta^* (1 + 3c\operatorname{tg}^2 x/2)^{-2/3}$. Решение выражается через гармоническую функцию, которая строится явно как вещественная часть комплексного потенциала некоторого фиктивного движения идеальной несжимаемой жидкости. Д. Е. Долидзе

6566. Увеличение пограничного слоя на вращающемся теле: ускоренное движение. Вадхва (Boundary layer growth on a spinning body: accelerated motion Wadhwa Y. D.), Philos. Mag., 1958, **3**, № 26, 152—158 (англ.)

6567. Некоторые аспекты нелинейной теории гидродинамической устойчивости. Уотсон (Some aspects of the non-linear theory of hydrodynamic stability. Watson J.), Abstr. Short communs Internat. Congress Math. in Edinburgh. Edinburgh, Univ. Edinburgh, 1958, 150 (англ.)

6568. Заметка о проблеме наклонного берега. Ловерье (A note on the problem of the sloping beach Lauwerier H. A.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1959, **A62**, № 3, 229—240; Indagationes math. 1959, **21**, № 3, 229—240 (англ.)

Задача о волновом движении тяжелой жидкости в случае наклонного берега сводится к определению функции Ф, гармонической в той части нижнего полупространства, которая ограничена плоскостью $z = 0$ и плоскостью $z = \operatorname{tg}\theta x$ ($\theta < \pi/2$), и удовлетворяют граничным условиям

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 0, \quad \varphi = 0 \qquad \text{(дно)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0, \quad \varphi = \theta \text{ (свободная поверхность)}$$

Здесь $r\varphi$ — цилиндрические координаты, g — ускорение силы тяжести, t — время. Если разыскивать решение в виде:

$$\Phi = e^{i(\sigma t - kz)} f(r, \varphi),$$

то мы придем к задаче определения решения уравнения Гельмгольца $(\Delta_{r\varphi} - k^2)f = 0$, удовлетворяющего условиям

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 0, \ \varphi = 0; \quad \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} - mf = 0, \ \varphi = \theta, \ m = \frac{\sigma^2}{g}.$$

Эта задача была предметом многочисленных исследований.

В отличие от других исследователей автор опирается на метод Данцига (РЖМат, 1960, 5355, 5356) и получает новые интегральные представления частных решений этой задачи. При исследовании существенным образом используется тот факт, что функция

$$\Phi_0 = e^{i(\sigma t + kz)} \exp\{ikr \operatorname{sh}\{\alpha + i(\theta - \varphi)\}\}$$

является гармонической и удовлетворяет условию на свободной поверхности ($\varphi = \theta$). Это позволяет автору свести задачу к некоторому функциональному уравнению, которое возникает из граничного условия при $\varphi = 0$. По сравнению с исследованиями Петерса и Розо предлагаемый анализ значительно проще. Особенная простота достигается в задаче о „вертикальной стенке“ ($\theta = \pi/2$), которая автором рассмотрена подробно. Н. Н. Моисеев

6569. Об одной плоской задаче, относящейся к уравнению Лапласа. Векилов Ш. И., Тр. Ин-та физ. и матем. АН АзербССР, 1953, **6**, 40—61 (рез. азерб.)

Рассматривается следующая краевая задача для кусочно-регулярной гармонической функции. В плоской области g_1, ограниченной замкнутыми непересекающимися кривыми $L_0, L_1, \ldots, L_m$, σ с непрерывной кривизной, из которых L_0 содержит внутри все остальные, и в области g_2, ограниченной замкнутыми непересекающимися кривыми $\sigma, L_{m+1}, L_{m+2}, \ldots, L_{m+n}$, с непрерывной кривизной, из которых σ содержит внутри все остальные, ищутся решения уравнений Лапласа $\Delta U = 0$, удовлетворяющие условиям:

$$U(P)_+ = f(P) \text{ на } \sum_{R=0}^{m+n} L_k,$$

$$k_1 \frac{dU}{dn_P}\Big|_- = k^2 \frac{dU}{dn_P}\Big|_+ \text{ на } \sigma,$$

$$U|_+ = U|_- \text{ на } \sigma,\ k_1, k_2 > 0.$$

Методами теории потенциала задача сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма, что позволяет доказать существование и единственность решения поставленной задачи. Д. З. Авазашвили

6570. О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем. Мовчан А. А., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 3, 483—493

На основе теорем прямого метода Ляпунова об устойчивости и неустойчивости исследована устойчивость прямолинейной формы свободно опертой упругой балки, находящейся под действием постоянного осевого усилия. Уравнения движения и краевые условия для такой балки имеют вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{a^2 N}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0;\ w(x,t) = \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

при $x=0;1$,

где x — безразмерная осевая координата ($0 \leqslant x \leqslant 1$), t — безразмерное время, отнесенное к величине $(\mu a^4/D)^{1/2}$, μ — масса единицы длины, D — жесткость, N — осевое усилие. Для построения решения автор, развивая результаты Н. Н. Красовского (РЖМат, 1957, 7878) и В. И. Зубова (РЖМат, 1 59, 1480К), вводит вспомогательное метрическое пространство и строит в нем соответствующие функционалы. Г. С. Шапиро

6571. Дифракция упругих волн в однородной среде, разрезанной по полуплоскости. Розо (Diffraction of elastic waves in a homogeneous medium clamped along a half-plane. Roseau Maurice), Communs Pure and Appl. Math., 1959, 12, № 1, 67—85 (англ.)

Рассматривается плоская задача о дифракции в однородной среде, разрезанной по полуплоскости $y = 0$, $x>0$, поперечной и продольной плоских монохроматических волн, падающих перпендикулярно оси z. Задача приводится к системе уравнений

$$\Delta\Omega + \sigma^2\Omega = 0;\ \operatorname{Im}\sigma > 0,$$

$$\Delta\theta + \tau^2\theta = 0;\ \operatorname{Im}\tau > 0,$$

где Ω и θ — функции, пропорциональные соответственно z-й составляющей ротора и дивергенции вектора смещения.

Краевые условия на линии разреза имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\Omega_y + \theta_x &= 0\\ \Omega_x - \theta_y &= 0\end{aligned}\right\} \text{ при } y = 0,\ x > 0.$$

Кроме естественных условий на бесконечности (функция распадается на падающую волну и рассеянную, удовлетворяющую условию излучения в подходящей форме) и в начале координат, автор накладывает еще ограничения на порядок роста Ω_1 и θ_1 вдоль разреза (Ω_1 и θ_1 — рассеянные волны). Функции $[\Omega_1]$ и $[\theta_1]$ (разрывы функций Ω_1 и θ_1 на линии $y = 0$, $x = 0$) удовлетворяют интегральному уравнению типа Винера — Хопфа. Обратно, решение этого интегрального уравнения, удовлетворяющее условиям Гельдера и некоторым условиям при $x \to 0$ и $x \to \infty$ приводит к решению заданной системы дифференциальных уравнений. В § 3 это интегральное уравнение решается обычным методом. Ю. И. Гросберг

6572. Об условиях на фронтах упругих волн, распространяющихся в неоднородной среде. Гвоздев А. А., Прикл. матем. и механ., 1959, 23, № 2, 395—397

Приводится вывод известных условий, которым должны подчиняться разрывы обобщенных решений уравнений динамики упругого тела. Работа А. А. Гвоздева дает более „аккуратный" вариант того вывода этих условий, который приведен в работе Г. А. Скуридина (РЖМат, 1960, 4095). В. М. Бабич

6573. О плоской задаче упругости некоторых анизотропных тел. Теодореску (Asupra problemei plane a elasticităţii unor corpuri anizotrope. VII. Corpuri acţionate de forţe masice oarecare. Teodorescu Petre P.), Comun. Acad. RPR, 1958, 8, № 9, 887—892 (рум.; рез. русск., франц.)

Автор, представляя компоненты тензора напряжений в виде:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \int X dx,\quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \int Y dy,\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x dy},$$

где F — функция напряжений Эри, X, Y — компоненты массовой силы — известные функции, приводит различные формы уравнений, которым должна удовлетворять функция напряжений при разных видах анизотропии материала. Например, для ортотропного тела

$$D_1 F = \frac{1}{E_x}\int\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}dx + \frac{1}{E_y}\int\frac{\partial Y}{\partial x^2}dy - \frac{\mu_{xy}}{E_x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\mu_{xy}}{E_y}\frac{\partial X}{\partial x},$$

где оператор

$$D_1 = a\frac{\partial^4}{\partial x^4} + b\frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + c\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + d\frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + e\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

a, b, c, d, e — зависят от упругих констант: E_x, E_y, M_{xy}.

Основываясь на теореме единственности для плоской задачи, автор формулирует теорему об однозначности функции напряжений в односвязном анизотропном теле при наличии объемных сил, уравновешенных контурной нагрузкой. Следуя методу Фурье, автор предлагает находить функцию напряжений F как сумму частных решений вида $F = e^{\alpha x + \beta y}$, где α и β пробегают множество значений, подчиняющихся уравнению $a\alpha^4 + b\alpha^3\beta + c\alpha^2\beta^2 + d\alpha\beta^3 + e\beta^4 = 0$. Объемные силы в правой части уравнения разлагаются в ряд подобным же образом.

См. также РЖМех, 1960, № 2, 2373. Г. Н. Савин

6574. Изгибные ударные волны в балках. Флюгге, Заяц (Bending impact waves in beams. Flügge W., Zajac E. E.), Ingr-Arch., 1959, 28, 59—70 (англ.)

Применяется теория Тимошенко, учитывающая инерцию вращения и влияние перерезывания, к случаю полубесконечной балки, совершающей поперечные колебания под действием концевого изгибающего момента. При этом точка приложения момента считается неподвижной, а момент — постоянным. Общее решение, полученное с помощью преобразования Лапласа, асимптотически исследуется при больших и малых значениях времени, а также по методу стационарной фазы. Решения, полученные различными способами, доведены до численных расчетов и представлены в виде большого числа графиков. Я. С. Уфлянд

6575. Изгиб круглой тонкой плиты концентрической нагрузкой при общих граничных условиях. Бассали, Давуд (Bending of a thin circular plate concentrically loaded under a general boundary condition. Bassali W. A., Dawoud R. H.), Proc. Math. and Phys. Soc. Egypt, 1957 (1968), № 21, 1—18 (англ.)

Рассматривается задача об изгибе тонкой круговой плиты под действием нормальной нагрузки, распределенной по всей площади или по площади концентрического круга меньшего радиуса. Нагрузка задается в виде ряда $p = \sum_{n=0}\sum_{k=0} r^n (b_{nk}\cos k\theta - c_{nk}\sin k\theta)$ (r, θ — полярные координаты). Граничные условия ставятся следующим образом: на краю плиты задается прогиб $w = 0$ и отношение изгибающего и скручивающего мо-

ментов, причем автор различает 5 частных случаев граничных условий этого типа. Используется известное комплексное представление прогибов, моментов и перерезывающих сил через две функции $\Omega(z)$ и $\omega(z)$ ($z = x + iy$). Сформулировав граничные условия для функций комплексного переменного, авторы разыскивают частное решение уравнения прогибов, зависящее от нагрузки и функции Ω, ω, в виде рядов Тейлора или соответственно Лорана с неопределенными коэффициентами и добавочными логарифмическими членами. Коэффициенты рядов Тейлора определяются из граничных условий. В случае плиты, нагруженной частично, разыскиваются различные аналитические выражения функций для нагруженной и ненагруженной областей; коэффициенты рядов определяются из условий на краю плиты и на линии раздела этих областей. Выведены явные выражения коэффициентов и функций для всех рассмотренных случаев. Некоторые из задач этого рода решались ранее советскими учеными (Механика в СССР за 30 лет, М. Изд-во АН СССР, 1957). С. Г. Лехницкий

6576. О спектре собственных частот пластинки с острым краем. Маховер Е. В., Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена, 1958, **197**, 113—118

Исследуется спектр уравнения изгибных колебаний упругой пластинки переменной толщины $2h(x, y)$:

$$(h^3u_{xx})_{xx} + \sigma(h^3u_{yy})_{xx} + (h^3u_{yy})_{yy} + \\ + \sigma(h^3u_{xx})_{yy} + 2(1-\sigma)(h^3u_{xy})_{xy} = \lambda h u \qquad (1)$$

при обычных условиях закрепления края (РЖМат, 1958, 3796). Уравнение (1) — эллиптическое, вырождающее на той части края, где $h = 0$. Рассматривается прямоугольная пластинка; предполагается, что если нижний край пластинки расположить на оси x, то толщина удовлетворяет неравенствам $c_1y^\alpha \leqslant h \leqslant c_2y^\alpha$, где c_1, c_2, α — положительные постоянные. Доказывается, что спектр уравнения (1) дискретен при $\alpha < 2$ и недискретен при $\alpha > 2$. С. Г. Михлин

6577. Расчет пологих оболочек методом полос с применением комплексной функции. Мухадзе Л. Г., Сакартвелос ССР Мецниереба-та Академиис моамбе, 1959, 22, № 3, 313—319 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1959, 22, № 3, 313—319

Для расчета тонких пологих оболочек принимаются исходными уравнения В. З. Власова. Эта система уравнений сводится к одному уравнению восьмого порядка, которое, вводя комплексную функцию $\varphi = \omega + i\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}\varphi$, можно заменить уравнением четвертого порядка

$$\nabla^2\nabla^2\varphi - i\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Eh^2}\nabla_k^2\varphi = \frac{z}{D}. \qquad (1)$$

Здесь w — перемещение, φ — функция напряжения, k_1, k_2 — кривизны и $\nabla_k^2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_2\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_1\frac{\partial}{\partial y}\right)$. Уравнение (1) применимо к оболочкам с переменной кривизной и методом полос сводится к системе обыкновенных дифференциально-разностных уравнений, которую рекомендуется решать вариационным методом. А. Н. Тюманок

6578. Первая граничная задача для симметрической оболочки частного вида. Цховребадзе Д. С., Сакартвелос ССР Мецниереба-та Академиис моамбе, 1959, 22, № 2, 137—144 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1959, 22, № 2, 137—144 (русск.)

Применяется метод И. Н. Векуа для расчета призматических оболочек (РЖМат, 1956, 3854) к расчету пологой оболочки:

$$x_3 = h^+ = c\left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{b^2}\right),$$

$$x_3 = h^- = -c\left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{b^2}\right) \quad (c > 0),$$

$$x_1^2 + x_2^2 = \varepsilon^2 b^2 \quad (0 < \varepsilon \leqslant 1), \quad c \ll b, \quad \frac{1}{b^2} \ll 1,$$

под действием силы тяжести с закрепленными краями. Перемещения по трем направлениям найдены разложением в ряд по $\frac{1}{b^2}$. Отмечается, что расчет оболочки как пластинки усредненной толщины дает значительное отклонение (39%). А. Н. Тюманок

6579. Расчет некруговой замкнутой цилиндрической оболочки при произвольных граничных условиях. Малкина Р. Л., Инженерный сб., 1958, **26**, 25—38

Исследуется решение, полученное в предыдущей работе автора (РЖМех, 1955, 4470), в которой комплексное уравнение В. В. Новожилова

$$\Delta[\rho\Delta(\widetilde{T})] + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\widetilde{T}}{\partial\eta}\right) + i2b^2\frac{\partial^2\widetilde{T}}{\partial\xi^2} = F(\xi, \eta)$$

для цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения путем разложения искомой функции в ряд по степеням малого параметра и применения метода Фурье приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В результате анализа корней характеристического уравнения задачи, выполненного методом А. Л. Гольденвейзера, показано, что введение обычных в теории длинных цилиндрических оболочек допущений позволяет упростить расчет. Библ. 3 назв. В. Я. Павилайнен

6580. Скалярное потенциальное поле двух коаксиальных цилиндрических электродов одинакового диаметра, заключенных в экранирующий цилиндр. Бёттхер (Das skalare Potentialfeld zweier koaxialer Zylinderelektroden gleichen Durchmessers mit Abschirmzylinder. Böttcher Friedrich), Arch. Elektrotechn., 1959, **44**, № 3, 189—202 (нем.)

Работа посвящена определению электростатического потенциала, создаваемого осесимметричной системой электродов, состоящей из двух соосных полубесконечных трубок одинакового радиуса $r_0 = 1$, находящихся на расстоянии $2s$ друг от друга. На трубки подан потенциал 0 и 1, причем они заключены внутри защитного цилиндра радиуса $h > 1$, находящегося при нулевом потенциале.

Представив значение потенциала при $r = 1$; $-s < z < s$ в виде ряда по полиномам Лежандра с неизвестными коэффициентами e_k, автор строит решения уравнения Лапласа в двух смежных областях $r < 1$ и $1 < r < h$, выразив их через неизвестные коэффициенты e_k. Условие непрерывности нормальной производной потенциала на границе между смежными областями $r = 1$; $-s < z < s$ приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения e_k. Исследование системы не проводится. М. И. Клиот-Дашинский

6581. Мультипольное представление внецентренного диполя и внецентренного двойного слоя. Е, Мартинек (Multipole representation of an eccentric dipole and an eccentric double-layer. Yeh G. C. K., Martinek J.), Bull. Math. Biophys., 1959, **21**, № 1, 33—60 (англ.)

Опираясь на известную формулу, выражающую потенциал, создаваемый источниками тока, в виде ряда по мультипольным источникам, расположенным в начале координат, авторы получают аналогичные разложения в двух частных случаях: для дипольного источника, не лежащего в начале координат, и для источника в виде двойного слоя, представляющего собой часть сферичес-

кой поверхности. Новых результатов работа не содержит. М. И. Клиот-Дашинский

6582. О постоянной распространения электромагнитного поля вдоль эллиптического цилиндра. Танифудзи, Омото (Tanifuji Shichiro, Omoto Osamu), Сибаура когё дайгаку кэнкю хококу, Res. Repts Shibaura Inst. Technol., 1956, № 2, 5—25 (японск.; рез. англ.)

6583. К статистической теории распространения радиоволн над идеально проводящей плоскостью. Канер Э. А., Басс Ф. Г., Докл. АН СССР, 1959, 127, № 4, 792—795

Вычисляются статистические характеристики электромагнитного поля, распространяющегося в среде со случайными флуктуациями диэлектрической проницаемости над идеально проводящей плоскостью. Флуктуации считаются малыми $\delta\varepsilon \ll \varepsilon$, но крупномасштабными $l \gg \lambda$, где l — радиус корреляции, а λ — длина радиоволны.

Исходными являются уравнения Максвелла: $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,(E+\xi) - k^2(\varepsilon+\delta\varepsilon)(E+\xi) = p\delta(r-r_0)$, где E — регулярная, а ξ — флуктуационная составляющая поля, $p = 4\pi k^2 d$, d — момент диполя, являющегося источником. Для флуктуационной составляющей получено уравнение $\Delta\xi + k^2\xi = -k^2 E\,\delta\varepsilon$, решение которого имеет вид: $\xi_\pm(r) = k^2\int_{z'>0} dr'\varphi_\pm(r; r')\,E_\pm(r')\,\delta\varepsilon(r')$, где $\varphi_\pm$ — функция Грина для волнового уравнения с граничными условиями первого или второго рода соответственно. Из полученного выражения следует, что на больших расстояниях от источника при любом законе распределения $\delta\varepsilon$ компоненты ξ распределены нормально. Вдали от интерференционных минимумов среднего поля фаза φ и относительная амплитуда $\dfrac{|E+\xi|}{|E|}$ электромагнитного поля имеют гауссовское распределение с одинаковой дисперсией: $\sigma = \dfrac{\overline{|\xi^2|}}{2|E^2|}$, а вблизи минимумов амплитуда распределена по закону Релея:

$$f(x) = x\exp(-x^2/2),$$

а фаза равновероятно, при этом флуктуации фазы и логарифма амплитуды не малы и не зависят от флуктуационных характеристик среды и конкретного вида поля:

$$\overline{\delta\varphi^2} = \frac{\pi^2}{3};\quad \overline{(\ln A - \overline{\ln A})^2} = \frac{\pi^2}{24}.$$

При условии $1 \ll kl \ll \sqrt{kL}$, z; $z_0 \ll L$, $l \gg \lambda$, где l — радиус корреляции диэлектрической проницаемости, $(0, 0, z)$ — точка расположения источника, $(L, 0, z)$ — точка наблюдения, получены выражения для среднеквадратичных флуктуаций, которые вместе со средним (регулярным) полем в данном случае (при нормальном распределении) дают полное статистическое описание электромагнитного поля.

Полученные результаты показывают, что наличие идеально проводящей плоской поверхности приводит к увеличению относительных флуктуаций электромагнитного поля по сравнению с безграничной средой, что связано с уменьшением регулярной составляющей в результате интерференции прямой и отраженной волн.

В. В. Кравцов

6584. О флуктуациях амплитуды и фазы волны, прошедшей через слой со случайными неоднородностями. Денисов Н. Г., Изв. высш. учебн. заведений. Радиофизика, 1959, 2, 316—318

Приводятся результаты расчета флуктуаций амплитуды и фазы волны, прошедшей через плоский слой, в котором, наряду с регулярным плавным изменением показателя преломления, имеются случайные неоднородности, средняя интенсивность которых также зависит от высоты.

Рассматривается скалярный случай. Решение волнового уравнения $\Delta E + k_0^2[\varepsilon(z) + \Delta\varepsilon(x, y, z)]E = 0$ $(k_0 = \omega/c)$ ищется в виде $E = \exp[\Phi_0(x, y, z) + \Phi_1(x, y, z)]$, где $\Phi_0(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\Phi_0 + (\nabla\Phi_0)^2 + k_0^2\varepsilon(z) = 0$. Тогда для $\Phi_1(x, y, z)$ получается уравнение $\Delta\Phi_1 + \Delta\Phi_1(2\nabla\Phi_0 + \nabla\Phi_1) + k_0^2\Delta\varepsilon(x, y, z) = 0$, которое после ряда упрощений, допустимых при предложении, что масштаб случайных неоднородностей l много больше длины волны и много меньше масштаба регулярного изменения $\varepsilon(z)$, $\varepsilon(z)$ изменяется плавно и $|\nabla\Phi_0| \gg |\nabla\Phi_1|$, принимает вид:

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial y^2} + 2ik_0\sqrt{\varepsilon(z)}\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + k_0^2\Delta\varepsilon(x, y, z) = 0.$$

Если неоднородный слой имеет толщину L_1 и внутри него находится слой толщины L_0, содержащий случайные неоднородности, то можно получить для спектра (преобразования Фурье) корреляционной функции уровня $F_A(x_1, x_2)$ и для спектра корреляционной функции фазы $F_S(x_1, x_2)$ формулы:

$$\underset{S}{F_A}(x_1, x_2) = \frac{k_0^2}{2}\int_0^{L_0} c(z)\,\frac{\sin^2}{\cos^2}\left\{\frac{x^2}{2k_0}\left[v(L_1) - v(z)\right]\right\}dz \times$$

$$\times \int_0^\infty F_0(x_1, x_2, \zeta)\,d\zeta,$$

где $c(z) = \dfrac{(\Delta\varepsilon)^2}{\varepsilon}$; $F_0(x_1, x_2, \zeta) = \dfrac{1}{(2\pi)^2}\iint_{-\infty}^{\infty} p(\xi\cdot\eta\cdot\zeta)\times$

$\times e^{-i(x_1\xi + x_2\eta)}\,d\xi\,d\eta$; $v(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{\varepsilon(z)}}$; $p(\xi\,\eta\,\zeta)$ — коэффициент корреляции флуктуаций диэлектрической проницаемости, из которых следует, что изменение среднего значения показателя преломления дает заметный эффект, если при медленном изменении $\varepsilon(z)$ ее отклонение от значения вне слоя не мало. В. В. Кравцов

6585. Точные решения уравнений движений магнитной гидродинамики, предельных к автомодельным. Кочина Н. Н., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 3, 528—531

Для уравнений магнитной гидродинамики найден класс решений, предельных к автомодельным, в которых все безразмерные функции зависят от $\lambda = \dfrac{\tau}{t}e^{r/r_0}$ или от $\lambda = \dfrac{r}{r_0}e^{-t/\tau}$. В первом случае, когда $\lambda = \dfrac{\tau}{t}e^{r/r_0}$, движение может происходить только плоскими волнами. Найдены три интеграла — вмороженности, адиабатичности (существующие всегда) и интеграл энергии (существующий не всегда). Когда существуют все три интеграла, решение находится в явном виде. Качественное поведение решения аналогично поведению решения при отсутствии магнитного поля. Во втором случае, когда $\lambda = \dfrac{r}{r_0}e^{-t/\tau}$, движение может происходить как с плоской, так и с осевой симметрией. При этом существуют те же интегралы. В случае осевой симметрии вместо одного интеграла вмороженности существуют два — для осевой и трансверсальной составляющих магнитного поля. При наличии интеграла энергии решение выражается алгебраическими формулами.

А. Г. Куликовский

6586. О некоторых случаях решения уравнений для неоднородных магнитногидродинамических волн. Нардини (Su un gruppo di casi relativi ad onde magnetoidrodinamiche non omogenee. Nardini Renato), Ann. mat. pura ed appl., 1957, **43**, 371—397 (итал.)
См. РЖФиз, 1959, № 2, 2520.

6587. Теория осциллирующего поглотителя в диффузионной среде. Симблерис (Teoria do oscilador absorvente em meio difusor. Cimbleris Borisas,) Anais Acad. brasil. cienc., 1956, **28**, № 4, 429—438 (порт.; рез. англ.)

Рассматривается уравнение диффузии нейтронов в бесконечной немультиплицирующей однородной среде с пульсирующим плоским поглотителем

$$D\partial^2\varphi/\partial x^2 - \sum_a \varphi(x) + a\delta(x)\, e^{i\omega t} = (1/v)\partial\varphi/\partial t.$$

С помощью преобразования Фурье по переменным x и t для нейтронного потока $\varphi(x, t)$ находится выражение

$$\varphi(x, t) = e^{i\omega t - Px}/2DP,$$

где P — комплексное число, определяемое параметрами ω, D, $\sum_a$. Приводится физическая интерпретация результата: характеристика нейтронных волн, вид волнового поля в асимптотических случаях

$$\omega^2 l_0^2 \gg 1,$$

$$\omega^2 l_0^2 \ll 1,$$

где l_0 — средняя длина волны в среде.

Ю. Н. Днестровский

6588. Об одномерных уравнениях обобщенной гидродинамики. Ольховский И. И., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 4, 143—147

Для решения бесконечной системы уравнений для моментов функции распределения, полученной автором ранее, предлагается пренебречь моментами порядка выше s в первых s уравнениях системы. В отличие от метода Энского—Чепмана ни вывод исходной системы, ни метод решения не налагают ограничений на величину $\frac{\Delta t_p}{\Delta t}$, где Δt_p — время релаксации одноатомного газа, Δt — характерный для рассматриваемого процесса интервал времени. Приводятся системы уравнений, полученные при учете моментов 3-го порядка, т. е. процессов переноса энергии и импульса и моментов 2-го порядка, т. е. переноса импульса. Одномерный случай допускает некоторые упрощения. Так, учитывая перенос только импульса, автор получает систему из 4 уравнений с четырьмя неизвестными функциями.

Т. А. Гермогенова

6589. О спектральном представлении аксиально-симметричной турбулентности Чандрасекхара. Ковалев А. А., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 6, 1220—1223

Рассматривается аксиально-симметричная турбулентность, т. е. турбулентность, в которой случайные поля всех гидродинамических элементов являются однородными и, кроме того, инвариантными относительно вращений вокруг некоторой выделенной оси (совпадающей, например, с направлением градиента поля температур). Принимается предположение о пренебрежимой малости всех моментных функций третьего порядка гидродинамических полей по сравнению со вторыми моментами („приближение Фридмана—Келлера"); в этом предположении из уравнений гидродинамики (записываемых в приближении теории конвекции) получается замкнутая система уравнений для вторых моментов (корреляционных функций) всех фигурирующих в задаче случайных полей. Далее автор подвергает полученные уравнения преобразованию Фурье и получает таким образом систему уравнений относительно спектральных плотностей гидродинамических полей; эти последние уравнения упрощаются, исходя из свойства инвариантности рассматриваемых полей относительно вращений вокруг выделенной оси. В заключение выписывается общее решение и некоторые частные решения полученной системы, аналогично тому, как это было сделано референтом (Яглом А. М., Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз., 1948, **12**, № 6, 500—522) для случая однородной и изотропной турбулентности в сжимаемой жидкости.

А. М. Яглом

6590. Пространственно-временные корреляции в стационарной изотропной турбулентности. Мюнх, Уилон (Space-time correlations in stationary isotropic turbulence. Münch G., Wheelon Albert D.) Phys. Fluids, 1958, **1**, № 6, 462—468 (англ.)

Рассматривается корреляция между компонентами Фурье скорости в моменты времени, разделенные интервалом τ для однородного, изотропного, случайного, стационарного поля. Расчет производится на основе уравнения Навье—Стокса и уравнений, полученных Чандрасекхаром (Chandrasekhar, Proc. Roy. Soc., 1955, **A 229**, I) в предположении, что момент четвертого порядка для Фурье-компоненты скорости можно выразить через моменты второго порядка:

$$\overline{V_m(\mathbf{l})\, V_n(\lambda)\, V_\alpha(\mathbf{k}-\mathbf{l})\, V_\beta(-\mathbf{k}-\mathbf{l})} =$$

$$= \overline{V_m(\mathbf{l})\, V_n(\lambda)} \cdot \overline{V_\alpha(\mathbf{k}-\mathbf{l})\, V_\beta(-\mathbf{k}-\mathbf{l})} +$$

$$+ \overline{V_m(\mathbf{l})\, V_\beta(-\mathbf{k}-\mathbf{l})} \cdot \overline{V_n(\lambda)\, V_\alpha(\mathbf{k}-\mathbf{l})} +$$

$$+ \overline{V_m(\mathbf{l})\, V_\alpha(\mathbf{k}-\mathbf{l})} \cdot \overline{V_n(\lambda)\, V_\beta(-\mathbf{k}-\mathbf{l})}.$$

Получен степенной ряд по τ для спектра кинетической энергии $E(k, \tau)$ и рассчитан коэффициент при τ^2, при этом использовался спектр, найденный Гейзенбергом, при $\tau = 0$. Поведение этого коэффициента при больших числах Рейнольдса R показывает, что время релаксации, связанное с вихрем, имеющим волновое число k, изменяется как k^{-1}. Эти выводы проверены численным интегрированием при больших R. Выведено основное интегро-дифференциальное уравнение для $E(k, \tau)$:

$$\frac{\partial^2 E(k, \tau)}{\partial \tau^2} = \nu^2 k^4 E(k, \tau) + I(k, \tau),$$

где

$$I(k, \tau) = \frac{1}{32k} \int_0^\infty \frac{E(e, \tau)}{e^3}\, dl \int_{|k-l|}^{k+l} Q(k, l, p)\, \frac{E(p, \tau)}{p^3}\, dp,$$

$$Q(k, l, p) = (k^4 + l^4 + p^4 - 2k^2l^2 - 2l^2p^2 - 2p^2k^2) \times$$

$$\times [2k^2p^2 + (p^2 - l^2)(p^2 + k^2 - l^2)]$$

и показано, что при $\nu \to 0$ (т. е, достаточно большом числе Рейнольдса) оно допускает решение вида $E(k, \tau) = k^\alpha f(k\tau^{1/\beta})$, если $2\beta - \alpha = 3$. Случай $\beta = 2/3$ соответствует спектральному закону Колмогорова.

В. В. Кравцов

6591. Связь между пространственным и временным средними значениями поля скоростей в автобаротропном потоке. Пихлер (Zusammenhang zwischen dem räumlichen und zeitlichen Mittel eines Geschwindigkeitsfeldes in einer autobarotropen Strömung. Pichler H.), Arch. Meteorol., Geophys. und Bioklimatol., 1959, **A11**, № 1, 18—28 (нем.; рез. англ., франц.)

Теоретически исследуется эмпирически установленная связь между пространственным и временным средними значениями геопотенциала на определенном уровне. Для удобства исследования используется поле автобаротроп-

ного течения, которое качественно мало отличается от соответствующего геопотенциального поля. Уравнение баротропной модели

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0,$$

где ψ — функция тока, β — широтное изменение параметра Кориолиса, имеет частное решение $\psi=-Uy+\psi_k e^{2\pi i\,(x/\lambda+y/\omega-c_1t/\lambda-c_2t/\omega)}$, где $U=\text{const}$ — скорость основного зонального потока, ψ_k — амплитуда, λ, ω — длины волн в соответствующих направлениях, c_1 и c_2 — скорости соответствующих перемещений, при условии справедливости соотношения

$$\frac{c_1}{\lambda}+\frac{c_2}{\omega}=\frac{u}{\lambda}-\frac{\beta}{\lambda\left(k_1^2+k_2^2\right)},\qquad k_1=\frac{2\pi}{\lambda},\quad k_2=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Средние значения функции тока определяются следующим образом: а) пространственное среднее при $t=0$:

$$\bar{\psi}=\frac{1}{4}[\psi_0(x+d,y)+\psi_0(x-d,y)+\psi_0(x,y+d)+\psi_0(x,y-d)]$$

(d — интервал пространственной сетки), б) временное среднее (в интервале времени 2 от момента -1 до $+1$) $_{-1}\hat{\psi}_{+1}=\frac{1}{3}(\psi_{-1}+\psi_0+\psi_{+1})$, где индексы означают моменты, при которых берется функция тока ψ. Приравнивание пространственного и временного средних значений ψ дает соотношение:

$$\cos\pi d\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\omega}\right)\cos\pi d\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\omega}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[1+2\cos\frac{2\pi\Delta t}{\lambda}\left(u-\frac{\beta}{k_1^2+k_2^2}\right)\right]$$

между степенями свободы $d, \Delta t, \lambda, \omega, u$, которое анализируется для метеорологически интересных схем.

Связь между пространственным и временным средними значениями геопотенциала с 1957 г. используется Венской службой погоды при составлении краткосрочных прогнозов погоды. Б. Н. Трубников

6592. Световой режим вблизи терминатора. Колесов А. К., Вестн. Ленингр. ун-та, 1959, № 1, 103—110 (рез. англ.)

Рассматривается задача о распространении излучения в плоском однородном слое, ограниченном снизу ортотропной отражающей плоскостью при условии, что на одну полуплоскость верхней граничной поверхности под прямым углом падает внешнее излучение, а другая полуплоскость не освещена. Уравнение переноса лучистой энергии записывается в форме

$$\cos\vartheta\frac{\partial I(\tau,t,\vartheta,\varphi)}{\partial\tau}+\sin\vartheta\cos\varphi\frac{\partial I(\tau,t,\vartheta,\varphi)}{\partial t}=$$

$$=-I(\tau,t,\vartheta,\varphi)+B(\tau,t),$$

где

$$B(\tau,t)=\int I(\tau,t,\vartheta,\varphi)\frac{d\omega}{4\pi}+I_0\frac{e^{-\tau}}{4\pi}Y(\tau),$$

а граничные условия имеют вид

$$I(0,t,\vartheta,\varphi)=0\quad\left(0<\vartheta<\frac{\pi}{2}\right),$$

$$I(\tau_0,t,\vartheta,\varphi)=\frac{A}{\pi}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}I(\tau,t,\vartheta,\varphi)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta+$$

$$+\frac{A}{\pi}I_0e^{-\tau_0}Y(\tau),\quad\frac{\pi}{2}<\vartheta<\pi.$$

$$Y(\tau)=\begin{cases}0 \text{ при } t<0,\\ 1, \quad t>0.\end{cases}$$

Задача решается методом Эддингтона: интегрированием по углам исходного уравнения автор получает систему уравнений относительно угловых моментов (по φ и ϑ) функции I, которую упрощает, пренебрегая моментами порядка $\geqslant 2$ (по каждой из переменных φ и ϑ). Решение полученной системы ищется методом разделения переменных. В работе приведены графики и таблицы, иллюстрирующие полученные для решения формулы. Т. А. Гермогенова

6593. Теория нелинейного поля $(\Box-\lambda\varphi^2)\varphi=0$. Курдгеладзе Д. Ф., Ж. эксперим. и теор. физ., 1959, 36, № 3, 842—849 (рез. англ.)

Энергия H и импульс G нелинейного уравнения поля $(\Box-\lambda\varphi^2)\varphi=0$ могут быть представлены в виде рядов

$$H=\varphi_0^2\sum_{n=0}^{\infty}H_n;\quad G=\varphi_0^2\sum_n G_n,$$

где φ_0 — постоянная, H_n и G_n — известные функции импульса. Отдельным членам указанных рядов можно сопоставить элементарные частицы; спектр масс последних имеет вид $M_n=(2n+1)M_0^0$ и оказывается близким к спектру масс, полученному другим путем Гейзенбергом. Найдено точное радиально-симметричное решение нелинейного уравнения поля. Показано, что нелинейное уравнение Дирака эквивалентно в некоторых случаях спинорному уравнению второго порядка. А. В. Тулуб

6594. К теореме об энергии частицы газа Ферми с учетом взаимодействия. Вилли (On a theorem concerning the single particle energy of a Fermi gas with interactions. Villi C.), Nucl. Phys., 1958, **9**, № 2, 306—313 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Ван-Хова и Гугенгольтца, утверждающей, что при плотности, минимизирующей полную энергию ядра, средняя объемная энергия на нуклон равна полной энергии наиболее энергичного нуклона, и исследуется физическое содержание исходных положений. Центральным моментом является доказательство следующей теоремы:

Если потенциальная энергия нуклона $V(x,y)$ в бесконечной среде, заполненной ядерной материей, подчиняется гиперболическому уравнению $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{2}{y}\frac{\partial}{\partial y}\right)V(x,y)=0$, то для того, чтобы $V(0,0)=0$, необходимо и достаточно, чтобы $Q(y)=0$, где

$$Q(y)=y^2V(y,y)-\int_0^y x^2\frac{\partial V}{\partial x}\,dx.$$ Т. А. Гермогенова

6595. О собственных значениях, определяющих верхние и нижние границы фаз рассеивания. Спрук (On the eigenvalues which give upper and lower bounds on scattering phases. Spruch Larry. Res. Rept, Div. Electromagn. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., 1956, № CX-24, i, 22 pp.) (англ.)

6596 К. Лекции по интегральным инвариантам. Картан (Leçons sur les invariants intégraux. Cartan E. Paris, Hermann, 1958, X, 210 p., ill.) (франц.)

Книга содержит лекции по интегральным инвариантам, прочитанные автором в 1920—1921 гг. в Парижском университете. Впервые книга была издана в 1921 г. (данное издание воспроизводится фотомеханическим способом с первого издания).

Перечисление глав дает достаточное представление о содержании книги: 1. Принцип наименьшего действия Гамильтона. 2. Двумерный инвариантный интеграл динамики. 3. Интегральные инварианты и инвариантные диф-

ференциальные формы. 4. Характеристическая система дифференциальной формы. 5. Инвариантные системы Пфаффа и их характеристические системы. 6. Алгебраические внешние формы. 7. Внешние дифференциальные формы и их производные формы. 8. Характеристическая система внешней дифференциальной формы. Образование интегральных инвариантов. 9. Дифференциальные системы, допускающие бесконечно малое преобразование. 10. Вполне интегрируемые системы Пфаффа. 11. Теория множителя Якоби. 12. Уравнения, допускающие относительный линейный инвариантный интеграл. 13. Уравнения, допускающие абсолютный линейный инвариантный интеграл. 14. Дифференциальные уравнения, допускающие инвариантное уравнение Пфаффа. 15. Дифференциальные уравнения, допускающие несколько линейных интегральных инвариантов. 16. Дифференциальные уравнения, допускающие данные бесконечно малые преобразования. 17. Применение изложенной теории в проблеме n тел. 18. Интегральные инварианты и вариационное исчисление. 19. Принцип Ферма и инвариантное уравнение Пфаффа в оптике.

6597 К. Метод фазовой плоскости в теории релейных систем. Флюгге-Лотц И. Перев. с англ. М., Физматгиз, 1959, 175 стр., илл., 6 р. 35 к.

6598 К. Лекция по небесной механике. Зигель Карл Людвиг. Перев. с нем. М., Изд-во ин. лит., 1959, 300 стр., 11 р. 45 к.

6599 К. Автоматическое регулирование. Основные понятия. Изд. 3-е, стереотип. Попов Е. П. М., Физматгиз, 1959, 296 стр., илл., 5 р. 90 к.

6600 К. Информация о траекториях управляемого баллистического снаряда с помощью радарной установки. Шапиро (The prediction of ballistic missile trajectories from radar observations. 2nd print. Shapiro I. I. New York—Toronto—London, Mc Graw-Hill Book Co., Inc., 1958, VI, 208 pp., ill.) (англ.)

6601 К. Математическая теория течения сжимаемой жидкости. Мизес, Гейрингер, Ладфорд (Mathematical theory of compressible fluid flow. Mises Richard von, Geiringer Hilda, Ludford G. S. S. New York, Acad. Press, Inc, 1958, xiv, 514 pp., ill.) (англ.)

6602 Д. Теоретические основы образования механических систем и их обобщение. Гертнер (Systemtheoretische Abbildungen von mechanischen Gebilden und deren Verallgemeinerungen. Gärtner Robert Engelbert.—Diss. Dokt.-Ingr, Fak. Maschinenw. und Elektrotechnik Techn. Hochschule, München, 1958, 43 S., 17 Bl. Ill.) (нем.)

Исходя из того, что существуют одни и те же дифференциальные уравнения, которые описывают явления как в электротехнике, так и в механике (например, дифференциальные уравнения нелинейных колебаний), автор сводит электротехнические системы, соединенные последовательно или параллельно, к механическим системам с различного вида связями. Электротехнические системы автор сводит к элементарным системам, состоящим из мотора и звена, снабженного подвижным и неподвижным поршнями. Рассматривая движение идеальной жидкости в таком звене, автор составляет дифференциальное уравнение, которое сравнивается с уравнением динамики. Исходя из этой механической аналогии, автор дает определение „массы“ n-го порядка, „силы“ и некоторых других понятий. Это дает возможность автору выразить сложные электротехнические понятия через более простые механические понятия и применить для интегрирования уравнений электротехники некоторые теоремы механики.

И. С. Куклес

6603 Д. Об эффективном решении некоторых граничных задач, имеющих приложение к физике и технике. Поплавский Р. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т радиотехн. и электроники АН СССР, М., 1959

См. также: 6292, 6386, 6393, 6413, 6616, 6617, 6619, 6669, 6693, 6748, 6755 К, 6915, 6952, 6953, 6955—6971, 6973—6982.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Редакторы *В. В. Немыцкий, Н. И. Мозжерова*

6604. Поправка. Успехи матем. наук, 1956, **11**, № 4, 232 См. РЖМат, 1958, 6586.

6605. Заметка о методе Левинсона. Такэда (Takeda Kazuaki), Гифу дайгаку когакубу кэнкю хококу, Res. Repts Fac. Engng Gifu Prefect. Univ., 1955, № 5, 14—16 (японск.; рез. англ.)

6606. Интегральные уравнения для уравнений типа Матьё. Пароди (Équations intégrales et équations du type de Mathieu. Parodi Maurice), J. math. pures et appl., 1958, **37**, № 1, 45—54 (франц.)

С помощью преобразования Лапласа строится хорошо известное интегральное уравнение Вольтерра, эквивалентное уравнению Матьё

$$y'' + (\eta + \gamma \cos t)\, y = g(t), \quad \eta > 0. \tag{1}$$

Для уравнения с частными производными

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - (\eta + \gamma \cos x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

аналогично строится интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра

$$y(t, x) - (\eta + \gamma \cos x)\int_0^t (t-\tau)\frac{\partial^2 y(\tau, x)}{\partial x^2}\, d\tau = y(0, x) + t\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)_{t=0}. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (3) ищется в виде $y(t, x) = u(t, x) + \gamma\Phi(t, x)$, где $u(t, x)$ — общее решение уравнения (2) при $\gamma = 0$. Функция $\Phi(t, x)$ представляется в виде ряда по целым степеням γ, коэффициенты которого определяются последовательными приближениями.

Р. С. Гусаров

6607. Исследование особых решений одного класса нелинейных интегральных уравнений. Юсиф-заде (Бир синиф гейри-хәтти интеграл тәнликләрин мәхсуси һәлләринин арашдырылмасы. Јусифзадә Ч. Г.), Елми әсәрләр. Азерб. унив. Физ.-ријазијјат вә кимја сер., Уч. зап. Азерб. ун-та, Физ.-матем. и хим. сер., 1959, № 1, 19—29 (азерб.; рез. русск.)

Работа посвящена исследованию особого решения уравнения вида

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda^j \int_0^1 K_j(x, s)\,[A_0(s) + A_1(s)\,\varphi(s) + A_2(s)\,\varphi^2(s)]\, ds. \tag{1}$$

В отличие от предыдущей работы, автор рассматривает случаи, когда собственные значения ядра $2K_1(x,s)\times$

$\times A_2(s)\varphi_{-1}(s)$ имеют ранг $q>1$. Пользуясь известным методом, автор устанавливает достаточные условия, обеспечивающие существование особого решения, т. е. решения с полюсом в точке $\lambda=0$. В работе исследуются все случаи. К. Т. Ахмедов

6608. Об особых решениях одного класса нелинейных интегральных уравнений. Юсиф-заде (Бир синиф хәтти олмаян интеграл тәнлийин мәхсуси һәлли һагғында. Юсифзадә Ч.), Элми әсәрләр. Азәрб. унив. Физ.-риязијјат вә кимја сер., Уч. зап. Азерб. ун-т. Физ.-матем. и хим. сер., 1958, № 1, 15—35 (азерб.; рез. русск.)

Рассматривается нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda^j\int_0^1 K_j(x,s)\,f(s,\varphi(s))\,ds, \qquad (1)$$

где $f(s,u(s))=A_0(s)+A_1(s)\varphi(s)+A_2(s)\varphi^2(s)$. Ядра K_1 и A_2 такие, чтобы нелинейное интегральное уравнение

$$u(x)=\lambda\int_0^1 K_1(x,s)\,A_2(s)\,u^2(s)\,ds$$

имело нетривиальное решение на основании известной теоремы М. Голомба.

Автором доказано 5 теорем. В первой теореме находятся достаточные условия для того, чтобы уравнение (1) имело особое решение вида

$$\varphi(x)=\frac{\lambda_0\varphi_{-1}(x)}{\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\varphi_k(x), \qquad (2)$$

методом мажорант доказывается сходимость ряда в правой части (2) в некоторой окрестности $\lambda=0$. В теореме 2 находятся достаточные условия для того, чтобы уравнение (1) имело решение вида

$$\frac{\lambda_0\varphi_{-2}(x)}{\lambda}+\frac{\varphi_{-2}(x)}{\sqrt{\lambda}}+\varphi_0(x)+\lambda^{1/2}\varphi_1(x)+\ldots$$

В теореме 3 устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие существование решения уравнения (1) в виде ряда

$$\frac{\lambda_0\varphi_{-2}(x)}{\lambda}+\lambda^{-1/2}\varphi_2(x)+\lambda^{-1/2}\varphi_{-1}(x)+\varphi_0(x)+$$
$$+\lambda^{1/2}\varphi_1(x)+\lambda^{2/2}\varphi_2(x)+\ldots$$

К. Т. Ахмедов

6609. Об одном интегро-дифференциальном уравнении. Финкель Л. А., В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава. Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 48—50

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами вида

$$y^{(n)}+\sum_{r=0}^{n-1}a_r y^{(r)}+\sum_{j=0}^{b_1}\int_0^x K_j(x-t)\,y^{(j)}(t)\,dt+$$
$$+\sum_{i=0}^{b_2}\int_{-\infty}^{x}M_i(x-t)\,y^{(i)}(t)\,dt=0, \qquad (1)$$

где

$$K_s(x)\equiv\sum_{\nu_1=0}^{p_1}P_{\nu_{1,s}}(x)\,e^{-\beta_{\nu_{1,s}}x},$$

$$M_i(x)\equiv\sum_{\nu_2=0}^{p_2}Q_{\nu_{2,i}}(x)\,e^{-\alpha_{\nu_{2,i}}x};$$

$P_{\nu_{1,s}}(x)$, $Q_{\nu_{2,i}}(x)$ — полиномы степеней $m_{\nu_{1,s}}$, $m_{\nu_{2,i}}$ соответственно; $\beta_{\nu_{1,s}}$, $\alpha_{\nu_{2,i}}$ — постоянные.

Автор строит характеристическое уравнение для уравнения (1) и, рассматривая два случая: 1) корни простые и такие, что $\int_{-\infty}^{x}Q_{\nu_{2,i}}(x-t)\,e^{(\alpha_{\nu_{2,i}}+r_k)t}\,dt$ сходится; 2) корни характеристического уравнения кратные и $\int_{-\infty}^{x}Q_{\nu_{2,i}}(x-t)\,e^{(\alpha_{\nu_{2,i}}+r_k)t}\,dt$ сходится, находит общее решение уравнения (1). Имеются опечатки.

К. Т. Ахмедов

6610. О многозначной продолжимости решения одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Эфендиев Г. С., Елми әсәрләр. Азәрб. унив. Физ.-рijазијјат в кумја сер. Уч. зап. Азерб. ун-т. Физ.-матем. и хим. сер., 1959, № 3, 9—24 (рез. азерб.)

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\Gamma(u(x),\lambda)=$$
$$=\int_0^1 K(x,s,\lambda)\,\Phi(x,s,u(s),u^1(s),\ldots,u^{(n)}(s))\,ds, \qquad (1)$$

где Γ и Φ — аналитические функции относительно $u, u^1, \ldots, u^{(n)}, \lambda$ и непрерывные относительно x, s; K — регулярное ядро при фиксированном λ и аналитическая функция относительно λ при каждой фиксированной паре значений x, s. Предполагая существование решения при каком-нибудь значении параметра λ, автор исследует существование решения в некоторой окрестности его. Производя замену

$$u^{(i)}(x,\lambda)=u_0^{(i)}(x,\lambda_0)+v^{(i)}(x,\lambda);\ \lambda=\lambda_0+\mu,$$

при условии $v^{(i)}(0,\lambda)=0$, автор получает эквивалентное уравнение, решение которого ищется в виде ряда

$$v(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k v_k(x).$$

После сравнения коэффициентов получается рекуррентная система интегро-дифференциальных уравнений. После замены

$$v_k(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\,w_k(t)\,dt$$

получается система вида

$$w_i(x)=\int_0^1 H(x,s,\lambda_0)\,w_i(s)\,ds+f_i(x),\quad i=1,2,\ldots,$$

где H, f_i — известные функции.

Доказывается следующая теорема: Если единица является характеристическим числом ядра и выполнены некоторые соотношения для функций, входящих в рекуррентную систему, то нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (1) в окрестности точки $\lambda=\lambda_0$ имеет два голоморфных решения

$$u_\alpha(x)=u_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^k v_{k,\alpha}(x)\quad(\alpha=1,2).$$

Методом для исследования служит метод Некрасова — Назарова. К. Т. Ахмедов

6611. О существовании голоморфного решения одной нелинейной системы интегро-дифференциальных уравнений. Мисник В. П., В сб.: Материалы 8-й Научн. конференции профессорско-преподават. состава. Физ.-матем. фак. (Кирг. ун-т). Фрунзе, 1959, 39—42

Рассматривается система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_s}{dt}=f_s(t,\mu,x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\mu\int_0^t K_s(t,\tau,\mu,x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')\,d\tau+$$

$$+\mu\int_0^1 R_s(t,\tau,\mu,x_1,\ldots,x_n,x_1',\ldots,x_n')\,d\tau$$

$$(s=1,\ldots,n), \qquad (1)$$

при условиях

$$x_s\,|_{t=0}=\beta_s, \qquad (2)$$

f_s — функции, голоморфные относительно $x_1,\ldots,x_n$, не содержащие в разложении свободного члена и членов с первыми степенями $\mu, \mu x_1,\ldots,\mu x_n$; K_s, R_s — ядра, голоморфные относительно μ, x_l, x_l' $(l=1,\ldots,n)$ и интегрируемые по t,τ. При помощи замены $X_s=x_s-\beta_s$ $(s=1,\ldots,n)$ рассматриваемая задача сводится к эквивалентной задаче с нулевыми начальными условиями. Решение новой задачи ищется в виде рядов

$$X_s(t,\beta_1,\ldots,\beta_n,\mu)=\sum_{l=1}^{n}A_{sl}(t)\beta_l+A_{s,n+1}(t)\mu+$$

$$+\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_{n+1}\geqslant 2}A_s(t)\beta_1^{\nu_1}\ldots\beta_n^{\nu_n}\mu^{\nu_{n+1}}\quad(s=1,\ldots,n). \qquad (3)$$

Подставляя (2) в новое уравнение и сравнивая коэффициенты, автор получает рекуррентную систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов. Далее методом мажорант доказывается сходимость рядов (3) и рядов, представляющих dx_s/dt.

Таким образом, работа в основном посвящена возможности однозначной разрешимости поставленной задачи в некоторой окрестности точки $\mu=0$, $\beta_1=\beta_2=\ldots=\beta_n=0$.

К. Т. Акмедов

6612. Интегральные уравнения равновесия тонких упругих цилиндрических оболочек. Ремизова Н. И., Прикл. матем. и механ., 1959, **23**, № 3, 611—615

Рассмотрено применение аппарата интегральных уравнений Фредгольма II рода к решению задач теории оболочек. Метод сведения задач о равновесии оболочек к решению интегральных уравнений разработан референтом (Кильчевский Н. А., Прикл. матем. и механ., 1940, **4**, № 2, 43—58). В статье метод развивается применительно к цилиндрическим оболочкам: составлена система интегральных уравнений равновесия цилиндрической оболочки с направляющей любой формы и произвольными краевыми условиями; вычислены ядра интегральных уравнений. Метод иллюстрируется примером определения перемещений в круговой цилиндрической оболочке с шарнирно-подвижным опиранием под действием сосредоточенной силы.

Задача сведена к решению интегрального уравнения Фредгольма II рода с регулярным ядром

$$u_3(M;N)=Pv_{(3)3}(M;N)-\int_0^a\int_0^b F_{(3)3}(Q;M)u_3(Q;N)\,dx_Q\,ds_Q,$$

где $u_3(M;N)$ — искомый прогиб срединной поверхности оболочки в точке M от действия сосредоточенной силы P в точке N; $v_{(3)3}(M;N)$ — прогиб в соответствующей точке срединной плоскости пластины, являющейся картой срединной поверхности оболочки; $F_{(3)3}(Q;M)$ — регулярная функция, определяемая сходящимся двойным тригонометрическим рядом.

Решение интегрального уравнения получено в виде суммы двух слагаемых, из которых первое определяет прогиб в соответствующей точке пластины, второе вносит поправку на кривизну. Две другие компоненты смещения вычислены посредством квадратур. Полученные результаты сравниваются с решением этой задачи, найденным посредством интегрирования системы дифференциальных уравнений, указанной в монографии В. З. Власова „Общая теория оболочек". Отмечено совпадение результатов, полученных этими двумя методами.

Одним из недостатков работы является не вполне обоснованное оперирование с расходящимися тригонометрическими рядами. В правых частях уравнений (5) пропущен множитель $\delta(x_N-x;\ s_N-s)$, где δ — функция Дирака.

Н. А. Кильчевский

6613. Точное определение феноменологического взаимодействия с разделяющимися переменными. Гурден, Мартен (Exact determination of a phenomenological separable interaction. Gourdin M., Martin A.), Nuovo cimento, 1958, **8**, № 5, 699—707 (англ.; рез. итал.)

Рассматривается задача о восстановлении вида взаимодействия двух частиц в S-состоянии по энергетической зависимости сдвига фазы в предположении, что имеется нелокальное взаимодействие с разделяющимися переменными. Для получения точного решения интегрального уравнения, определяющего взаимодействие в импульсном представлении, использован метод Н. И. Мусхелишвили (Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 1941, 10, 1). Подтверждены результаты, полученные в предыдущей работе авторов (РЖФиз, 1953, № 7, 14850), относительно существования решения и числа решений.

С. С. Филиппов

6614 Д. Об условиях существования почти периодических решений некоторых классов интегро-дифференциальных уравнений. Артюшенко Л. М. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Среднеаз. ун-т, Фрунзе, 1959

См. также: 6371, 6372, 6413, 6416, 6487, 6630, 6983, 6984.

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Редактор *М. К. Керимов*

6615. Об одном нелинейном операторе. Гельман И. В., Докл. АН СССР, 1958, **120**, № 3, 454—456

Пусть $M(u)$ и $N(v)$ — две взаимно дополнительные N'-функции, $L_M^*(\Omega)$ и $L_N^*(\Omega)$ — соответствующие им пространства Орлича, Ω есть n-мерная ограниченная область с границей Γ. Функция $M(u)$ такова, что

$$\frac{\int_\Omega M[u(x)]\,d\Omega}{\|u(x)\|_M}\to\infty \text{ при } \|u(x)\|_M\to\infty. \qquad (1)$$

Через $F_M^{(l)}$ обозначается пространство функций, все l-е обобщенные производные которых принадлежат $L_M^*(\Omega)$. Далее,

$$j(u)=\int_\Omega f\left(x_1,\ldots,x_n;u(x);\ldots;\frac{\partial^l u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}\right)d\Omega, \qquad (2)$$

где $f\geqslant mM(D^{(l)}u)$ $(m>0$ — постоянная;

$$D^{(l)}u = \sum_{i_1 \ldots i_n} \left| \frac{\partial^l u}{\partial x_{i_1}^{l} \ldots \partial x_{i_n}^{l}} \right|),$$

$$\sum_{k,\ s=0}^{l} \frac{\partial^2 f}{\partial u_{k_1 \ldots k_n}^{(k)} \partial u_{s_1 \ldots s_n}^{(s)}} t_{k_1, \ldots, k_n}^{(k)} t_{s_1, \ldots, s_n}^{(s)} >$$

$$> 0 \left(\sum_{k=0}^{l} | t_{k_1 \ldots k_n}^{(k)} |^2 \neq 0 \right).$$

Рассматривается задача о минимуме функционала

$$j_h(u) = j(u) - \int_{\Omega} uhd\Omega, \quad h \in L_N^*(\Omega), \qquad (3)$$

для которого класс допустимых функций Φ (предполагаемый непустым) определен условием $j(u) < +\infty$ и граничными условиями

$$\left. \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|_{\Gamma} = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, l-1). \qquad (4)$$

Теорема 1. Какова бы ни была функция $h \in L_N^*(\Omega)$, задача о минимуме функционала (3) имеет в классе Φ единственное решение. Это решение u рассматривается как обобщенное решение уравнения Эйлера — Лагранжа с граничными условиями (4), оно задает оператор $u = u[h]$, определенный на $L_N^*(\Omega)$ со множеством значений в Φ.

Теорема 2. $u[h]$ ограничен как оператор из $L_N^*(\Omega)$ в $F_M^{(l)}$.

Теорема 3. Оператор $u[h]$ переводит (0)-слабо сходящиеся в $L_N^*(\Omega)$ последовательности в последовательности, сходящиеся (0)-слабо в $F_M^{(l)}$.

Указаны условия (теорема 4), при которых оператор $u[h]$ переводит (0)-слабо сходящиеся в $L_N^*(\Omega)$ последовательности в сходящиеся по норме пространства $F_{M_1}^{(l)}$, где $M_1(u)$ растет существенно медленнее, чем $M(u)$ ($M(u) \mid M_1(\lambda u) \to \infty$ при $u \to \infty$, каково бы ни было число λ). М. А. Красносельский

6616. О решении одной вырожденной вариационной задачи и оптимальном подъеме космической ракеты. Егоров В. А., Прикл. матем. и механ., 1958, 22, № 1, 116—126

Перечисляется ряд задач об определении оптимальных режимов движения центра тяжести ракеты, которые сводятся к задаче Майера для уравнения Пфаффа, т. е. к задаче об определении кусочно-гладкой кривой без кратных точек $x_2 = x_2(\tau)$, $x_3 = x_3(\tau)$ ($0 \leqq \tau \leqq 1$) с заданными концами так, чтобы значение $x_1(1)$ функции $x_1(\tau)$, определяемой уравнением

$$\sum_{i=1}^{3} X_i(x_1, x_2, x_3)\, dx_i = 0$$

и начальным значением $x_1(0) = x_1$, было наибольшим и чтобы направление касательной пространственной кривой $x_i = x_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3$) принадлежало заданному пучку. Вычисляется $\delta x_1(1)$ и на основании геометрического анализа дается метод для построения искомой кривой. Приводится один из конкретных примеров отыскания оптимального режима движения ракеты. И. С. Аржаных

6617. Интерпретация принципа Томсона и его аналога для основной частоты мембраны. Приложение. Херш (Une interprétation du principe de Thomson et son analogue pour la fréquence fondamentale d'une membrane. Application. Hersch Joseph), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 14, 2060—2062 (франц.)

Задача о кручении бруса приводит к уравнению $\Delta\varphi = a$ в G, $\varphi = 0$ на Γ, где Γ — граница области G. Задача эквивалентна вариационной:

$$P(u) = \iint_G (4u - \operatorname{grad}^2 u)\, dxdy = \max,$$

где P — жесткость. Разделим область G на подобласти G_l дугами кривых Жордана и рассмотрим функции v_l в областях G_l, претерпевающие разрыв производных на разрезах Γ_l, обращающиеся в нуль на Γ_l.

Имеем:

$$P < \sum_i \max P(v_i).$$

Поэтому принцип Томсона заменяется принципом

$$P = \min \sum_l \max P(v_l).$$

Для вибрирующей мембраны имеем:

$$\lambda_1 \geqslant \min \frac{\sum_l \iint \operatorname{grad}^2 v_l dxdy}{\sum_l \iint_{G_l} v_l^2\, dxdy}.$$

В качестве примера рассмотрены две области (в виде подковы и в виде буквы L). И. С. Аржаных

6618. Характеристические условия для справедливости принципов Гамильтона и Гёльдера. Сторки (Condizioni caratteristiche per la validità dei principi di Hamilton e di Hölder. Storchi Edoardo), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 2, 162—167 (итал.)

Согласно классическому принципу Гамильтона, действительное движение делает стационарным гамильтоновское действие $\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt$ среди всех движений, согласующихся с крайними положениями, удовлетворяющих требуемым связям, но синхронных с действительным движением: синхронность означает здесь, что между точками действительной траектории и сравниваемой с ней траектории имеется взаимно однозначное соответствие такое, что соответствующие две точки этих траекторий отвечают одному и тому же моменту времени t. Автор расширяет класс допустимых движений, допуская к конкуренции, наряду с синхронными движениями, и асинхронные; асинхронность означает здесь, что соответствующие две точки действительной и сравниваемой с ней траектории могут отвечать, вообще говоря, разным моментам времени t и $t + \delta t$, где δt — произвольная функция от t; если $\delta t \equiv 0$, то мы возвращаемся к классическому случаю. Вариацию физической величины A при переходе от действительного движения к допустимому асинхронному движению (moto variato) автор обозначает через $\delta_v A$, в отличие от обозначения δA для перехода к синхронному движению. Наряду с гамильтоновским действием $\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt$, автор рассматривает еще гёльдерево (кинетическое) действие $\int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt$ и потенциальное действие $\int_{t_0}^{t_1} 2U dt$. Из системы уравнений динамики автор выводит основное соотношение $\int_{t_0}^{t_1} \left[\delta_v T + \delta U + 2T \frac{d}{dt} (\delta t) \right] dt = 0$, после чего получает три обобщенных вариационных принципа. Приведем один из них. При соблюдении требуемых связей и крайних положений действительное движение делает стационар-

ным гамильтоновское действие $\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt$ по сравнению с такими moto variato, которые удовлетворяют дополнительному условию $\int_{t_0}^{t_1}\left\{(T-U)\frac{d}{dt}(\delta t)\right\}dt=0$. Этот принцип является обобщением классического принципа Гамильтона. З. Х. Рафальсон

6619. Минимальные свойства движения системы. **Вылкович** (Propriétés minimales du mouvement des systèmes. Vâlcovici Victor), Rev. math. pures et appl. (RPR), 1958, 3, № 2, 191—206 (франц.)

Устанавливается последовательность вариационных принципов классической механики, включающая принцип Гамильтона — Остроградского как частный случай. Вариационные принципы автора применимы для голономных и неголономных систем с линейными связями. Основой рассмотрения является введение „асинхронной вариации", причем δt рассматривается как вспомогательная функция координат и времени, подчиненная одному интегральному соотношению.

Автор кратко характеризует историческую важность вариационных принципов Мопертюи и Лагранжа (начиная с замечания Лейбница) и показывает необходимость вариационного принципа, исходя из геометрических соображений. Дается точное определение вариации действительного движения, причем, наряду с вариацией координат, дается вариация времени. Вводятся четыре действия

$$A_k=\int_{t_0}^{t_1}E_k dt,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4,$$

где $E_1=T$, $E_2=U$ (потенциал сил), $E_3=T+U$, $E_4=T-U$ (энергетическое действие). Выводится общая формула для асинхронной вариации функционала

$$I=\int_{t_0}^{t_1}F(\mathbf{r}_i,\ \mathbf{v}_i,\ t)\,dt,$$

а затем полученная формула применяется для вычисления вариаций указанных действий. В каждом конкретном случае δt подчиняется интегральному условию вида

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta' F+F\frac{d}{dt}\delta t\right)dt=0,$$

где

$$\delta' F=\sum_i \Delta_{r_i}F\,\delta\mathbf{r}_i+\sum_i \nabla_{v_i}F\delta'\mathbf{v}_i+\frac{\partial f}{\partial t}\delta t,$$

$$\delta'\mathbf{v}_i=\delta\mathbf{v}_i-\mathbf{v}_i\frac{d}{dt}\delta t,\quad \delta\mathbf{v}_i=\frac{d}{dt}\delta\mathbf{r}_i.$$

Показано, что среди результатов автора содержится и результат Сторки (реф. 6618). И. С. Аржаных

6620. Теорема вириала в теории столкновений. Демков Ю. Н., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 22, 34—41 (рез. англ.)

Автор показывает, что выведенная им ранее для системы двух частиц, потенциал взаимодействия которых V убывает с расстоянием быстрее, чем r^{-2}, теорема вириала в квантовой теории рассеяния (явное выражение производной фазы рассеянной волны по волновому числу через среднее от выражения $2V+r\frac{dV}{dr}$, взятому по состоянию с фиксированным волновым вектором) может быть развита также для случаев, когда сталкивающиеся системы являются сложными (в частности, для задачи рассеяния электрона на атоме водорода). При этом используется модифицированный квантовомеханический вариационный принцип и вариация масштаба. Исследуется случай, когда поле рассеивающего центра имеет кулоновский характер (т. е. r^{-1}) на бесконечности, и приводятся тождества общего характера.

И. А. Квасников

6621 К. Вариационное исчисление. Изд. 2-е, испр. **Эльсгольц Л. Э.** М., Гостехиздат, 1958, 163 стр., 5 р. 65 к.

Учебное пособие по вариационному исчислению, вышедшее вторым изданием в серии „Физико-математическая библиотека инженера", Издательства физико-математической литературы. Несмотря на небольшой объем, книга содержит почти все разделы вариационного исчисления. Книга написана доступно и с большим педагогическим мастерством. Изложение сопровождается значительным числом разобранных примеров; в конце каждой главы приведено большое число задач с ответами; эти задачи представляют особую ценность для читателя.

Гл. 1 „Метод вариаций в задачах с неподвижными границами" посвящена основным понятиям вариационного исчисления, выводу уравнений Эйлера для функционалов вида

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx,\quad \int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')\,dx,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})\,dx,\quad \int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n_1)},y_2,$$

$$y_2',\ldots,y_2^{(n_2)},\ldots,y_m,y_m',\ldots,y_m^{(n_m)})dx,$$

$$\iint_D F\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy,$$

$$\iint_D\ldots\int F(x_1,x_2,\ldots,x_n,z,p_1,p_2,\ldots,p_n)\,dx_1,\,dx_2\ldots dx_n;$$

$$p_i=\frac{\partial z}{\partial x_i},\quad \int_{t_0}^{t_1}\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})\,dt.$$

Гл. 2 „Вариационные задачи с подвижными границами и некоторые другие задачи" посвящена выводу простейших необходимых условий для тех же функционалов, что и в гл. 1, в случае одного подвижного конца (и рассматривается случай кратного интеграла, а для других функционалов берутся более частные случаи), для случаев ломаных экстремалей, разрывных вариационных задач и задач с односторонней вариацией.

В гл. 3 „Достаточные условия экстремума" приводятся в основном достаточные условия для функционала $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\,dx$.

Гл. 4 „Вариационные задачи на условный экстремум" посвящена вариационным задачам с функционалом $\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')\,dx$ при наличии дополнительных условий вида:

1) $\varphi_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)=0\quad(i=1,2,\ldots,m;\ m<n)$;

2) $\varphi(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')=0$,

3) $\int_{x_0}^{x_1}F_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n,y_1',y_2',\ldots,y_n')\,dx=l_i$

$(i=1,2,\ldots,m)$,

где l_i — некоторые постоянные (изопериметрическая задача). Наконец, в гл. 5 „Прямые методы в вариационных задачах" кратко излагаются конечноразностный метод Эйлера, метод Ритца и метод Канторовича. Книга заканчивается списком рекомендуемой литературы.

М. К. Керимов

См. также: 6365, 6402, 6410, 6420, 6928, 6933.

АНАЛИЗ (другие вопросы)

Редакторы *В. В. Немыцкий, В. К. Захаров*

6622. Оживление анализа. Крбек (Belebung der Analysis. Krbek v.), Wiss. Z. E. M. Arndt—Univ. Greifswald. Math.-naturwiss. Reihe, 1957—1958, **7**, № 3-4, 197—198 (нем.)

Статья опубликована также в другом журнале (РЖМат, 1960, 1751).

6623. О теории средних. Ацел (A középértékek elméletéhez. Aczél János), Acta Univ. debrecen, 1954, **1**, 117—135 (венг.)

Венгерский вариант статьи (РЖМат, 1960, 1752).

6624. Неравенства между различными средними. Ватанабэ (On inequalities among various means. Watanabe Yosikatu), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1957, **6**, № 1, 71—78 (англ.)

Рассматриваются средние

$$m_{f,n} = F\left\{\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{N} n_\nu f(a_\nu)\right\}, \quad \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu = n,$$

где f — монотонная функция, а F — функция, обратная f. Доказываются теоремы о сравнимости средних $m_{f,n}$, в частности, основная теорема 2: $m_{f,n} \leqq m_{g,n}$, если соотвественно $h'(x)h''(x) \leqq 0$, где $h(x) = g\{f^{-1}(x)\}$ и $f(x)$ возрастает. Все результаты переносятся и на интегральные средние.

Примечание референта. Статья не содержит новых результатов, доказательства также известны (см., например, Харди, Литлвуд и Пойа, Неравенства, М. 1948, гл. III; теорема 96 тождественна с теоремой 2 автора и т. д.). В. И. Левин

6625. Доказательство существования предела Эйлера исходя из хорошо известного физического принципа. Шейфер (A proof of Euler's limit from a well known physical principle. Shafer Robert E.), Math. Mag., 1959, **32**, № 4, 211—212 (англ.)

6626. Замечание о «двойных биномиальных коэффициентах». Избицкий (Note on «double binomial coefficients». Izbicki Herbert), Nucl. Phys., 1959, **12**, № 5, 532 (англ.)

Элементарные замечания о свойствах биномиальных коэффициентов. В. К. Захаров

6627. Элементарные неравенства для отношения Милса. Комацу (Elementary inequalities for Mills'ratio. Komatu Yusaku), Repts Statist. Applic. Res., Union Japan Scientists and Engrs, 1955, **4**, № 2, 69—70 (англ.)

Гордон (Gordon R. D., Ann. Math. Statistics, 1941, **12**, 364—366; 115—118) элементарным способом показал, что отношение Милса

$$Rx \equiv e^{x^2/2}\int_x^\infty e^{-t^2/2}\,dt$$

удовлетворяет неравенству

$$\frac{x}{x^2+1} < R(x) < \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

а Бирнбаум (Birnbaum Z. W., Ann. Math. Statistics, 1942, **13**, 245—246) показал, что нижнюю границу в неравенстве можно заменить лучшей оценкой $2/(\sqrt{x^2+4}+x)$.

В настоящей заметке дается совершенно элементарное доказательство результата Бирнбаума и показывается, что верхнюю оценку неравенства Гордона можно также заменить лучшей.

6628. Об оценке некоторых конечных сумм произведений. Коллар (On the evaluation of certain finite sums of progressive products. Collar A. R.), J. Roy. Aeronaut. Soc., 1959, **63**, № 578, 118—119 (англ.)

Рассматривается оценка конечной суммы

$$F_m = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{n-r}\binom{n-1}{n-r}(r+Z_1)(r+Z_2)\ldots(r+Z_m),$$

где Z_t произвольны и

$$\binom{n-1}{n-r} = \frac{(n-1)!}{(n-r)!\,(r-1)!} -$$

биномиальные коэффициенты.

6629. Об одном методе в теории неявных функций и экстремальных значений. Цаубек (Über ein Verfahren in der Theorie der impliziten Funktionen und Extremwerte. Zaubek Othmar), Math. Ann., 1959, **137**, № 3, 167—208 (нем.)

Исходная задача. Исследование проблемы существования и выяснение дифференциальных свойств неявной функции $y = y(x)$, $y(0)=0$, определяемой соотношением $f(x, y) = 0$ в тех случаях, когда $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$.

Обозначения: m, n — целые неотрицательные числа; U, U^* — окрестности $(0,0)$; U'' — множество U без точек с нулевой абсциссой; x, y — вещественные переменные, $(x, y)\in U$; $f(x, y)$ — вещественная функция 1) n раз в U и $m+n$ раз в U'' непрерывно дифференцируемая, или 2) неограниченно дифференцируемая, или 3) аналитическая, причем во всех случаях $f(0,0) = f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$; $n \geqslant 2$, $B_1 \equiv f_{xy}^2 - f_{xx}f_{yy}$ (все производные здесь и ниже вычисляются в $(0,0)$); $n \geqslant 3$, $B_{2,x} \equiv f_{xx}^3 f_{yyy} - 3f_{xx}^2 f_{xy}f_{xyy} + 3f_{xx}f_{xy}^2 f_{xyx} - f_{xy}^3 f_{xxx}$; $n \geqslant 4$, $B_{3,y} \equiv 3(f_{yy}^2 f_{xxy} - 2f_{yy}f_{xy}f_{xyy} + f_{xy}^2 f_{yyy})^2 - f_{yy}(f_{yy}^4 f_{xxxx} - 4f_{yy}^3 f_{xy}f_{xxxy} + 6f_{yy}^2 f_{xy}^2 f_{xxyy} - 4f_{yy}f_{xy}^3 f_{xyyy} + f_{xy}^4 f_{yyyy})$; $B_{2,y}$ и $B_{3,x}$ получаются соответственно из $B_{2,x}$ и $B_{3,y}$ заменой $x \leftrightarrow y$.

Основные результаты: 1. Пусть $n \geqslant 2$, $B_1 > 0$ и $f_{yy}(0,0) \neq 0$. Тогда существует интервал $I: |x| < s$ и две вещественные функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$, однозначные в I и 1) $n-1$ раз в I и $m+n$ раз в $I': 0 < |x| < s$ непрерывно дифференцируемые, 2) неограниченно дифференцируемые в I, 3) аналитические в I такие, что для любого $x \in I$ $f(x, y_i(x)) = 0$, $i = 1, 2$. Кроме того, существует U^* со свойством: если $f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ и $(\bar{x}, \bar{y})\in U^*$, то либо $\bar{y} = y_1(\bar{x})$, либо $\bar{y} = y_2(\bar{x})$. Наконец, для любого $x \in I'$ $y_1(x) \neq y_2(x)$ и $y_1(0) = y_2(0) = 0$.

2. Пусть $n \geqslant 3$, $B_1 = 0$, $|B_{2,x}| + |B_{2,y}| > 0$. Тогда существует интервал $I: |t| < a$ и две функции $x = p_1(t)$ и $y = p_2(t)$, определенные в I и такие, что $p_1(0) = p_2(0) = 0$, $f(p_1(t), p_2(t)) = 0$ для любого t из I. Функции p_1, p_2 при $t = 0$ 1) $n-2$ раза непрерывно дифференцируемы, 2) неограниченно дифференцируемы, 3) аналитические (в реферируемой статье доказываются и формулируются несколько более сильные утверждения). Получены результаты либо обобщающие, либо уточняющие перечисленные основные. В частности, исследован вопрос о существовании и свойствах неявной функции k переменных $x_1, \ldots, x_k$, задаваемой соотношением $f(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$.

В работе встречаются опечатки и неточности, главные из которых вместе с некоторыми дополнениями указаны автором в 5-й тетради того же тома Math. Ann. (стр. 477).

Примечание референта. Автору неизвестна работа Н. П. Еругина (РЖМат, 1957, 3251 К), отправляющаяся от той же самой исходной задачи и имеющая ряд точек соприкосновения с реферируемой статьей. Ю. С. Богданов

6630. Об одном достаточном признаке обращения в нуль определенных интегралов. Градштейн И. С., Матем. просвещение, 1959, № 4, 189—192

Отыскивается некоторый класс функций $f(x)$, для которых главное значение интеграла

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^1 \left[f(x) + \frac{1}{x^2} f\left(\frac{1}{x}\right)\right] dx \qquad (1)$$

равно нулю, т. е. удовлетворяющих условию

$$f(x) \equiv -1/x^2 f(1/x). \qquad (2)$$

$f(x)$ представляется в виде произведения $g(x)\cdot h(x)$,

$$g(x) = g(1/x), \quad h(x) = -1/x^2 h(1/x), \qquad (3)$$

и находятся функции, удовлетворяющие условиям (3) (следовательно, и условию (2)), в виде отношения $\varphi_1(x)/\varphi_2(x)$ возвратных или $\psi_1(x)/\psi_2(x)$ косовозвратных многочленов одной и той же квазистепени — для $g(x)$ и в виде дроби $\varphi(x)/\psi(x)$ или $\psi(x)/\varphi(x)$ с квазистепенью числителя, на две единицы меньшей квазистепени знаменателя (использованы свойства: $\varphi(x) = x^n\cdot\varphi(1/x)$, $\psi(x) = -x^n\cdot\psi(1/x)$), и в форме некоторых других функций. $\varphi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ — возвратный многочлен, $\psi(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots - a_1x - a_0$ — косовозвратный; число n названо квазистепенью возвратного (косовозвратного) многочлена (если a_0=0, то оно отлично от степени; например, квазистепени многочленов $x^8 + x$, $x^8 - x^2$ соответственно равны 4 и 8).

Вопрос о равенстве интеграла (1) нулю (для чего необходима его сходимость) оставлен открытым; обращается внимание читателей лишь на возможную особенность подынтегральной функции интеграла $\int_0^1 f(x)\,dx$ при $x=1$ (1 есть корень всякого косовозвратного многочлена).

И. М. Тумаков

6631. О некоторых кратных интегралах, содержащих определители. Брёйн (On some multiple integrals involving determinants. Bruijn N. G. de), J. Indian Math. Soc., 1955, **19**, № 3-4, 133—151 (англ.)

6632. О сингулярных интегралах. III. Коидзуми (On the singular integrals. III. Koizumi Sumiyuki), Proc. Japan Acad., 1958, **34**, № 9, 594—598 (англ.)

Ч. I, II см. РЖМат, 1959, 7884, 7885.

Для сингулярного интеграла

$$\tilde{f}(x) = \lim_{\eta\to 0} \tilde{f}_\eta(x) = \lim_{\eta\to 0} \int_{|x-t|>\eta} \frac{f(t)}{x-t}\,dt$$

устанавливаются следующие результаты:

1. Если $0 \leqslant \alpha < 1$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(|\tilde{f}|)}{1+|x|^\alpha}\,dx < A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(|f|)}{1+|x|^\alpha}\,dx; \quad A = \text{const};$$

при этом, если второй интеграл конечен, то

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(|\tilde{f}-\tilde{f}_\eta|)}{1+|x|^\alpha}\,dx = 0.$$

Функция φ подчинена тем же условиям, что и в предыдущей статье автора (РЖМат, 1959, 7884).

2. Если

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f|\ln^+[(1+x^2)|f|]}{1+|x|^\alpha}\,dx < \infty, \quad 0<\alpha<1,$$

то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f|}{1+|x|^\alpha}\,dx \leqslant$$

$$\leqslant A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f|\ln^+[(1+x^2)|f|]}{1+|x|^\alpha}\,dx + B,$$

$$A = \text{const}, \quad B = \text{const};$$

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{f}-\tilde{f}_\eta|}{1+|x|^\alpha}\,dx = 0.$$

3. Если интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f|}{1+|x|^\alpha}\,dx$$

конечен, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{f}|^{1-\varepsilon}\,dx}{1+|x|^{\alpha+\delta}} \leqslant \frac{A}{\varepsilon\{\delta-\varepsilon(1-\alpha)\}} \times$$

$$\times\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f|\,dx}{1+|x|^\alpha}\right)^{1-\varepsilon}, \quad A = \text{const};$$

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{f}-\tilde{f}_\eta|^{1-\varepsilon}}{1+|x|^{\alpha+\delta}}\,dx = 0,$$

где $0<\varepsilon<1$, $\delta > \alpha(1-\varepsilon)$. Аналогичные теоремы установлены для оператора

$$\tilde{x}_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{x_m}{n-m},$$

действующего в соответствующем пространстве последовательностей. С. Г. Михлин

6633. Некоторый класс интегральных тождеств с матричным аргументом. Олкин (A class of integral identities with matrix argument. Olkin Ingram), Duke Math. J., 1959, **26**, № 2, 207—213 (англ.)

Пусть X — $p\times p$ действительная симметричная матрица, $\overline{X}^k = (x_{lj})$, $1\leqslant i,\ j\leqslant k$, $\underline{X}^k = (x_{lj})$, $k\leqslant i,\ j\leqslant p$ и A — $p\times p$ действительная положительно определенная матрица. Белман (РЖМат, 1957, 6119) установил, что

$$B(a,k,A) = \int_{x>0} \frac{|X|^{a_p-(p+1)/2}\,e^{-\mathrm{tr}AX}}{\prod_2^p |X^j|^{k_{j-1}}}\,dX =$$

$$= \pi^{p(p-1)/4}\prod_1^p \Gamma[a_j-(j-1)/2]\,|\overline{A}^j|^{-k_j},$$

где $a_j = k_{p-j+1} + \ldots + k_p$, $k = (k_1, \ldots, k_p)$, $a = (a_1, \ldots, a_p)$. Интегрирование ведется по области, где X — положительно определенная и $a_j > (j-1)/2$, $j = 1, \ldots, p$. В этой статье дается более элементарное доказательство этой формулы.

6634. Об одной проблеме экстремума. Данч (On an extremal problem. Dancs I.), Acta math. Acad. scient. hung., 1958, **9**, № 3-4, 309—313 (англ.)

Доказывается теорема: Пусть

$$f(z) = \prod_{j=1}^n (1-z_jz), \quad \frac{1}{f(z)} = 1 + \sum_{l=1}^\infty a_lz^l,$$

$$s_m(z) = 1 + \sum_{l=1}^m a_lz^l,$$

$$I(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \int_{|z|=1} |1 - f(z)\, s_m(z)|^2\, |dz|.$$

Тогда

$$\max_{|z_2|=1,\ldots,|z_n|=1} I(a_1, z_2, \ldots, z_n) =$$

$$= 2\pi \sum_{\nu=m+1}^{m+n} \left\{ \sum_{0<j} (-1)^j \binom{m+n-j-1}{n-1} \binom{n}{\nu-m+j} \right\}^2$$

и достигается при $z_2 = z_3 = \ldots = z_n = a_1$.

Улучшается соответствующая теорема из книги Турана (РЖМат, 1956, 7063 К). А именно доказывается, что при $m \geqslant -1$ при любых комплексных $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

$$\max_{m+1\leqslant\nu\leqslant m+n} \frac{|b_1 z_1^\nu + b_2 z_2^\nu + \ldots + b_n z_n^\nu|}{\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n} |z_j|^\nu} \geqslant$$

$$\geqslant |b_1 + b_2 + \ldots + b_n| \cdot \frac{1}{2e} \cdot \left(\frac{n}{2e(m+n)}\right)^{n-1},$$

что лучше оценки Турана, по крайней мере при малых n.

М. Б. Барбан

6635. Обобщение некоторых функциональных уравнений для многих переменных. Хоссу (Néhány többváltozós függvényegyenlet közös általánosítása. Hosszú Miklós), Nehézipari műsz. egyet. közl., 1957, № 1, 305—308 (венг.)

Автор отмечает, что функциональное уравнение

$$F[G(x, y), z] = H[K(x, z), L(y, z)] \qquad (1)$$

является обобщением уравнений для однородных функций. Коротко указывая на значение уравнения (1) при обосновании теории вероятностей, при характеристике квазилинейных средних значений, при геометрических преобразованиях, а также на значение (1) в алгебре геометрических объектов, в номографии и в качестве уравнения множества изотопизмов, автор высказывает следующие теоремы:

1. Если в (1) x, y, F, G, H, K, L — переменные числа, соответственно функции, а $z = \{z_1, z_2, \ldots\}$ — переменный вектор, тогда существует вектор $z = \breve{z}$, для которого

$$\frac{\partial}{\partial z_1} F(f, \breve{z})\, \frac{\partial}{\partial z_1} K(x, \breve{z})\, \frac{\partial}{\partial z_1} L(y, \breve{z}) \neq 0$$

для всех f, x, y, и если G и H непрерывно дифференцируемые, то существуют функции f, g, h, k, l, m, n такие, что

$$G(x, y) = g\{h(x) + f[l(y) - k(x)]\},$$
$$H(x, y) = h\{m(x) + f[n(y) - m(x)]\}.$$

2. Если x, y, z — действительные переменные, $G(x, y)$ — непрерывная и строго монотонная действительная функция и имеет место (1), с одной стороны, для $L(x, y) = K(x, y) = H(x, y) = F(x, y) = G(x, y)$, с другой стороны, для $H(x, y) = G(x, y)$, $L(x, y) = K(x, y) = F(x, y) = G(y, x)$ (двусторонняя автодистрибутивность), тогда найдутся постоянная q и непрерывная, строго монотонная функция $g(x)$ такие, что $G(x, y) = g^{-1}[(1-q)\, g(x) + q g(y)]$ существует.

3. Если x, y и $G(x, y)$ — трехмерные векторы, $G(x, y)$ непрерывна и симметрична и выполняется (1) как для $F(x, z) = L(x, z) = H(x, z) = G(x, y)$, $K(x, z) = x$ (z также является трехмерным вектором) так и для $H(x, y) = G(x, y)$, $F(x, z) = L(x, z) = H(x, z) = zx$ (здесь число z умножено на вектор x) и также для $H(x, y) = G(x, y)$, $F(x, z) = L(x, z) = H(x, z) = A(z) \cdot x$, где $A(z) = (z_{ij})$ $(i, j = 1, 2, 3)$ — матрица с $\det z_{ij} > 0$, $z_{jj} = z_j$, $\sum_{i=1}^3 z_{ij}^2 = 1$ $(j = 1, 2, 3)$, $\sum_{i=1}^3 z_{ij} z_{ik} = 0$ $(j \neq k = 1, 2, 3)$ ($z = \{z_1, z_2, z_3\}$ — опять трехмерный вектор) и $A \cdot x$ — произведение матрицы и вектора (ассоциативность, автоморфное растяжение и вращение), тогда имеет место $G(x, y) = g^{-1}[g(x) + g(y)]$, где $g(x) = |x|^a x$ (a — постоянное число, $|x|$ — абсолютная величина вектора x)).

J. Aczél

6636. О суммационных уравнениях. I, II. Сиккема (On sum equations. I, II. Sikkema P. C.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1956, A59, № 4, 411—425; Indagationes math., 1956, 18, № 4, 411—425 (англ.)

Перрон (Perron, Math. Ann., 1921, 84, 1—15) связал решение бесконечной системы уравнений

$$\sum_{m=0}^{\infty} (a_m + b_{nm})\, x_{n+m} = c_n \quad (n = 0, 1, \ldots)$$

с нулями функции $F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$. Паше (РЖМат, 1958, 9965 К) установил соотношения между числом линейно независимых решений, значением $\lim_m |c_m|^{1/m}$ и абсолютными значениями этих нулей.

В первой из статей рассматривается однородный случай, где $c_m = 0$ и $a_1 = a_2 = \ldots = a_h = 0$, т. е. $F(z)$ имеет нулевой корень кратности h. Показывается, что при некоторых условиях на b_{nm} для каждого из h решений однородных уравнений существует положительное число ρ такое, что

$$\limsup_m |(m!)^\rho x_m|^{1/m}$$

конечен и равен абсолютному значению нуля некоторого полинома.

Во второй статье рассматриваются неоднородные системы, у которых $\limsup_m |c_m|^{1/m} = 0$, и устанавливается связь решений вида $x_m = \mu_m (m!)^{-\sigma}$ с константой вида $c_n = d_n (n!)^{-\sigma}$. Затем рассматривается распределение линейно независимых решений, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_h = 0$ и $c_n = d_n (n!)^{-\sigma}$.

T. H. Hildebrandt

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 5, 391.

6637. Промежуток действительности полинома. Андрушков (The reality interval of a polynomial. Andrushkiw Joseph), Proc. Shevchenko Scient. Soc. Sec. Math., Natur. Sci. and Med., 1954, 2, 7—12 (англ.)

Пусть

$$f(z) = 1 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0 \qquad (1)$$

— полином с действительными коэффициентами (не нарушая общности, можно считать $a_0 = 1$) и

$$f_1(z) = a_n + a_{n-1} z + \ldots + z^n \qquad (2)$$

— взаимный с ним полиномом. Ищутся условия, при которых все корни полинома

$$F(z) = f(z) + x z^{n+1}, \quad x \neq 0, \qquad (3)$$

будут действительны. Предварительно устанавливается, что необходимым для этого является действительность всех корней $r_1, r_2, \ldots, r_n$ производной $[z f_1(z)]'$. Положим далее, что все r_l различны между собой, и пересечение $(n+1)$ интервалов

$$(\pm\infty, R_1), (R_1, R_2), \ldots, (R_{n-1}, R_n), (R_n, \infty), \qquad (4)$$

где $R_l = r_l f_1(r_l)$ не пусто, для чего требуется, чтобы наибольший из левых концов интервалов (N) не превосходил наименьшего из правых концов (P). Доказывается следующая теорема: Если $[z f_1(z)]'$ имеет различные действительные корни, то условие $N < P$ является необходимым и достаточным для того, чтобы все корни полинома $F(z) = f(z) + x z^{n+1}$ при $-P < x < -N$ были действительны. При $-P < x < N$ корни $F(z)$ различны;

при $x = -P$ или $x = -N$ некоторые корни двойные. При $x < -P$ или $x > -N$ у $F(z)$ есть мнимые корни. Автор называет сегмент $[-P, -N]$ „промежутком действительности полинома $f(z)$". Из теоремы выводится, что если все корни полинома $f(z)$ действительны и различны, то у полинома существует промежуток действительности $[-P, -N]$. Беря x_1 внутри промежутка действительности, мы построим полином $F_1(z) = f(z) + x_1 z^{n+1}$, у которого все корни действительны и различны и который, согласно сказанному, будет иметь свой промежуток действительности, что позволит построить полином $F_2(z) = f(z) + x_1 z^{n+1} + x_2 z^{n+2}$, корни которого также действительны и различны, и т. д. Продолжая процесс неограниченно, мы построим целую трансцендентную функцию, нули которой действительны. В случае, если $[zf_1(z)]'$ имеет кратные корни $r_1, \ldots, r_k$, необходимое и достаточное условие действительности корней $F(z) = f(z) + xz^{n+1}$ состоит в том, чтобы $r_j f_1(r_j) = -x$ $(j = 1, \ldots, k;\ -P \leqslant x \leqslant -N)$. В заключительной части статьи используются установленные ранее автором (Proc. Shevchenko Scient. Soc., 1953, 1 (29), 1—6) условия того, чтобы полином $f(z)$ имел различные действительные корни. А. Г. Школьник

6638. О расположении корней полиномов с комплексными коэффициентами. Браун, Токад (On root locus with complex coefficient polynomials. Brown D. P., Tokad Y.), Proc. I. R. E., 1959, 47, № 3, 445—446 (англ.)

6639. Линейные системы и линейные преобразования. Кёниг, Мейкснер (Lineare Systeme und lineare Transformationen. König Heinz, Meixner Josef), Math. Nachr., 1958, 19, № 1-6, 265—322 (нем.)

В ряде важных физических процессов играют роль линейные преобразования функций, определяемые авторами следующим образом. Пусть C_m $(m = 0, 1, \ldots, \infty)$ — линейное пространство определенных на всей оси и m раз непрерывно дифференцируемых функций $f(t)$, каждая из которых $= 0$ для $t \leqslant \alpha$ (α может зависеть от f). Преобразование $L: f \to Lf$, которое каждой функции $f \in C_m$ относит функцию $Lf \in C_0$, называется линейным, если 1) $L(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 Lf_1 + a_2 Lf_2$, 2) $Lg(t) = Lf(t - \vartheta)$, где $g(t) = f(t - \vartheta)$ при фиксированном ϑ, 3) $Lf(t) = 0$ для $t \leqslant \alpha$, если $f(t) = 0$ для $t \leqslant \alpha$. L, определенное на C_m, называется непрерывным порядка p $(p = 0, 1, \ldots, m)$, если для любой последовательности функций $f_j \in C_m$, $j = 1, 2, \ldots$, такой, что $f_j(t) = 0$ для $t \leqslant \alpha$ и $f_j^{(r)}(t)$ при каждом фиксированном $r = 0, 1, \ldots, p$ равномерно стремится к 0 для $t \leqslant \tau$, последовательность значений $Lf_j(\tau) \to 0$ при $j \to \infty$. Приводятся другие определения непрерывности порядка p и показывается их эквивалентность. В частности, доказывается существование нормы (порядка p) в точке τ: $\| L \|_p(\tau) = \sup_f \sup_{t \leqslant \tau} | Lf(t) | = \sup_f | Lf(\tau) |$, где супремум по f берется в классе всех функций $f \in C_m$, обращающихся в 0 при $t \leqslant \tau$, для которых $| f^{(p)}(t) | \leqslant 1$ для $t \leqslant \tau$. Из доказанных теорем отметим следующие:

Теорема 1. Преобразование L, определенное на C_m $(m = 0, 1, \ldots, \infty)$ и непрерывное порядка $p < m$, может быть единственным образом и при сохранении нормы $\| L \|_p(\tau)$ продолжено на C_p.

Теорема 2. Преобразование L, определенное на C_m $(m = 0, 1, \ldots, \infty)$, и непрерывное порядка m, переводит $f \in C_{m+1}$ в $Lf \in C_1$, причем $(Lf)'(t) = Lf'(t)$ для всех t.

Теорема 3. Каждому преобразованию L, определенному на C_m и непрерывному порядка m, где $m < \infty$ соответствует одна и только одна вещественная функция $\Phi(u)$, определенная для $u \geqslant 0$, и удовлетворяющая следующим условиям: 1) Φ имеет на каждом сегменте $[0, \tau]$ ограниченное изменение, 2) в каждой точке $\tau > 0$ Φ непрерывна слева, 3) $\Phi(0) = 0$, и такая, что

$$Lf(t) = \int_0^\infty f^{(m)}(t - u)\, d\Phi(u) \qquad (1)$$

для всех t. Обратно, каждая такая функция Φ порождает линейное преобразование (1), определенное на C_m и непрерывное порядка m. Кроме того, для $\tau > 0$ $\| L \|_m(\tau) = V_0^\tau(\Phi)$. Аналогичная теорема имеет место и для $m = \infty$ с обобщенной функцией в роли Φ. Далее рассматриваются медленно растущие линейные преобразования, т. е. такие, которые определены на C_∞, и каждую функцию $f \in C_\infty$, отличную от нуля только в конечном промежутке, переводят в $Lf(t) = Q(|t|^r)$. В частности, доказываются теоремы, относящиеся к продолжению медленно растущих преобразований на пространства $\bar{C}_m \supset C_m$, содержащие и функции, не обращающиеся в 0 ни в одном неограниченном слева интервале.

Теорема 11. Если преобразование L определено на C_m $(m < \infty)$ и непрерывно порядка m, причем $\| L \|_m(\tau) = Q(\tau^r)$ $(\tau > 0)$, то для всех функций $f \in C_m$, обращающихся в 0 для $t \leqslant 0$ и таких, что $f^{(m)}(t) = O(|t|^r)$,

$$\int_0^\infty e^{-st} Lf(t)\, dt = s\, Z(s) \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt, \quad \operatorname{Re} s > 0,$$

где $Z(s)$ — импеданс преобразования L $(Z(s) = s^{m-1} \int_0^\infty e^{-st}\, d\Phi(t))$. Затем изучаются положительные (или диссипативные) медленно растущие линейные преобразования, которые определены на C_∞ и удовлетворяют условию: $\int_{-\infty}^{\tau} Zf(t) f'(t)\, dt \geqslant 0$ при $f \in C_\infty$ для всех τ.

Теорема 19. Для каждой положительной функции $Z(s)$ (т. е. такой, что $\operatorname{Re} Z(s) > 0$ для $\operatorname{Re} s > 0$ и $Z(s)$ вещественна для вещественных $s > 0$) существует одно и только одно положительное медленно растущее линейное преобразование L, определенное на C_∞ и непрерывное порядка ∞, импеданс которого равен $Z(s)$. Оно может быть непрерывно порядка 3 продолжено на $\bar{C}_3$. В конце работы приводятся некоторые приложения линейных преобразований к термодинамическим системам.

В. И. Левин

6640 К. Введение в анализ. Ричмонд (Introductory calculus. Richmond Donald Everett. Reading, Mass., Addison Wesley Publ. Co., 1959, xv, 207 pp., ill., 42 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 4929 (англ.)

6641 К. Введение в математический анализ с приложениями к задачам экономики. Дос, Уайберн (Introduction to mathematical analysis with applications to problems of economics. Daus Paul Harold, Whyburn William Marvin. Reading, Mass., London, Addison-Wesley Publ. Co., 1958, VIII, 244 pp., ill., 49 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 491, 12 (англ.)

6642 К. Курс математического анализа. Т. I. Производные и дифференциалы, определенные интегралы, разложение в ряды, геометрические приложения. 5-е изд. Гурса (Cours d'analyse mathématique. T. I. Dérivées et différentielles, intégrales définies, développements en série, applications géométriques. 5 éd. Goursat Edouard. Paris, Gauthier-Villars, 1956, II, 675 p., ill., 2800 fr.), Bibliogr. France, 1956, 145, № 20, 463 (франц.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

6643. Замечания о последовательности Фибоначчи. Генис (Notes on the Fibonacci sequence. Ganis Sam E.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 2, 129—130 (англ.)

Для последовательности Фибоначчи $\{f_n\}$, $f_1 = f_2$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geqslant 3$, доказываются (методом индукции) известные равенства

$$f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n,$$

$$f_{n+1} = {}_nC_0 + {}_{n-1}C_1 + {}_{n-2}C_2 + \ldots,$$

$$f_1 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1.$$

В. К. Захаров

6644. О последовательностях комплексных членов, определяемых итерацией. Аспейтия (On sequences of complex terms defined by iteration. Azpeitia A. G.), Boll. Unione mat. ital., 1958, **13**, № 4, 522—524 (англ.; рез. итал.)

Доказывается теорема: Пусть $\{f_n(z_1, z_2, \ldots, z_p)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность комплексных функций p комплексных переменных $z_1, z_2, \ldots, z_p$, определенных для $z_i \in D$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$, где D — выпуклая область комплексной плоскости (z). Пусть 1) для $z_i \in D$ последовательность $\{f_n(z_1, z_2, \ldots z_p)\}$ равномерно сходится к непрерывной функции $f_0(z_1, z_2, \ldots, z_p)$, 2) для $z_i \in D$ и всякого $n \geqslant 0$ точка $w_n = f_n(z_1, z_2, \ldots z_p)$ принадлежит замкнутой выпуклой оболочке R_n множества точек z_i и отлична от точек границы этой оболочки, если только нет равенства всех z_i, причем в этом случае $w_n = z_i$. Тогда каждая последовательность $\{a_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, определенная равенством $a_n = f_n(a_{n-p}, a_{n-p+1}, \ldots, a_{n-1})$ с произвольно выбранными в D начальными значениями $a_1, a_2, \ldots, a_p$, сходится. Этим обобщается теорема, ранее опубликованная автором (РЖМат, 1959, 4853), в которой рассматривается случай одной функции, т. е. когда все функции последовательности $\{f_n\}$ идентичны между собой. А. К. Харадзе

6645. Заметки о сходимости и ограниченности в пространствах матричных преобразований. Чиллингуэрт (A note on convergence and boundedness in matrix transformation spaces. Chillingworth H. R.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wet., 1957, **A60**, № 5, 570—577; Indagationes math., 1957, **19**, № 5, 570—577 (англ.)

Обобщаются некоторые результаты Эль-Макарема (РЖМат, 1957, 4931—4932) о p-сходимости и p-ограниченности последовательности матриц $A^{(m)}$ в пространстве $\alpha \to \beta$, где α и β — данные пространства последовательностей. Говорят, что в пространстве α последовательность точек $x^{(n)} = \{x_k^n\}$ сильно p-сходится (или просто p-сходится) к точке $x = \{x_k\}$, если для каждого $\varepsilon > 0$ и p-ограниченного множества U в дуальном пространстве α^* существует натуральное число N такое, что $\left|\sum_k u_k (x_k^{(n)} - x_k)\right| < \varepsilon$ при всех $\{u_k\} \in U$ и $n \geqslant N$. Главная теорема статьи гласит: Если в пространствах α и β имеет место p-сходимость по отрезкам и если последовательность $\{A^{(m)}\}$ p-ограничена и сходится по координатам в пространстве $\alpha \to \beta$, то $\{A^{(m)}\}$ p-сходится в $\alpha \to \beta$ в предположении, что α содержит все последовательности с конечным числом отличных от нуля элементов. Для доказательства этой теоремы автор вводит понятие о полусильной проективной сходимости, промежуточное между p-сходимостью и p-сходимостью. В заключение изучаются некоторые свойства полусильной проективной сходимости. Г. Ф. Кангро

6646. Перестановки рядов и аналитические множества. Лоренц, Целлер (Series rearrangements and analytic sets. Lorentz G. G., Zeller K.), Acta math., 1958, **100**, № 3-4, 149—169 (англ.)

Пусть дан действительный ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} u_m. \qquad (1)$$

Тогда множеством сумм переставленных рядов из (1) называется множество всех чисел, к каждому из которых сходится некоторый ряд, полученный из ряда (1) перестановкой членов. Совершенно аналогично определяется множество A-сумм переставленных рядов из (1) в случае, когда вместо сходимости берется суммируемость методом A.

Исследованием множеств A-сумм перестановок, для случая суммируемости методом средних арифметических, занимались Мазур (Mazur S., Arch. Tow. Nauk, Lwow. Wydz., 1929, **3**, 411—423) и Багемил с Эрдёшем (РЖМат, 1956, 536).

Авторы, рассматривая довольно широкий класс матриц A, преобразующих ряды в ряды, доказывают, что множество A-сумм переставленных рядов, от любого ряда вида (1), является аналитическим множеством.

Доказывается и обратное утверждение: Для любого аналитического множества E на прямой существует регулярный матричный метод суммирования A (ряда в ряд) такой, что множество E является множеством A-сумм переставленных рядов от ряда $e^{11} + 0 + e^{21} + 0 + e^{31} + 0 + \ldots$

В конце работы делается замечание, относящееся к множествам A-сумм переставленных рядов, но где матрица A преобразует уже последовательность в последовательность (или же в ряд). П. Л. Ульянов

6647. О линейных методах суммирования. Чобанов, Паскалев (Zu linearem Limitierungsverfahren. Tschobanow W., Paskalew G.), Studia math., 1958, **17**, № 2, 141—149 (нем.)

Рассматриваются методы суммирования, определяемые матрицами $A = \| a_{\mu\nu} \|$, удовлетворяющими условиям: $a_{\mu\nu} = 0$ при $\nu > \mu$ и существует $\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu}$. Пусть ξ_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ есть решение бесконечной системы уравнений $\sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu\nu} x_\nu = y_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$, когда в правых частях стоят числа $y_\mu = 1$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots)$, и $\xi_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, \ldots)$ есть решение этой же системы, когда в правых частях стоят числа

$$y_\mu = \begin{cases} 0, & \mu \neq \nu, \\ 1, & \mu = \nu. \end{cases}$$

Для того чтобы из суммируемости ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ методом, определяемым матрицей A, следовала суммируемость ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$, необходимы и достаточны следующие условия: 1) существует $\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu-1,\,\nu-1} \xi_{\nu\nu}$, 2) существует $\lim_{\mu\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu} a_{\mu-1,\,\nu-1} \xi_{\nu m}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, 3) существует вещественное число K такое, что при любом p $\sum_{\mu=0}^{p} \left| \sum_{\nu=\mu}^{p} a_{p-1,\,\nu-1} \xi_{\nu\mu} \right| < K$. При этом

$$a_{\mu-1,\,1} = \begin{cases} 1 \text{ при } \mu = 0, \\ 0 \text{ при } \mu \neq 0, \end{cases} \quad a_{-1,\,\nu} = 0 \text{ при } \nu > -1$$

Устанавливаются также условия для того, чтобы из суммируемости ряда $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ следовала суммируемость ряда $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ и связь между обобщенными суммами упомянутых рядов. Ф. И. Харшиладзе

6648. О методах суммирования типа Бореля. Боруэйн (On Borel-type methods of summability. Borwein D.), Mathematika, 1958, 5, № 10, 128—133 (англ.)

Пусть

$$s_n = \sum_{r=0}^{n} a_r,\ a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha n}/\Gamma(\alpha n + 1),$$

$$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^{\alpha n}/\Gamma(\alpha n + 1),$$

где a_n — комплексные числа, параметр $\alpha > 0$, $0 \leqslant x < \infty$. Рассматриваются следующие методы суммирования типа Бореля:

$$s_n \to l\ (B',\ \alpha), \quad \text{если } \lim_{x\to\infty} \int_0^x e^{-t} a(t)\,dt = l,$$

$$s_n \to l\ (\widetilde{B},\ \alpha), \text{ если } \lim_{x\to\infty} \alpha e^{-x} s(x) = l.$$

Доказывается теорема: Для того чтобы $s_n \to l\ (\widetilde{B},\ \alpha)$, необходимо и достаточно выполнение условий:

$$s_n \to l\,(B',\ \alpha) \text{ и } a_n \to 0\,(\widetilde{B},\ \alpha).$$

Теорема известна для случая $\alpha = 1$ (Харди, Расходящиеся ряды, Изд-во ин. лит., 1951, стр. 229, теорема 123). М. П. Щеглов

6649. Некоторые вопросы обобщенных матричных методов суммирования. Корегулярные и конулевые методы. Юримяэ Э. И., ENSV Teaduste Akad. toimetised. Tehn ja füüs.-matem. teaduste seer., Изв. АН ЭстССР. Сер. техн. и физ.-матем. н., 1959, 8, № 2, 115—121 (рез. эст., нем.)

Пусть X и Y — произвольные банаховы пространства и $A_{nk}\ (n, k = 0, 1, \ldots)$ — ограниченные линейные операторы из X в Y. Если ряды

$$y_n = \sum_{k=0}^{\infty} A_{nk} x_k \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

сходятся в пространстве Y, то они задают преобразование A последовательности $\xi = \{x_n\}$ из X в последовательность $\eta = \{y_n\}$ из Y. Класс всех последовательностей из X, преобразующихся в сходящиеся последовательности, обозначим через A^*. Предел последовательности η в пространстве Y называется A-пределом последовательности ξ. Так определяется метод суммирования A. Класс A^* рассматривается как FK-пространство (Zeller K., Math. Z., 1 51, 53, 463—487) и в нем находится общая форма линейного функционала. Если преобразование A сохраняет сходимость, то последовательности $e(x) = \{x, x, \ldots\}$, $e_k(x) = \{\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k}, x, 0, \ldots\}$ принадлежат A^*. Метод A, сохраняющий сходимость, называется конулевым, если для любого $x \in X$ разность $e(x) - \sum_{k=0}^{r} e_k(x)$ слабо сходится к нулю в пространстве A^* при $r \to \infty$. В противном случае метод A называется корегулярным. Пользуясь этими понятиями, автор распространяет известные теоремы Целлера, относящиеся к преобразованиям численных последовательностей, на преобразования последовательностей элементов пространства Банаха. Ф. И. Харшиладзе

6650. Некоторые замечания о сильной суммируемости. Флетт (Some remarks on strong summability. Flett T. M.), Quart. J. Math., 1959, 10, № 3, 115—139 (англ.)

Пусть σ_n^α, $\alpha > -1$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — последовательность n-х чезаровских средних порядка α ряда $\sum a$. Ряд $\sum a_n$ сильно суммируем $\{C, \alpha\}_k$, $k \geqslant 1$, к сумме s, если $\sum_0^m |\sigma_n^\alpha - s|^k = o(m)$, $m \to \infty$. Ряд $\sum$ ограничен $\{C, \alpha\}_k$, если $\sum_0^m |\sigma_n^\alpha - s|^k = O(m)$, $m \to \infty$. Ряд $\sum a_n$ суммируется $\{A\}_k$ к сумме s, если ряд $\sum a_n x^n = \Phi(x)$ сходится для $|x| < 1$ и функция $\Phi(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^R \frac{|\Phi(x) - s|^k}{(1-x)^2}\,dx = o\left(\frac{1}{1-R}\right) \quad (R \to 1-0).$$

Ряд $\sum a_n$ ограничен $\{A\}_k$, если

$$\int_0^R \frac{|\Phi(x)|}{(1-x)^2}\,dx = O\left(\frac{1}{1-R}\right) \quad (R \to 1-0).$$

Для $k = \infty$ $(C, \alpha)_k$-суммируемость и $\{A\}_k$-суммируемость переходят соответственно в обычную (C, α) и A-суммируемости (метод суммирования Абеля). Ряд $\sum a_n$ суммируем (ограничен $\{\widetilde{C}, \alpha\}_k$, $k \geqslant 1$, если $\sum_{n=1}^m |\tau_n^\alpha|^k = o(m)$ $(O(m))$, $m \to \infty$, где $\tau_n^\alpha = n(\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha)$. Ряд $\sum a_n$ суммируем (ограничен) $\{A\}_k$, $k \geqslant 1$, если

$$\int_0^R (1-x)^{k-2} |\Phi'(x)|^k dx = o\left(\frac{1}{1-R}\right)\left(O\left(\frac{1}{1-R}\right)\right)$$

$$R \to 1-0.$$

Относительно ряда $\sum a_n$ будем говорить, что он суммируем $\{C\}_k$ $(\widetilde{C})_k$, если он суммируем $\{C, \alpha\}_k$ $((\widetilde{C}, \alpha)_k$ при каком-либо $\alpha > -1$ и $k \geqslant 1$.

В работе рассмотрена общая теория сильной суммируемости числовых рядов, в частности устанавливается ряд результатов относительно связи между введенными выше методами суммирования $\{C, \alpha\}_k$, $\{C, \beta\}_r$, $\{A\}_t$, а также между $\{\widetilde{C}, \alpha\}_k$-, $\{\widetilde{C}, \beta\}_r$- и $\{\widetilde{A}\}_t$-суммированием.

В работе содержится также ряд результатов отрицательного характера относительно включения рассматриваемых методов суммирования. Например, из суммируемости $\{C, \alpha\}_k$ не вытекает суммируемость $\{C, \beta\}_r$ для $1 \leqslant r \leqslant k$ и $-1 < \beta < \alpha$. Из суммируемости $\{A\}_k$ не вытекает суммируемость $\{A\}_r$ для $1 \leqslant k < r < \infty$. Ряд $\sum a_n$ абсолютно суммируем (C, α) с индексом k (суммируем $|C, \alpha|_k$), $k \geqslant 1$, $\alpha > -1$, если ряд $\sum n^{k-1} |\sigma_n^\alpha - \sigma_{n-1}^\alpha|^k$ сходится. Ряд $\sum a_n$ абсолютно суммируем $|A|_k$, если интеграл $\int_0^1 (1-x)^{k-1} |\Phi'(x)|^k \times dx$ конечен. В работе рассмотрена также связь между сильной и абсолютной суммируемостями в смысле Чезаро и Абеля. И. И. Огиевецкий

6651. О методах суммирования, основанных на целых функциях. Боруэйн (On methods of summability based on integral functions. Borwein D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, 55, № 1, 23—37 (англ.)

Пусть $p_n \geqslant 0$, $\sum_{k=n}^{\infty} p_k > 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$, $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ — целая функция, $\mu_n > 0$, $q_n = p_n/\mu_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ и $\rho(q)$ — радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$. Если $\varphi(t)$ — вещественная функция с ограниченным изменением на $(0, \infty)$, для которой при некотором $\delta > 0$ и $n \geqslant N$,

$$0 < \delta \int_0^{\infty} t^n \mid d\varphi(t) \mid \leqslant \int_0^{\infty} t^n d\varphi(t) < \infty,$$

то в случае, когда $\mu_n = \int_0^{\infty} t^n d\varphi(t)$ $(n \geqslant N)$, $\rho(q) = \infty$.

Если последовательность s_n $(n = 0, 1, \ldots)$ такова, что функция $\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$ является целой, то из существования предела дроби $\sum_{n=0}^{\infty} q_n s_n x^n / \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$, когда $x \to \infty$, вдоль вещественной оси следует равенство

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} q_n s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n}.$$

Аналогичная теорема устанавливается для любых последовательностей s_n, для которых радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} p_n s_n x^n$ отличен от нуля.

Даны приложения этих теорем к некоторым конкретным методам суммирования борелевского типа.

А. Ф. Тиман

6652. Топологизация одного пространства последовательностей матрицами Тёплица. Эрдёш, Пиранян (The topologization of a sequence space by Toeplitz matrices. Erdös P., Piranian G.), Michigan Math. J., 1958, 5, № 2, 139—148 (англ.)

Пусть m — пространство всех ограниченных комплексных последовательностей и x, y — некоторые элементы пространства m. Мы будем писать $x \sim y$, если существуют постоянная $\gamma \neq 0$ и сходящаяся последовательность c такие, что $y = \lambda x + c$. Соотношение $x \sim y$, очевидно, является соотношением эквивалентности. Обозначим через m/L соответствующее пространство классов эквивалентности. Как показали Эрдёш и Розенблюм (Erdös P., Rosenbloom P. C., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, 52, 463—464), ограниченные расходящиеся последовательности x и y принадлежат одному и тому же классу эквивалентности, если каждая регулярная матрица, которая суммирует последовательность x, также суммирует последовательность y. Это наводит на мысль использовать поля суммирования регулярных матриц для топологизации пространства m/L. Поскольку оказывается, что при каждой топологизации пространства m/L полями суммирования регулярных матриц класс эквивалентности C, состоящий из всех сходящихся последовательностей, является изолированной точкой, то вместо пространства m/L рассматривается пространство $m/L - C$. Устанавливается существование такой системы регулярных матриц, ограниченные поля суммирования которых определяют в пространстве $m/L - C$ хаусдорфову топологию без изолированных точек. В основе доказательства этого результата лежат две простые идеи: так называемый принцип подражающих последовательностей, встречающийся в неявном виде в известной статье А. Л. Брудно (Матем. сб., 1945, 16, 1 1—247), и возможность построения регулярных матриц, поля суммирования которых сколь угодно малы в некотором смысле. Изучаются также некоторые топологические свойства пространства $m/L - C$.

Г. Ф. Кангро

6653. Насыщение некоторых процессов суммирования. Бухвальтер (Saturation de certains procédés de sommation. Buchwalter Henri), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 7, 909—912 (франц.)

Рассматриваются регулярные методы Γ суммирования рядов $\sum_{k=0}^{\infty} u_k$, задаваемые преобразованиями

$$\Gamma_\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_\omega^k u_k \quad (\omega \to \infty)$$

с действительными коэффициентами γ_ω^k. Если последовательность $\lambda = \{\lambda_k\}$ и функция $\varphi(\omega)$ удовлетворяют условиям

$$0 \leqslant \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \to \infty, \quad \lambda_{k+1} = O(\lambda_k),$$
$$\varphi(\omega) > 0 \text{ при } \omega > 0, \quad \lim_{\omega \to \infty} \varphi(\omega) = 0,$$

то метод Γ называется принадлежащим классу $T(\lambda, \varphi)$, если: 1) $\sum_{k=0}^{\infty} \mid \gamma_\omega^k \mid < \infty$ при $\omega > 0$, 2) $1 - \gamma_\omega^k \sim \lambda_k \varphi(\omega)$ при $\omega \to \infty$. Метод Γ класса $T(\lambda, \varphi)$ называется λ-выпуклым, если последовательности $\{\gamma_\omega^k\}_{k \geqslant 0}$ и $\{(\gamma_\omega^k - \gamma_\omega^{k+1})/(\lambda_{k+1} - \lambda_k)\}_{k \geqslant 0}$ монотонно стремятся к нулю для всех достаточно больших ω. Фаваром (Favard J., Ann. mat. pura ed appl., 194?, 24, 25?—291) было введено понятие о классе насыщения метода суммирования. Фавар показал (РЖМат, 1958, 97 0), что класс насыщения метода Γ определяется поведением функций $\mid 1 - \gamma_\omega^k \mid$ при $\omega \to \infty$. В случае, когда Γ представляет собой λ-выпуклый метод класса $T(\lambda, \varphi)$, для которого последовательность λ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \mid \lambda_{k-1} - 2\lambda_k + \lambda_{k+1} \mid + n(\lambda_n - \lambda_{n-1}) = O(\lambda_n),$$

то класс насыщения метода Γ применительно к рядам Фурье в пространствах $C(-\pi, \pi)$ и $L^p(-\pi, \pi)$ $(p \geqslant 1)$ зависит лишь от последовательности. Дается полное описание соответствующих классов насыщения. В частности, из результатов автора вытекают соответствующие результаты Бутцера (РЖМат, 1957, 5463) для метода Абеля, а также результаты Алянчича (РЖМат, 1 5?, ?513) для метода Гёльдера.

Г. Ф. Кангро

6654. Об абсолютном суммировании расходящихся рядов арифметическими средними. Обрешков Върху абсолютното сумиране на разходящите редове с аритметичните средни. Обрешков Н.), Изв. Матем. ин-т. Бълг. АН, 1959, 3, № 2, 39—61 (болг.; рез. русск., франц.)

Устанавливаются следующие тауберовы теоремы для абсолютной суммируемости:

1. Если s_n^k — чезаровские средние порядка k для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $t_n = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n} \nu u_\nu$, то при натуральном k из $\sum_{n=1}^{\infty} \mid t_n - t_{n+1} \mid < \infty$ следует $\sum_{n=1}^{\infty} \mid s_n^k - s_{n-1}^k - u_n \mid < \infty$ $(s_0^k = 0)$. При $\sum_{n=1}^{\infty} \mid s_n^k - s_{n-1}^k \mid < \infty$ отсюда вытекает известное следствие одной теоремы Хислопа (Hyslop J. M., J. London Math. Soc., 1?36, 12, 176—180).

2. Пусть положительные вещественные числа λ_n образуют возрастающую неограниченную последовательность. Пати (РЖМат, 1956, 538) дал достаточное условие для того, чтобы из $\mid R, \lambda, k \mid$-суммируемости ря-

да $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ следовала абсолютная сходимость того же ряда. Автор доказывает, что $|R, \lambda, 1|$-суммируемость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ влечет за собой абсолютную сходимость этого ряда тогда и только тогда, когда $\sum_{n=1}^{\infty} |t_n - t_{n+1}| < \infty$ при $t_n = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu u_\nu\right)/\lambda_{n+1}$.

3. Пусть натуральные числа n_μ и m_μ $(\mu = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют условиям $n_\mu < m_\mu \leqslant n_{\mu+1}$, $\lambda_{m_\mu}/\lambda_{n_\mu} > q > 1$. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ является $|R, \lambda, 1|$-суммируемым и $u_n = 0$ при $n_\mu < n < m_\mu$, то $\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\sum_{n=m_\mu}^{n_{\mu+1}} u_n\right| < \infty$.

Случай $\lambda_n = n$, а также случай $n_\mu = \mu$, $m_\mu = \mu + 1$ рассмотрены автором ранее (РЖМат, 1957, 1559).

Теорема 1 распространяется также на случай абсолютно суммируемых интегралов. Г. Ф. Кангро

6655. Пределы итерированных логарифмических функций. Гудстейн (Limits of iterated logarithmic functions. Goodstein Peter), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 295—296 (англ.)

Исследуется последовательность $b_n = b^{b_{n-1}} (b_0 = 1)$ при $b \geqslant 1$ и устанавливается, что при $1 \leqslant b \leqslant e^{1/e}$ b_n сходится к β, где β — корень уравнения $x^{1/x} = b$, лежащий на сегменте $[1; e]$ при $1 < b < e^{1/e}$ уравнение $x^{1/x} = b$ имеет второй корень $B > e$; при $b = e^{1/e}$ $\beta = B = e$). Если $b > e^{1/e}$, то $b_n \to \infty$. В качестве одного из примеров приводится последовательность

$$\sqrt{2}, \sqrt{2^{\sqrt{2}}}, \sqrt{2^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}}, \ldots$$

$(\sqrt{2} < e^{1/e} \approx 1{,}445)$, сходящаяся к 2. Далее рассматривается последовательность итерированных логарифмов $L^n x = \log_b \log_b \ldots \log_b x$ $(b > 1)$. Доказывается, что при $1 < b \leqslant e^{1/e}$ и $x > \beta$ последовательность $L^n x$ сходится к B, причем при $\beta < x < B$ $L^n x$ возрастает, при $x = B$ $L^n x = B = \text{const}$ и при $x > B$ убывает. Для значений $x < \beta$, а также при $b > e^{1/e}$ и любом значении x, при достаточно большом n, $L^n x$ не существует. Исследование b_n и $L^n x$ для случая, когда $0 < b < 1$, проведено в следующей статье (реф. 6656). А. Г. Школьник

6656. Система уравнений $b^x = x_1$, $b^{x_1} = x_2, \ldots, b^{x_n} = x$. Гудстейн (The system of equations $b^x = x_1$, $b^{x_1} = x_2, \ldots, b^{x_n} = x$. Goodstein R. L.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 296—299 (англ.)

Последовательность $b_n = b^{b_{n-1}}$ $(b_0 = 1)$, рассмотренная в предшествующей статье (реф. 6655) для $b > 1$, здесь исследуется при $0 < b < 1$. В этом случае b_{2p+1} возрастает и ограничена сверху, а b_{2p} убывает и ограничена снизу; обе подпоследовательности сходятся $\lim b_{2p+1} = \xi$, $\lim b_{2p} = \eta$; при этом $b^\xi = \eta$, а $b^\eta = \xi$. ξ, η и β $(\beta^{1/\beta} = b)$ являются корнями уравнения $b^{b^x} = x$. При $0 < b < 1/e^e$ все три корня этого уравнения различны $(0 < \xi < \beta < \eta < 1)$, b_n в этом случае расходится; при $b \geqslant 1/e^e$ корни эти совпадают и b_n (как и в случае $1 < b < e^{1/e}$) сходится к β. Затем при $0 < b < 1$ рассматривается последовательность итерированных логарифмов $L^n x = \log_b \log_b \ldots \log_b x$. В случае, когда $1/e^e \leqslant b < 1$ $L^n x$ существует для всех n только при значении $x = \beta$. При $0 < b < 1/e^e$ для всех n $L^n x$ существует в промежутке $\xi \leqslant x \leqslant \eta$ и сходится к β внутри этого промежутка. Далее вводится последовательность $b_n(x) = b_{n-1}^{(x)}$ $(b_0(x) = x)$, которая (как и последовательность b_n) при $b > e^{1/e}$ и любом значении x $(\geqslant 0)$ стремится к ∞. Поведение ее при $1 < b < e^{1/e}$ зависит от значения x: так, при $x > B$ $b_n(x) \to \infty$, при $0 < x < B$ $b_n(x) \to \beta$. При $0 < b < 1$ поведение $b_n(x)$ совпадает с b_n. Наконец, рассматривается система уравнений

$$b^x = x_1, b^{x_1} = x_2, \ldots, b^{x_n} = x, \qquad (1)$$

равносильная системе

$$b_1(x) = x_1, \; b_2(x) = x_2, \ldots, b_n(x) = x_n; \; b_{n+1}(x) = x. \qquad (2)$$

Если $b = 1$, то единственное решение $x = 1$. При $1 < b < e^{1/e}$ — два решения $x = \beta$ и $x = B$. При $0 < b < 1$ и n четном единственное решение $x = \beta$; при n нечетном $b_{n+1}(x) = x$ имеет те же корни, что и уравнение $b_2(x) = x$. А. Г. Школьник

6657. Рекуррентная формула для коэффициентов асимптотических разложений. Райт (A recursion formula for the coefficients in an asymptotic expansion. Wright E. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1958, **4**, № 1, 38—41 (англ.)

Пусть $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) x^n$, где $g(t) = \dfrac{\prod_{r=1}^{p} \Gamma(t+\beta_r)}{\prod_{r=0}^{q} \Gamma(t+\gamma_r)}$,

причем $\varkappa = q - p + 1 \geqslant 1$, $p \geqslant 0$; положив $\vartheta = \sum_{r=1}^{p} \beta_r - \sum_{r=0}^{q} \gamma_r + \frac{1}{2}(\varkappa + 1)$, мы получаем при большом $|t|$ и $|\arg t| < \pi - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$,

$$g(t) = a(\varkappa^\varkappa)^t \left\{\sum_{m=0}^{M} \frac{\varkappa c_m}{\Gamma(\varkappa t - \vartheta + m + 1)} + O\left(\frac{1}{\Gamma(\varkappa t - \vartheta + M + 1)}\right)\right\},$$

где $c_0 = 1$, $a = (2\pi)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varkappa} \varkappa^{-\frac{1}{2}-\vartheta}$. Тогда в некотором секторе плоскости x, содержащем положительную действительную полуось, имеет место разложение

$$G(x) = aX^\vartheta e^X \left\{\sum_{m=0}^{M}{}' c_m X^{-m} + O(X^{-M-1})\right\},$$

где $X = \varkappa x^{\frac{1}{\varkappa}}$.

Доказывается, что

$$\varkappa m c_m = \sum_{s=1}^{q} T_{q-s}(s-m) c_{m-s} - \sum_{s=1}^{p-1} U_{p-s-1}(s-m) c_{m-s},$$

где

$$T(t) = \prod_{r=0}^{q} (t - \varkappa + \varkappa\gamma_r + \vartheta),$$

$$U(t) = \prod_{r=1}^{p}{}' (t + \varkappa\beta_r + \vartheta).$$

Если m велико по сравнению с q, то

$$T_{q-s}(s-m) \sim \sum_{r=0}^{s+1} (-1)^{s-r+1} T_{q-r+1}(0) \times \frac{(q-r+1)!\,(m-r)!}{(m-s-1)!\,(q-s)!\,(s-r+1)!},$$

$$U_{p-s-1}(s-m) \sim \sum_{r=0}^{s+1} (-1)^{s-r+1} U_{p-r}(0) \times$$

$$\times \frac{(p-r)!\,(m-r)!}{(m-s-1)!\,(p-s-1)!\,(s-r+1)!}$$

Ю. Л. Рабинович

6658. Алгоритм деления и вычитания и эпсилон-алгоритм. Бауэр (The quotient-difference and epsilon algorithms. Bauer Friedrich L.), On Numerical Approximat. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1959, 361—370 (англ.)

Рассматривается алгоритм, названный автором g-алгоритмом и из которого нетрудно получить алгоритм деления и вычитания Рутисхаузера (РЖМат, 1955, 5316) и ε-алгоритм Уинна (РЖМат, 1957, 7408). g-алгоритм основан на тождестве

$$\overset{(\sigma)}{s}(z) = \frac{s_{\sigma-1}(c-\overset{(\sigma-1)}{g_1})}{z-c} + \frac{\overset{(\sigma-1)}{g_1}\,\overset{(\sigma-1)}{g_2}}{1} +$$

$$+ \frac{(1-\overset{(\sigma-1)}{g_2})\,(c-\overset{(\sigma-1)}{g_3})}{z-c} + \ldots = \frac{s_\sigma}{z-c} + \frac{\overset{(\sigma)}{g_0}\overset{(\sigma)}{g_1}}{1} +$$

$$+ \frac{(c-\overset{(\sigma)}{g_1})\,(1-\overset{(\sigma)}{g_2})}{z-c} + \frac{\overset{(\sigma)}{g_2}\overset{(\sigma)}{g_3}}{1} + \cdots,$$

где $\overset{(\sigma)}{s}(z)$ есть главная часть цепной дроби $z^\sigma s(z)$, формальное разложение которой в степенной ряд имеет вид:

$$\frac{s_\sigma}{z} + \frac{s_{\sigma+1}}{z^2} + \frac{s_{\sigma+2}}{z^3} + \ldots \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots).$$

Выражения $\overset{(\sigma)}{g_n}$ $(n, \sigma = 0, 1, 2, \ldots)$ связаны соотношениями

$$\overset{(\sigma-1)}{g_{2\mu-1}}\,\overset{(\sigma-1)}{g_{2\mu}} = \overset{(\sigma)}{g_{2\mu-2}}\,\overset{(\sigma)}{g_{2\mu-1}},$$

$$\left(1-\overset{(\sigma-1)}{g_{2\mu}}\right)\left(c-\overset{(\sigma-1)}{g_{2\mu-1}}\right) = \left(c-\overset{(\sigma)}{g_{2\mu-1}}\right)\left(1-\overset{(\sigma)}{g_{2\mu}}\right)$$

$(\mu = 1, 2, 3, \ldots;\ \sigma = 0, 1, 2, \ldots)$. Кроме того, $s_\sigma = s_{\sigma-1} \times (c - \overset{(\sigma-1)}{g_1})$. Эти соотношения составляют второй g-алгоритм (первый в статье не рассмотрен). Выражения

$$\overset{(\sigma)}{g_{2\mu-2}}\left(c-\overset{(\sigma)}{g_{2\mu-1}}\right) \text{ и } \overset{(\sigma)}{g_{2\mu-1}}\left(1-\overset{(\sigma)}{g_{2\mu}}\right)$$

удовлетворяет алгоритму деления и вычитания. Далее, вводится „η-алгоритм“ при помощи выражений

$$\eta_\nu^{(\sigma)} = s_\sigma \frac{c-\overset{(\sigma)}{g_1}}{\overset{(\sigma)}{g_1}} \cdot \frac{c-\overset{(\sigma)}{g_2}}{\overset{(\sigma)}{g_2}} \cdot \frac{c-\overset{(\sigma)}{g_3}}{\overset{(\sigma)}{g_3}} \cdots \begin{cases} \dfrac{1-\overset{(\sigma)}{g_\nu}}{\overset{(\sigma)}{g_\nu}}, & \nu = 2\mu \\ \dfrac{c-\overset{(\sigma)}{g_\nu}}{\overset{(\sigma)}{g_\nu}}, & \nu = 2\mu+1, \end{cases}$$

удовлетворяющих соотношениям

$$c\left(\eta_{2\mu-1}^{(\sigma)} + \eta_{2\mu}^{(\sigma)}\right) = \eta_{2\mu-2}^{(\sigma+1)} + \eta_{2\mu-1}^{(\sigma+1)},$$

$$\frac{1}{c}\left(\frac{1}{\eta_{2\mu}^{(\sigma)}} + \frac{1}{\eta_{2\mu+1}^{(\sigma)}}\right) = \frac{1}{\eta_{2\mu-1}^{(\sigma+1)}} + \frac{1}{\eta_{2\mu}^{(\sigma+1)}}$$

причем $\dfrac{1}{\eta_{-1}^{(\sigma)}} = 0, \eta_0^{(\sigma)} = s_\sigma$

Выражения

$$\varepsilon_{2\mu}^{(\sigma)} = \sum_{\nu=0}^{\sigma-1} \frac{\eta_0^{(\nu)}}{c^{\nu+1}} + \frac{1}{c^{\sigma+1}} \sum_{\lambda=0}^{2\mu-1} \eta_\lambda^{(\sigma)} \qquad (\varepsilon_0^{(0)} = 0),$$

$$\varepsilon_{2\mu+1}^{(\sigma)} = c^{\sigma+1} \sum_{\lambda=0}^{2\mu} \frac{1}{\eta_\lambda^{(\sigma)}}, \quad \varepsilon_{-1}^{(\sigma)} \equiv 0$$

связаны между собой ε-алгоритмом. Подчеркнута роль рассмотренных алгоритмов для суммирования рядов и экстраполяции последовательностей по Стилтьесу.

А. Н. Хованский

6659 K. Тауберовы теоремы. Питт (Tauberian theorems. Pitt Harry Raymond. London, Oxford Univ. Press, 1958, xi, 174 pp., 37 sh. 6d.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 490, 8 (англ.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

6660. Об обобщениях Хевисайда и Миттаг-Леффлера показательной функции, о симметричных устойчивых распределениях Коши — Леви и об одном свойстве гамма-функции. Винтнер (On Heaviside's and Mittag — Leffler's generalizations of the exponential function, the symmetric stable distributions of Cauchy — Lévy, and a property of the Γ-function. Wintner Aurel), J. math. pures et appl., 1959, **38**, № 2, 165—182 (англ.)

Работа состоит из 3 частей, связанных между собой единством аппарата. В первой части для функции $f_\lambda(x) = x^{-\lambda}e^x - e_\lambda(x)$ $(0 < x < \infty)$, где

$$e_\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\Gamma(\lambda+n+1)}$$

(функция Хевисайда), доказывается, что при $0 < \lambda < 1$

$$\Gamma(\lambda) f_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-xt}(1+t)^{\lambda-1}\,dt$$

и

$$f_\lambda(x) = C_\lambda \int_0^\infty (x+t)^{-1} e^{-t} t^{-\lambda}\,dt,$$

где $\pi C_\lambda = \sin \lambda\pi$. Из этих представлений вытекает ряд теорем о функции Хевисайда, доказанных ранее более сложными путями Барнесом, Ингамом и Джеффрисом, и Харди (Barnes E. W., Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1906, **A206**, 249—297; Hardy G. H., J. London Math. Soc., 1945, **20**, 48—57). Вторая часть посвящена вопросам, связанным с асимптотическим поведением функции Миттаг-Леффлера

$$E_\lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+\lambda n)}.$$

Фигурирующий в асимптотическом разложении при $x \to \infty$

$$\pi E_{1/\lambda}(-x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_\lambda(n) \frac{\Gamma(1/2 \lambda n)}{\Gamma(\lambda n)} x^{-n}$$

коэффициент $\alpha_\lambda(n) = (-1)^{n-1}\lambda\Gamma(\lambda n)\sin(1/2 \pi\lambda n)$ связан также с функцией

$$G_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-xt} \sin(t^{\frac{1}{\lambda}})\,dt \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_\lambda(n)}{n!} x^n,$$

а через нее с распределением Коши

$$\pi x^{-1-\lambda} G_\lambda\left(\frac{1}{x}\right) = F_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-t^\lambda}\cos xt\,dt,$$

которое, по теореме Леви, неотрицательно для всех x только при $0<\lambda\leqslant 2$ (Wintner A., Duke Math. J., 1941, 8, 678—681). Из абсолютной монотонности в смысле С. Н. Бернштейна функции $E_\lambda(-x)$ при $0<\lambda<1$ вытекает, что существует (единственная) функция $\varphi_\lambda(t)$, $d\varphi_\lambda(t)\geqslant 0$, такая, что

$$\Gamma(n+1)/\Gamma(\lambda n+1) = \int_0^\infty t^n d\varphi_\lambda(t).$$

Приведенные соотношения позволяют также установить асимптотическое поведение $\varphi_\lambda(t)$. В развитие этого результата в третьей части доказывается, что для $0<\lambda<1$ существует такая неубывающая для $-\infty<u<\infty$ функция $\beta_\lambda(u)$, для которой при $x\geqslant 0$ имеет место равенство

$$\Gamma(x+1)/\Gamma(\lambda x+1) = \int_{-\infty}^\infty e^{-xu} d\beta_\lambda(u).$$

В. И. Левин

6661. Нули функций Ханкеля и некоторых других функций, связанных с ними. Кублановская В. Н., Смирнова Т. Н., Тр. Матем. ин-та. АН СССР, 1959, 53, 186—191

Рассматриваются нули $\alpha_k^{(n)}$ и $\delta_k^{(n)}$ функций $\zeta_n^{(k)}(iz) = \sqrt{\frac{\pi iz}{2}}\,H^{(k)}_{n+1/2}(iz)$ и $\zeta_n^{(k)\prime}(iz)$, где $H^{(k)}_{n+1/2}(ik)$ ($k=1,2$) — функция Ханкеля с полуцелым индексом первого или второго рода, причем $\zeta_n^{(1)}(iz) = i^{-n-1}e^{-z}\times$ $\times z^{-n}P_n^{(1)}(z)$; $\zeta_n^{(1)\prime}(iz) = i^{-n}e^{-z}z^{-n-1}Q_n^{(1)}(z)$;

$$P_n^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{k!\,(n-k)!}\,z^{n-k};$$

$$Q_n^{(1)}(z) = nP_n^{(1)}(z) + z^2 P_{n-1}^{(1)}(z).$$

Вычисление таблиц нулей полиномов $P_n^{(1)}(z)$ и $Q_n^{(1)}(z)$ проводилось на быстродействующей электронной машине „БЭСМ“ методом Ньютона с помощью рекуррентных формул:

$$\widetilde{P}_n^{(1)}(z) = \frac{2n-1}{z}\widetilde{P}_{n-1}(z) + \widetilde{P}_{n-2}(z);$$

$$\widetilde{Q}_n^{(1)}(z) = \frac{n}{z}\widetilde{P}_n^{(1)}(z) + \widetilde{P}_{n-1}^{(1)}(z);$$

$$\widetilde{P}_n^{(1)\prime}(z) = \left[\left(\frac{n}{z}-1\right)\widetilde{P}_n^{(1)}(z) + \widetilde{P}_{n-1}^{(1)}(z)\right]z^2;$$

$$\widetilde{Q}_n^{(1)\prime}(z) = \left[\frac{n}{z}\left(\frac{n+1}{z}-1\right)\widetilde{P}_n^{(1)}(z) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2n-1}{z}-1\right)\widetilde{P}_{n-1}^{(1)}(z) + \widetilde{P}_{n-2}^{(1)}(z)\right]z^2,$$

где

$$\widetilde{P}_n^{(1)}(z) = z^{-n}P_n^{(1)}(z);\quad \widetilde{Q}_n^{(1)}(z) = z^{-(n+1)}Q_n^{(1)}(z).$$

Приводится таблица значений $\alpha_k^{(n)}$ и $\delta_k^{(n)}$ для значений n от $n=1$ до $n=30$ с семью значащими цифрами. Вычисление значений $P_n^{(1)}(z)$ проводилось с двойным числом значащих цифр. Начальные приближения нулей полиномов со значком $n=m$ по методу Ньютона получались квадратичной и линейной экстраполяцией по n из соответствующих нулей полиномов со значком $n<m$.

Ю. Л. Рабинович

6662. О кубических сферических гармониках. Атодзи (On the cubic spherical harmonics. Atoji Masao), J. Math. and Phys., 1959, 38, № 1, 73—74 (англ.)

6663. Об интерполяционных полиномах Чебышева. Лески, Кайзер (Über die Interpolationspolynome von Tschebyschew. Lesky P., Kaiser A.), Monatsh. Math., 1959, 63, № 3, 277—286 (нем.)

Вариационный метод Гребнера (Gröbner W., Monatsh. Math., 1948, 52, 38—54) применяется для построения хорошо известного семейства полиномов $y_\nu(x)$ ($\nu=0,1,\ldots,N$), характеризуемого условиями:

$$\sum_{x=0}^N y_\mu(x)\,y_\nu(x) = 0$$

при $\mu\neq\nu$; б) $y_\nu(x)$ — полином степени ν с фиксированным коэффициентом при x^ν. Именно, решается задача $\sum_{x=0}^N y_\nu^2(x) = \min$ с условием б). При помощи конечноразностного аналога классического метода решения простейшей вариационной задачи получается соотношение

$$y_\nu(x) = \Delta^\nu\left[\binom{x}{\nu}\binom{x-N-1}{\nu}\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^\nu \binom{\nu}{k}\binom{x}{\nu-k}\binom{x+k-N-1}{k}.$$

Отсюда выводятся рекуррентная формула, формула Кристоффеля — Дарбу и оценка для $|y_\nu(x)|$.

Г. К. Энгелис

6664. О некоторых обобщениях полиномов Лагерра, имеющих значение для задач одномерного распространения волн. Денисюк И. Н., Тр. 3-го Всесоюз. матем. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 52

6665. О гипергеометрическом тождестве Клаузена. Чонди (On Clausen's hypergeometric identity. Chaundy T. W.), Quart. J. Math., 1958, 9, № 36, 265—274 (англ.)

Получена формула $[F(a,b,c;x)]^2 = \sum_0^\infty d_n x^n$,

$$d_n = \frac{(2a)_n\,(2b)_n\left(c-\frac{1}{2}\right)_n}{n!\,(c)_n\,(2c-1)_n}\times$$

$$\times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{1},\ a+b-c+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\\ a+\frac{1}{2},\ b+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}-c-n\end{matrix}\right),$$

обращающаяся при $c=a+b+\frac{1}{2}$ в известное тождество Клаузена (Bailey W. N., Generalized hypergeometric series, 1935, 86). Даются также представления для $\left[F\left(a,b,a+b+\frac{1}{k};\ x\right)\right]^3$ ($k=2,3$) в виде $\sum_0^\infty c_n(k)\,x^n$, причем $c_n(2)$ и $c_n(3)$ выражаются соответственно через обрывающиеся ряды ${}_5F_4$ и ${}_9F_8$. Попутно получено для $(n+1)$-й частной суммы ряда

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix}2a,\ 2b,\ a+b\\ a+b+\frac{1}{2},\ 2a+2b\end{matrix}\right) $$

следующее выражение:

$$ \frac{(2a+1)_n\,(2b+1)_n\,(a+b)_n}{n!\left(a+b+\frac{1}{2}\right)_n\,(2a+2b)_n}\times $$

$$ \times\ {}_4F_3\left(\begin{matrix}-\frac{n}{2},\ \frac{1-n}{2},\ \frac{1}{2},\ 1\\ a+1,\ b+1,\ 1-a-b-n\end{matrix}\right). $$

Имеются опечатки. М. Н. Олевский

6666. Бесконечные ряды E-функций. Макроберт (Infinite series of E-functions. Macrobert T. M.), Proc. Glasgow Math. Assoc., 1958, 4, № 1, 26—28 (англ.)

Получены выражения через E-функции для сумм нескольких рядов, общие члены которых содержат E-функции. Так, например,

$$ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(z)^n}\,E\left(\begin{matrix}p;\ \alpha_r+n:2z\\ q;\ \rho_s+n\end{matrix}\right)=E\left(p;\ \alpha_r:q;\ \rho_s:z\right), $$

$|\operatorname{amp} z|<\pi$. М. Н. Олевский

6667. О функциях параболического цилиндра. Эпстейн (On the functions of the parabolic cylinder. Epstein David I. Res. Rept, Div. Electromagn. Res., Inst. Math. Sci., New York Univ., 1956, № BR-19, i, 24 pp.) (англ.)

Разделением переменных волновое уравнение

$$ u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+k^2(\xi^2+\eta^2)\,u=0 \qquad (1) $$

сводится к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям, решениями которых являются функции параболического цилиндра $D_\nu(z)$ (РЖМат, 1955, 3285 К, стр. 116). В этой статье даются формулы, выражающие регулярные и однозначные решения

$$ w_\nu(\xi'\eta')=D_\nu(\gamma\xi')D_{-\nu-1}(\gamma\eta')+ $$

$$ +D_\nu(-\gamma\xi')\,D_{-\nu-1}(-\gamma\eta') $$

уравнения (1) в терминах ω с аргументом (ξ,η) 1) в случае, когда ξ', η' получаются из ξ, η перемещением в xy-плоскость и 2) в случае, когда новые координаты получаются вращением около начала в этой плоскости; здесь $x=\frac{1}{2}(\xi^2-\eta^2)$, $y=\xi\eta$. В обоих случаях множество значений ν, для которых справедливы теоремы сложения, есть объединение двух разных подмножеств так, что теорема сложения для функций одного множества включает в себя только функции этого множества. Результаты применяются к асимптотическим оценкам некоторых интегралов, встречающихся в задаче о дифракции для коротковолнового излучения из источника, расположенного внутри параболического цилиндра.

K. N. Goss

Перевод из Math. Revs, 1957, 18, № 1, 30.

6668. Асимптотические формы волновых функций Коломба. I. С дополнением Суонсона. Эрдейи, Кеннеди, Мак-Грегор (Asymptotic forms of Coulomb wave functions. I. With an appendix by C. A. Swanson. Erdélyi A., Kennedy M., McGregor J. L. Techn. Rept. Dept Math. Calif., Inst. Technol. Pasadena, 1955, 4, 29 pp.) (англ.)

Волновые функции Коломба являются решениями дифференциального уравнения

$$ \frac{d^2y}{d\rho^2}+\left[1-\frac{2\eta}{\rho}-\frac{L(L+1)}{\rho^2}\right]y=0\quad(0<\rho<\infty), \qquad (1) $$

где L и η — действительные параметры, $L\geqslant -1/2$, $\eta>0$. При $z=2i\rho$, $k=i\eta$ и $m=L+\frac{1}{2}$ (1) сводится к хорошо известному уравнению Уиттекера; таким образом, волновые функции Коломба являются частным случаем гипергеометрических функций. Авторы дают полное описание асимптотического поведения стандартных решений (1) при $\eta\to\infty$ и $\rho\geqslant 2\eta$ до членов порядка η^{-1}. Случай $\rho<2\eta$ будет описан в следующем сообщении этой серии. Асимптотика волновых функций Коломба была получена многими авторами, но до сих пор их поведение при больших η и произвольном положительном ρ полностью изучено не было (РЖМат, 1954, 516 К). Связь между настоящими результатами и результатами Тейлора (Taylor, J. Math. and Phys., 1939, 18, 34—49) не объясняется. Авторы получают их результаты с помощью применения теории Лангера (Langer, Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 67, 461—490) и Черри (Cherry, Trans. Amer. Math. Soc., 1950, 68, 224—257). Для приложений (1) преобразуется в уравнение

$$ \frac{d^2y}{dx^2}+\nu^2\left[\frac{x}{1+x}-\frac{\alpha}{\nu^2(1+x)^2}\right]y=0, $$

где $2\eta=\nu$, $L(L+1)=\alpha$, $\rho=\nu(1+x)$. Точка $x=0$, где $\rho=2\eta$, есть простая переходная точка этого уравнения. Таким образом за точкой $x=-1$ асимптотическое поведение его решений при $\nu\to\infty$ выражается в терминах функций Эйри. Доминирующие члены в разложении для $F_L(\eta,\rho)$ сокращаются левее точки перехода, дающей начало другим разложениям, когда $\rho<2\eta$.

Заметим, что в методах Лангера и Черри, которые используются авторами, не требуется, чтобы ρ, η и L были действительными, т. е. более общая задача об асимптотическом поведении функции Уиттекера для больших (комплексных) k и неограниченных (комплексных) z может быть исследована с помощью этих же самых методов.

В приложении приведены таблицы, дающие значения волновых функций Коломба для $L=0$, $\rho=2\eta$ и $\eta=2(1)13$, $15(5)40$, $40(10)100$, $100(50)200$ и для $L=0$, $\eta=\frac{1}{2}$ или 5 и $\rho=1(1)10$. N. D. Kazarinoff

Перевод из Math. Revs, 1956, 17, № 10, 1083—1084.

6669. Новый подход к интегрированию эллипсоидального волнового уравнения. Арскотт (A new treatment of the ellipsoidal wave equation. Arscott F. M.), Proc. London Math. Soc., 1959, 9, № 33, 21—50 (англ.)

Ищутся аналитические решения эллипсоидального волнового уравнения

$$ d^2w/dz^2-(a+bk^2\operatorname{sn}^2z+qk^4\operatorname{sn}^4z)\,w=0, \qquad (1) $$

которые являются двоякопериодическими функциями с периодами $4K$ или $4K$ и $2iK$ или $4iK$. Такие решения существуют только при определенных значениях $a=a(q)$ и $b=b(q)$ (a и b — постоянные разделения переменных в волновом уравнении). Новая идея, приводящая к решению уравнения (1), годному во всей плоскости z, кроме окрестностей полюсов $\operatorname{sn}z$, заключается в том, чтобы исключить параметр a переходом к вспомогательному уравнению в частных производных

$$ \frac{\partial^2W}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial^2W}{\partial\beta^2}-k^2(\operatorname{sn}^2\alpha-\operatorname{sn}^2\beta)\{b+qk^2(\operatorname{sn}^2\alpha+\operatorname{sn}^2\beta)\}W=0 \qquad (2) $$

для функции $W=w(\alpha)\,w(\beta)$, где $w(z)$ — решение уравнения (1), и искать W в виде ряда

$$ W(\alpha,\beta)=\sum\sum A_n^m\,u\,\mathrm{Ep}_{2n}^m(\alpha,\beta). \qquad (3) $$

Здесь $u\,\mathrm{Ep}_{2n}^m(\alpha,\beta)$ обозначает произведение полиномов Ламе $uE_{2n}^m(\alpha)\cdot uE_{2n}^m(\beta)$ ($uE_{2n}^m(z)$ — полином степени n

относительно $\mathrm{sn}^2 z$, имеющий m нулей в интервале $0<z<K$). Коэффициенты A_n^m должны удовлетворять в силу (2) матричным соотношениям

$$\left.\begin{aligned}(Q_0+bI)\,A_0+R_0A_1=0,\\ P_nA_{n-1}+(Q_n+bI)\,A_n+R_nA_{n+1}=0\\ (n=1,\ 2,\ 3\ldots),\end{aligned}\right\}\qquad(4)$$

где $A_n=\{A_n^m\}_{m=0}^{m=n}$ — $(n+1,\ 1)$-матрица, а матрицы P, Q и R (причем Q — квадратные матрицы) выражаются через коэффициенты рекуррентных соотношений для полиномов Ламе. Кроме того, имеется условие нормировки $\sum\sum\left(A_n^m\right)^2=1$. Сами уравнения (4), вследствие их матричного характера, не достаточны для определения коэффициентов A_n^m. Но если наложить требование, чтобы ряд (3) был целой функцией $\mathrm{sn}\,\alpha$ и $\mathrm{sn}\,\beta$, то при некотором условии, определяющем характеристические значения параметра b, уравнения (4) допускают, с учетом нормировки, единственное решение. Это условие на b может быть записано в виде характеристического уравнения $D=0$, где D — определитель бесконечного порядка, составленный из коэффициентов уравнений (4), умноженных каждое на соответствующий множитель, обеспечивающий сходимость этого определителя. Далее показывается, что построенное таким образом решение вспомогательного уравнения (2) действительно является произведением $w(\alpha)\,w(\beta)$ двух решений исходного уравнения (1), соответствующих выбранному характеристическому значению $b=b_N^M$. Чтобы получить искомое $w(z)$ достаточно рассмотреть $W(z,\beta)$ при фиксированном β. Однако этот путь перехода от W к w с вычислительной стороны оказывается неудачным. Поэтому используется интегральное представление эллипсоидальных волновых функций (решений уравнения (1)) и получаются разложения восьми эллипсоидальных волновых функций $\mathrm{uel}_{2N}^M(z)$, $\mathrm{sn}\,z\cdot\mathrm{uel}_{2N}^M(z)$, $\mathrm{cn}\,z\cdot\mathrm{uel}_{2N}^M(z)$, $\mathrm{dn}\,z\cdot\mathrm{uel}_{2N}^M(z)$, $\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\cdot\mathrm{uel}_{2N}^M(z)$, $\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\cdot\mathrm{uel}_{2N}^M(z)$, $\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\cdot\mathrm{uel}_{2N}^M(z)$, $\mathrm{sn}\,z\,\mathrm{cn}\,z\,\mathrm{dn}\,z\cdot\mathrm{uel}_{2N}^M(z)$ в ряды по бесселевым функциям, например:

$$\mathrm{uel}_{2N}^M(z)=(kh\,\mathrm{sn}z)^{-1/2}\sum S_n^{(u)}\,I_{2n+\frac12}(kh\,\mathrm{sn}\,z),$$

$$\mathrm{uel}_{2N}^M(z)=(kh\,\mathrm{cn}z)^{-1/2}\sum C_n^{(u)}\,J_{2n+\frac12}(kh\,\mathrm{cn}\,z),$$

$$\mathrm{uel}_{2N}^M(z)=(kh\,\mathrm{dn}z)^{-1/2}\sum D_n^{(u)}\,J_{2n+\frac12}(kh\,\mathrm{dn}\,z)\ —$$

всего 24 разложения. Здесь $S_n^{(u)}$, $C_n^{(u)}$, $D_n^{(u)}$ — элементы некоторых матриц, связанных с матрицей D, а J — функции Бесселя 1-го рода. В заключение рассматриваются характеристические значения $a=a(q)=w''(0)/w(0)$, которые играют существенную роль в асимптотическом поведении решения вблизи полюсов $\mathrm{sn}\,z$, а также случай вырождения матриц Q. Исследуется также асимптотическое поведение характеристических значений b.

В. И. Левин

6670 К. Вырожденные гипергеометрические функции. Трикоми (Funzioni ipergeometriche confluenti. Tricomi Francesco G. Roma, Ed. Cremonese, 1954, XV, 309 p., 3500 L.) (итал.)

Настоящая книга значительно отличается от более ранних лекций о вырожденных гипергеометрических функциях (Tricomi F., Lezioni sulle funzioni ipergeometriche confluenti, Gheroni, Torino, 1952); она более полная и дает подробную картину теории и приложений вырожденных гипергеометрических функций и рассчитана на более подготовленного читателя.

Гл. I. Уравнение

$$xy''+(c-x)\,y'-ay=0\qquad(1)$$

вводится как каноническая форма вырожденного гипергеометрического уравнения. Рассматриваются несколько дифференциальных уравнений, сводящихся к (1). Если c не является целым числом, ряды Куммера

$$\Phi(a,\ c;\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(c)}{n!\,\Gamma(a)\,\Gamma(c+n)}\,x^n\qquad(2)$$

и

$$x^{1-c}\,\Phi(a-c+1,\ 2-c;\ x)$$

образуют фундаментальную систему решений (1). Функция $\Phi^*(a,\ c;\ x)=\Phi(a,c;\ x)/\Gamma(c)$ есть целая функция a, c, x. Исследуются элементарные свойства Φ, включая преобразование Куммера, рекуррентную и дифференциальную формулы, интегралы, ряды, специальные случаи. Дается разложение Трикоми Φ^* в ряды по бесселевым функциям.

Гл. II. Интегрирование (1) с помощью интеграла Лапласа приводит к (2), а также к

$$\Psi(a,c;x)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^{\infty}e^{-xt}\,t^{a-1}(1+t)^{c-a-1}\,dt.\qquad(3)$$

Рассматриваются элементарные свойства Ψ, связь между Ψ и Φ; другие интегральные представления, в том числе интегралы типа Меллина — Барнса. Даются разнообразные результаты, в том числе производные вырожденных гипергеометрических функций по параметрам.

Гл. III. Асимптотические разложения и нули вырожденных гипергеометрических функций. Графики этих функций для действительных a, c, x.

Гл. IV. Специальные случаи. Неполные гамма-функции, функции ошибок и родственные функции, экспоненциальный интеграл и родственные функции, функции параболического цилиндра.

Гл. V. Приложения к задаче двух тел волновой механики, изгибанию эластичных пластинок, результирующей большого числа случайных векторов, водяным волнам, число которых есть сумма двух k-х степеней, отражение электромагнитных волн на параболическом цилиндре.

В книге имеется таблица пар преобразования Лапласа, включающая вырожденные гипергеометрические функции, список ссылок и указатель; книга прекрасно издана и референтом замечено в ней очень мало опечаток. A. Erdélyi

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 9, 967.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

6671. Некоторые свойства обобщенного преобразования Лапласа. I. Нараин (Some properties of generalized Laplace transform. I. Narain Roop), Riv. mat. Univ. Parma, 1957, 8, № 4-5, 283—306 (англ.)

Для обобщенного преобразования Лапласа, определяемого формулой

$$\varphi(s)=W[f(t);\ k,\ m]=$$

$$=s\int_0^{\infty}(st)^{m-\frac12}\exp(-st/2)\,W_{k,m}(st)\,f(t)\,dt$$

$$(W_{k,m}(t)\ —$$

функция Уиттекера), доказываются предложения двух типов. Теоремы 1, 2, 3, 4, 5 посвящены вопросу вычисления обобщенного преобразования Лапласа $W[Af; k, m]$ от различных операторов Af, по заданному преобразованию $W[f(t); k, m]$. В указанных теоремах рассматриваются соответственно операторы:

$$Af = t^{\nu} W[f(u); l, n]|_{s=t}; \quad \int_0^{\infty} g(x,t) f(x)\, dx$$

($g(x,t)$ — специального вида); $\sqrt{2\pi}\, 2^{-1/2-k-m}\, tf(t^2/4)$; $f(t^2)$. Например, теорема 5 утверждает: Если $W[f(t); k, m] = \varphi(s, k, m)$ и $W[t^{-1/2}\varphi(1/t; k, m); k, m] = g(s, k, m)$, то

$$W[f(t^2); k, m] = 2^{1/2+k+m}\, (\sqrt{\pi}\, s)^{-1} g(s^2/4; k/2+1/4, m/2),$$

если только $R(s) \geqslant s_0 > 0$ и существует обобщенное преобразование Лапласа функций $|f(t)|$ и $|f(t^2)|$. Подобным же образом формулируются и остальные теоремы. Поскольку при $k+m = 1/2$ обобщенное преобразование совпадает с обычным, то в качестве следствий получаются соответствующие предложения для обычного преобразования Лапласа. Теоремы 3, 6, 7 устанавливают соотношения между некоторыми интегралами по промежутку $[0, \infty)$ от выражений, зависящих от заданных функций и их обобщенных преобразований Лапласа. Например, по теореме 6, если $\varphi(s, k, m) = W[f(t); k, m]$; $s^{1/2} f(s^{-1}) = W[g(t); k, m]$ и $\psi(s, k, m) = W[\theta(t); k, m]$, то

$$\int_0^{\infty} \varphi(t^2; k/2 + 1/4,\ m/2)\, \theta(t)\, t^{-1}\, dt = \sqrt{\pi}\, 2^{-k-m-1/2} \times$$

$$\times \int_0^{\infty} \psi(t, k, m)\, g(t^2/4)\, dt,$$

если только интегралы сходятся абсолютно.

Л. С. Раковщик

6672. Некоторые интегро-дифференциальные операторы и разложения в ряды, аналогичные рядам Шлёмильха. Акопян С. А., Нерсесян А. Б. Айкакан ССР Гитутюннери Академиа. Зекуйцнер, Докл. АН АрмССР, 1958, 27, № 4, 201—207 (рез. арм.)

Пусть $0 < \alpha < 1$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Вводятся операторы

$$L^+ f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x^2 - t^2)^{\alpha-1}\, tf(t)\, dt,$$

$$L^- f(x) = \frac{2}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t^2 - x^2)^{\alpha-1}\, tf(t)\, dt,$$

и их обращения M^+ и M^-. Если $\{\varphi_n, \psi_n\}$ — биортогональная на $[a, b]$ система функций, то при произвольных функциях $u(x)$ и $v(x)$, при которых существуют и непрерывны функции

$$\Phi_n(x) = v(x)\, L^+ \left\{ \frac{u(x)}{x}\, \varphi_n(x), \right\},$$

$$\Psi_n(x) = \frac{x}{v(x)}\, M^- \left\{ \frac{\psi_n(x)}{u(x)} \right\},$$

система $\{\Phi_n, \Psi_n\}$ также оказывается биортогональной на $[a, b]$. В частности, когда $u(x) = x^{\nu}$, $v(x) = 1$,

$$\varphi_n(x) = xJ_{\nu}(j_n x),\ \psi_n(x) = \frac{2}{J^2_{\nu+1}(j_n)} J_{\nu}(j_n x),$$

где $J_{\nu}(x)$ — функция Бесселя, а $j_n = j_{n,\nu}$ — ее положительные корни, получается биортогональная система $\{\Phi_n, \Psi_n\}$, в которой

$$\Phi_n(x) = \left(\frac{2}{j_n}\right)^{\alpha} x^{\nu+\alpha} J_{\nu+\alpha}(j_n x).$$

Теорема. Пусть $0 < \Delta < 1$. Если $f(x)$ задана на $[0, 1]$ и такова, что на каждом $[0, \delta] \subset [0, \Delta]$ функция $x^{-\nu} M^+ f(x)$ представима равномерно сходящимся рядом Фурье—Бесселя по $J_{\nu}(j_n x)$, то сама $f(x)$ разлагается в ряд по функциям $\Phi_n(x)$, причем сходимость равномерна на тех же $[0, \delta]$. Отмечается возможность аналогичного обобщения рядов Дини. Имеются опечатки.

И. П. Натансон

6673. Краткое замечание о двойственных себе функциях. Рао (A short note on self-reciprocal functions. Rao V. V. L. N.), Current Sci., 1959, 28, № 3, 106—107 (англ.)

Функцию $f(x)$ обозначим R_{μ}, если она будет двойственной себе относительно преобразования Ханкеля порядка μ, т. е. она задается как

$$f(x) = \int_0^{\infty} J_{\mu}(xy) f(y) \sqrt{xy}\, dy, \qquad (1)$$

где $J_{\mu}(x)$ — функция Бесселя порядка μ. Если $f(x)$ в левой части (1) заменить на $-f(x)$, тогда говорят, что $f(x)$ будет косой двойственной (skew reciprocal) относительно преобразования Ханкеля порядка μ и обозначается $-R_{\mu}$.

Теорема. Если $f(x)$ есть $\pm R_{\mu}$, тогда

$$\varphi(x) = F^n(a) f\{xF^{2n}(a)\} \pm \frac{1}{F^n(a)} f\left\{\frac{x}{F^{2n}(a)}\right\}$$

есть $\pm R_{\mu}$, где $F(a) \neq 0$.

6674 К. Операционное исчисление. Специальные функции. Пособие для университета. Фазекаш, Фрей (Operátorszámítás. Speciális függvények. Egyetemi segédkönyv. Fazekas Ferenc, Frey Tamás. Budapest, Tankönyvkiadó, 1957, 287 l., 27 Ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1957, № 10-12, 228 (венг.)

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

6675. Метод преобразования Лапласа в задачах излучения. II. Задача Милна с некогерентным рассеянием. Уэно (The Laplace transform method for problems of radiative transfer. II. Milne's problem with non-coherent scattering. Ueno Sueo), Ann. astrophys., 1958, 21, № 2, 71—76 (англ.; рез. франц., русск.)

Рассматривается преобразование Лапласа (изображение)

$$\bar{J}(p) = p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} J(\tau)\, d\tau$$

функции $J(\tau)$, которая удовлетворяет интегральному уравнению Милна

$$J(\tau) = \frac{1}{2\eta} \int_{\nu_1}^{\nu_2} \eta_{\nu}^2\, d\nu \int_0^{\infty} J(\tau')\, d\tau' \int_0^1 e^{-\frac{|\tau-\tau'|\eta_{\nu}}{\mu}} \frac{d\mu}{\mu},$$

где η_{ν} — известная функция от ν, а η, ν_1 и ν_2 — постоян-

ные. Наводящими соображениями показывается, что $\overline{J}(p) = CH(p)$, где C — постоянная, а $H(p)$ удовлетворяет соотношению

$$H(p) = 1 + \frac{1}{2} p H(p) \int_0^1 \frac{H(x) K(x)}{p + x} dx,$$

в котором $K(x) = \frac{2}{\eta} \int_{\nu}^{\nu_2} \eta_{\nu'}^2 d\nu'$, а $\nu = \nu(x)$ может быть явно задана. В. И. Левин

6676. Заметка о точном и явном решении переходных уравнений в модели Милна — Эддингтона методом преобразований Лапласа. Дасгупта (A note on the exact explicit solution of transfer equations in the Milne — Eddington model by the method of Laplace-transforms. Dasgupta Santi Ranjan), Sci. and Culture, 1956, 22, № 3, 177—180 (англ.)

6677. Соответствие в аналитической обработке колебательных переходных вероятностей двуатомных молекул. Тавде, Патил, Савадатти (Correspondence in analytical treatments of vibrational transition probabilities of diatomic molecules. Tawde N. R., Patil B. S., Savadatti M. I.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1959, 28, № 5-6, 150—154 (англ.)

Вычисляется интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{n'} \Psi_{n''} d\nu$, где $\Psi_{n'} = N_{n'} \exp(-\eta^2/2) H_{n'}(\eta)$, $\Psi_{n''} = N_{n''} \exp(-\xi^2/2) H_{n''}(\xi)$, H — эрмитов полином, η, ξ — функции от $(r - r_0')$ и $(r - r_0'')$ соответственно, $N_{n'}$ и $N_{n''}$ — нормализующие множители.

6678. Обобщение одного критерия для проверки интерпретации гравитационных наблюдений. Смолицкий Х. Л., Докл. АН СССР, 1956, 106, № 2, 237—238

А. А. Ляпунов (РЖМат, 1956, 3053) получил критерий для проверки интерпретации гравитационных наблюдений в случае бесконечной цилиндрической массы произвольного сечения, лежащей под поверхностью земли. Автор этот критерий получает другим путем, приводящим к аналогичным критериям для конечной массы произвольной формы. В. К. Захаров

6679. Функции передачи и переходные процессы. Земанян (On transfer functions and transients. Zemanian Armen H.), Quart. Appl. Math., 1958, 16, № 3, 273—294 (англ.)

В связи с теорией линейных и устойчивых систем автоматического регулирования рассматривается функция

$$Z(s) = K \frac{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0}{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_0} = K \frac{N(s)}{D(s)}, \quad (1)$$

$n < m$, $s = \sigma + i\omega$; K — действительное число. Пусть

$$Z_q(i\omega) = R_q(\omega) + i I_q(\omega)$$

и

$$Z_q(i\omega) = (-i)^q \int_{\infty}^{s} ds_{q-1} \int_{\infty}^{s_{q-1}} ds_{q-2} \ldots \int_{\infty}^{s_1} Z(s_0) ds_0,$$

где действительные части комплексных переменных $s_0, s_1, \ldots, s_q$ все неотрицательны и $q \leqslant m - n - 1$.

Определение. $Z(s)$ называется функцией класса k, где $k = m - n$, если для $-\infty < \omega < +\infty$ выполняется одно из неравенств: $(-1)^{\nu} R_{k-1}(\omega) \geqslant 0$ для $k = 2\nu + 1$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$; $(-1)^{\nu+1} I_{k-1}(\omega) \geqslant 0$ для $k = 2\nu$.

Теорема 1. Если $Z(s)$ — функция класса k, тогда $(-i)^{m-n-1} Z_{m-n-1}(s)$ является положительной действительной функцией для $\sigma > 0$ и k положительных.

Определение. $Z(s)$ называется функцией подкласса k, где $k = m - n$, если для $-\infty < \omega < +\infty$ при k нечетного $R(\omega)$ имеет $k - 1$ перемен знака и $R(\omega)$ положительно, а для k четного $I(\omega)$ имеет $k-1$ перемен знака и $\partial I/\partial\omega$ при $\omega = 0$ отрицательных.

Теорема 3. Пусть $Z(s) = k/D(s)$, где $D(s)$ полином Гурвица, а k положительно. Тогда $Z(s)$ является функцией подкласса m.

Теорема 4. Функция $Z(s)$ является функцией подкласса $m - n$, если для $m - n$ нечетного, число перемен знака в коэффициентах $P(x)$ $(P(\omega^2)$ и $\omega Q(\omega^2)$ — четная и нечетная части выражения $N(i\omega) D(-i\omega)$ равно $(m - n - 1)/2$ и $P(0)$ положительно. Для $m - n$ четного, число перемен знака в коэффициентах $Q(x)$ равно $(m - n - 2)/2$ и $Q(0)$ отрицательно.

Имеются и другие теоремы этого типа. Следующие две теоремы касаются условий, накладываемых на аргумент коэффициента передачи, фазовую характеристику $\varphi(\omega)$, с целью установления принадлежности $Z(s)$ подклассу $m - n$. Последние две теоремы устанавливают границы для импульсной реакции, являющейся преобразованием Фурье для $Z(s)$, и реакции на единичный толчок. И. А. Овсеевич

6680. Метод аналогий для вычисления выходного сигнала симметричного полосного фильтра при входном синусоидальном сигнале произвольной частоты. Есперс (Méthode de calcul analogique de la réponse transitoire des filtres passe-bande symétriques soumis à l'application d'un signal sinusoidal de pulsation quelconque. Jespers Paul), Ann. Assoc. internat. calcul. analog., 1958, 1, № 2, 75—83 (франц.)

Посредством преобразования Лапласа доказывается свойство:

Если к полосному симметричному фильтру внезапно приложен входной синусоидальный сигнал постоянной амплитуды и произвольной частоты, то огибающая выходного сигнала может быть приближенно представлена модулем неполного преобразования Лапласа наполовину сжатой огибающей импульсной характеристики того же фильтра, причем в неполном преобразовании Лапласа переменная p должна быть приравнена комплексной частоте $j\Omega$, где Ω равно разности между частотой сигнала и частотой симметрии полосного фильтра.

Приводятся геометрический смысл доказанного свойства и применения этого свойства в электротехнике. В частности, описывается аппаратура, автоматически реализующая применение вышеуказанного свойства, и приводятся фотоснимки примеров, полученных посредством этой аппаратуры. Н. А. Бразман

6681. Заметка о максимально плоских задерживающих сетях. Вуд (Note on maximally flat delay networks. Wood I. E.), IRE Trans. Circuit Theory, 1958, 5, № 4, 363—364 (англ.)

6682 К. Анализ линейных систем. Чжэн (Analysis of linear systems. Cheng David K. Reading Mass. — London, Addison-Wesley Publ. Co., 1959, xii + 431 pp., ill., 64 sh.) Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 49 14 (англ.)

См. также: 6339, 6349, 6352, 6374, 6538, 6725, 6755 К 6821.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *М. А. Наймарк*

6683. Компактификация фактор-пространства Зигеля. I. Сатакэ (Compactification des espaces quotients de Siegel. I. Satake Ichiro), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1957—1958, 2. Paris, 1958, 12-1—12-13 (франц.)

Обозначим через H_n обобщенную верхнюю полуплоскость Зигеля степени n, т. е. совокупность всех комплексных симметрических матриц $Z = X + iY$ таких, что $\frac{1}{2i}(y - \bar{y}) > 0$. Пусть Γ_n — модулярная группа Зигеля. Цель статьи компактификация фактор-пространства H_n/Γ_n, т. е. вложение H_n/Γ_n в некоторое компактное пространство M_n. Пространство M_n строится следующим образом. Обозначим через $\Gamma_{n,r}$ совокупность $M \in \Gamma_n$ следующего вида:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 & B_{12} \\ A_{21} & A_2 & B_{21} & B_2 \\ C_1 & 0 & D_1 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix}$$

Положим, кроме того, $\varphi(M) = M_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим пары (M, Z), где $M \in \Gamma_n$, а $Z \in H_r$ $(0 < r < n)$. Условимся считать пары (M, Z) и (M', Z') эквивалентными, если $r = r'$ и $M'^{-1}M \in \Gamma_{n,r}$, $Z' = (\varphi(M'^{-1}M))Z$. Эквивалентные пары объединяются в классы. Множество классов обозначим через H_n^*. В пространстве H_n^* действует группа Γ, а именно каждому $M_0 \in \Gamma$ соответствует преобразование $(M, Z) \to (M_0 M, Z)$. M_n является фактор-пространством H_n^*/Γ_n. Можно показать, что $M_n = H_n/\Gamma_n \cup \ldots \cup H_0/\Gamma_0$. Основной результат состоит в том, что пространство M_n в некоторой топологии компактно. Топология в пространство M_n вводится следующим образом. Обозначим через $\Omega_n(\lambda)$ (λ — вещественное число) совокупность всех $Z = X + iY \in H_n$, для которых справедливы следующие неравенства:

$|x_{ij}| < \lambda$, $|u_{ij}| < \lambda$, $1 < \lambda d_1$, $d_k < \lambda d_{k+1}$ $(1 < k < n-1)$,

где $X = (x_{ij})$, $Y = W'DW$, W — треугольная матрица, а D — диагональная матрица. Обозначим через $\Omega_n^*(\lambda)$ теоретико-множественное объединение $\Omega_k(u)$ $(0 < k < n)$. В пространство $\Omega_n^*(\lambda)$ вводится следующая топология. Пусть U — открытое множество в $\Omega_r(\lambda)$. Через $V^{(s)}(U, k)$ (k — положительное число) обозначим совокупность $Z \in \Omega_s(\lambda)$, для которых справедливы следующие условия: а) $d_{r+1} > k$, б) $Z_1 \in U$, где Z_1 — квадратная матрица порядка r, стоящая в левом верхнем углу при записи Z в виде

$$\begin{pmatrix} Z_1 & * \\ * & * \end{pmatrix}$$

Пусть $Z_0 \in \Omega_r(\lambda)$. Окрестность $V(U, k)$ определяется как теоретико-множественное объединение $V^{(s)}(U, k)$ $(r < s < n)$, где U — некоторая окрестность точки Z_0 в $\Omega_r(\lambda)$; а k — положительное число. Без труда проверяется, что $\Omega_n^*(\lambda)$ при любом $\lambda > 0$ — компактное хаусдорфово пространство. Показано, что M_n можно вложить в $\Omega_n^*(\lambda)$, при достаточно большом λ, в виде замкнутого множества.

И. И. Пятецкий-Шапиро

6684. О компактификации Сатакэ. Картан (Sur la compactification de Satake. Cartan Henri), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1957—1958, 2. Paris, 1958, 12-14—12-23 (франц.)

Изложена конструкция пространства H_n^*, несколько более естественная, чем предложенная Сатакэ (реф. 6683).

И. И. Пятецкий-Шапиро

6685. Глобальные свойства оператора Ф. Сатакэ (Surjectivité globale de l'opérateur Φ. Satake Ichiro), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1957—1958, 2. Paris, 1958, 16-1—16-17 (франц.)

В предыдущей статье (реф. 6683) использовались локальные свойства оператора Ф. В задаче о погружение в проективное пространство фактор-пространства H_n^*/Γ_n, которой будет посвящена следующая статья, будут использованы глобальные свойства оператора Ф; изучению их посвящена настоящая статья.

Основной результат данной статьи состоит в следующем. Пусть Γ — модулярная группа Зигеля степени n. Обозначим через $A_n(k)$ пространство всех модулярных форм веса k. Если $k > n + r + 1$ и четно, то $\Phi_{(r)}^{(n)} A_n(k) = A_r(k)$, где $\Phi_{(r)}^{(n)}$ — оператор, введенный ранее, который переводит модулярные формы степени n в модулярные формы степени r. Этот результат принадлежит Маасу. Дается также обобщение этого результата на случай произвольной группы Γ, соизмеримой с модулярной группой Зигеля.

И. И. Пятецкий-Шапиро

6686. Погружение в проективное пространство. Картан (Plongements projectifs. Cartan Henri), Sémin. H. Cartan. École norm. supér. 1957—1958, 2. Paris, 1958, 17-1—17-19 (франц.)

Показано, что для всякой группы Γ, соизмеримой с модулярной группой Зигеля, фактор-пространство H_n^*/Γ вкладывается в проективное пространство в виде алгебраического многообразия. Для более точной формулировки результата введем следующие определения. Пусть C — поле комплексных чисел. Алгебра A над C называется градуированной, если $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ и $A_n A_m = A_{n+m}$. Градуированная алгебра без делителей нуля называется проективной алгеброй, если: 1) ее элементы степени нуль суть числа поля C, 2) вся алгебра порождается конечным числом элементов степени 1. Каждой проективной алгебре A соответствует некоторое неприводимое алгебраическое подмногообразие $V(A)$ проективного пространства. Действительно, пусть $x_0, \ldots, x_N$ — базис элементов из A_1. Алгебра A естественным образом идентифицируется с фактор-алгеброй кольца $C[x_0, \ldots, x_N]$ по некоторому однородному идеалу. Множество общих нулей элементов этого идеала естественно рассматривать как алгебраическое подмногообразие N-мерного проективного пространства. Проективная алгебра A называется нормальной, если кольцо A целозамкнуто (в своем поле отношений). Пусть $A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ — градуированная алгебра; положим $A^{(d)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{nd}$. Ясно, что $A^{(d)}$ снова является градуированной алгеброй. Основным результатом статьи является следующая теорема:

Пусть Γ — группа, соизмеримая с модулярной группой Зигеля. Тогда градуированная алгебра $A(\Gamma)$ всех автоморфных форм является алгеброй конечного типа, т. е. порождается конечным числом своих элементов. Кроме того, существует целое положительное число d со следующими свойствами: а) алгебра $A^{(d)}(\Gamma)$ является нормальной проективной алгеброй; б) элементы $A_d(\Gamma)$ (Γ — автоморфные формы веса d) не имеют общих нулей в H_n, отображение H_n в проективное пространство с помощью автоморфных форм веса d индуцирует аналитическое отображение H_n/Γ в алгебраическое многообразие $V(A^{(d)}(\Gamma))$. Это отображение можно продолжить до аналитического изоморфизма между H_n^*/Γ и $V(A^{(d)}(\Gamma))$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

6687. Об интегрируемости по Риману в линейном топологическом пространстве. Чэнь Тянь-цюань, Бэйцзин дасюэ сюэбао. Цзыжань кюсюэ Acta Scient. natur. Univ. pekinensis, 1957, 3, № 3, 321—331 (кит.; рез. англ.)

Пусть E — линейное топологическое пространство, S — всюду плотное подмножество замкнутого единичного интервала $[0, 1]$, $f(x)$ — функция, отображающая S в E, а C — подразделение $[0, 1]$: $C: 0 = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = 1$. Для каждого $\xi_i \in S$ такого, что $a_i \leqslant \xi_i \leqslant a_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ составляем риманову сумму

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(a_{i+1} - a_i).$$

Если (1) образует сетку Коши (при $\max_{0 \leqslant i \leqslant n-1}(a_{i+1} - a_i) \to 0$), то мы назовем $f(x)$ полуинтегрируемой по Риману. Функция $S(x) : [0, 1] \to E$ называется ступенчатой функцией, если существует такое разбиение промежутка $(0, 1) : (0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n]$ $(a_n \leqslant b_n = a_{n+1})$, что $S(x)$ постоянна на каждом $(a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. В работе доказаны следующие две теоремы:

Теорема 1. Если E — линейное топологическое пространство, то необходимое и достаточное условие для того, чтобы E было нормальным, состоит в существовании хотя бы одной окрестности N нуля, для которой всякая ступенчатая функция $S(x) : [0, 1] \to N$ полуинтегрируема по Риману.

Теорема 2. Если E — метризуемое линейное топологическое пространство, то необходимое и достаточное условие для того, чтобы E было локально выпуклым пространством, состоит в том, чтобы всякая равномерно непрерывная функция $f(x)$, отображающая всюду плотное подмножество $S \subseteq [0, 1]$ в E, была полуинтегрируема по Риману.

Из теоремы 2 вытекает:

Пусть E — метризуемое линейное топологическое пространство. Для локальной выпуклости E необходимо и достаточно, чтобы выпуклая оболочка всякого ограниченного множества была ограничена. Это следствие представляется автору более сильным, чем теорема, полученная Ландсбергом (РЖМат, 1957, 6106). В конце работы отмечаются четыре открытых проблемы.

Резюме автора

6688. Признак полноты локально выпуклых пространств. Райков Д. А., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 1, 223—229

Устанавливается следующий признак полноты локально выпуклых пространств. Пусть X — локально выпуклое пространство, содержащее последовательность абсолютно выпуклых множеств (F_n) таких, что: а) $F_n + F_n \subseteq F_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; б) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$; в) всякое абсолютно выпуклое множество $V \subseteq X$, отсекающее на каждом F_n, рассматриваемом как топологическое подпространство в X, окрестность нуля, есть окрестность нуля в X. Если тогда каждая воронка (т. е. база фильтра Коши в X, образованная подмножествами из F_n, сходится в X то X полно. В частности, если все F_n полны, то X полно. С помощью этого признака доказывается полнота индуктивных пределов последовательностей локально выпуклых пространств относительно слабо вполне непрерывных вложений. В работе приводится признак полноты топологических групп, усиливающий соответствующую теорему Виленкина — Граева.

А. С. Дынин

6689. Самосопряженные банаховы пространства. Лейхтвейсс (Selbstadjungierte Banach-Räume. Leichtweiss Kurt), Math. Z., 1959, 71, № 4, 335—360 (нем.)

Работа состоит из пяти параграфов, первый из которых является введением. § 2 посвящен основным определениям. Линейное пространство L над полем вещественных чисел называется косонормированным, если каждому элементу $x \in L$ сопоставлено неотрицательное число $\|x\|$ со следующими свойствами: а) $\|x\| = 0$ только при $x = 0$; б) $\|\alpha x\| = \alpha \|x\|$ при $\alpha \geqslant 0$; в) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Аксиома в) равносильна требованию выпуклости множества элементов $x \in L$, удовлетворяющих условию $\|x\| \leqslant \alpha$. Косонормированное пространство L можно превратить в нормированное пространство, введя норму $|||x||| = \max(\|x\|, \|-x\|)$. L называется полным (или косым банаховым) пространством, если оно полно по отношению к норме $|||x|||$. Конечномерное пространство L (косонормированное) называется пространством Минковского. Вещественный линейный функционал f в косонормированном пространстве называется ограниченным, если существует $\mu > 0$ такое, что $f(x) \leqslant \mu$ для всех $x \in L$ с $\|x\| = 1$. Сопряженное (двойственное к L пространство L^* всех ограниченных линейных функционалов косонормированного пространства L само является косонормированным пространством, если положить $\|f\| = \sup_{\|x\| = 1} f(x)$ (теорема 1). Естественным образом определяются второе сопряженное пространство L^{**}, рефлексивное пространство и вводится понятие изоморфизма косонормированных пространств. Если L рефлексивно, то L и L^{**} изоморфны (следствие из теоремы 3). Если же L и h^* изоморфны и A есть изоморфизм $AL^* = L$, то L называется самосопряженным (с изоморфизмом A). Это определение не совпадает с обычным определением самосопряженности линейных топологических пространств, в частности, как выясняется в § 3, не все пространства Минковского оказываются самосопряженными в смысле этого определения. Самосопряженное косонормированное пространство L называется симметрическим, если существует изоморфизм $AL^* = L$ такой, что $A^{-1}x(y) = A^{-1}y(x)$ для всех $x, y \in L$.

В § 3 изучаются основные свойства самосопряженных косых банаховых пространств произвольной размерности, являющиеся довольно естественными обобщениями ранее известных результатов, например:

Теорема 7. Самосопряженное косонормированное пространство с изоморфизмом A симметрично (по отношению к A) тогда и только тогда, когда оно рефлексивно и $A^* = A$ (A^* — сопряженный с A в обычном смысле оператор).

Наиболее важным результатом § 3 является

Теорема 6. Для любого самосопряженного косонормированного пространства L с изоморфизмом A отображение $C = A(A^*)^{-1}$ представляет собой изоморфизм L^{**} на L. В частности, если L рефлексивно, то C есть автоморфизм L.

Эта теорема является отправным пунктом для получения существенно новых результатов статьи, относящихся к конечномерному случаю, т. е. к самосопряженным пространствам Минковского (§§ 4, 5). В частности, теорема 10 (по существу, основная) устанавливает, что для такого пространства $\mathfrak{M}$ среди всех

изоморфизмов A всегда существует по крайней мере один канонический изоморфизм $A^{(0)}$ с матрицей вида

$$\mathfrak{A}^{(0)} = \mathfrak{T}\,(\underbrace{1 \dotplus \ldots \dotplus 1}_{l} \dotplus \delta_1 \dotplus \ldots \dotplus$$

$$\dotplus \delta_m \dotplus \underbrace{(-1) \dotplus \ldots \dotplus (-1)}_{n-2m-l})\,\mathfrak{T}^*,$$

где $\mathfrak{T}$ — неособенная матрица, а $\delta_j \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & \sin\varphi_j \\ -\sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$, $\varphi_j = l_j/2^{\lambda_j} \cdot \pi$ $(j = 1,2,\ldots,m)$. Здесь $n = \dim \mathfrak{M}$, λ_j — целые, а l_j — целые нечетные числа $(j=1,2\ldots,m)$ такие, что имеют место неравенства $0<\varphi_1<\varphi_2<\ldots<\varphi_m<\pi$. Под прямой суммой $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{A}_2$ матриц $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ здесь, как обычно, понимается клеточная матрица $\left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{A}_1 & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{A}_2 \end{array}\right)$.

В § 5 даются критерии (арифметического и геометрического характера) того, чтобы (косонормированное) самосопряженное пространство Минковского было евклидовым пространством (теоремы 13 и 14). Библ. 15 назв. И. С. Иохвидов

6690. Основы теории обобщенных функций. Феньё (A disztribúció — élmélet alapjai. Fenyő István), Magyar tud. akad. Mat. és fiz. tud. oszt. közl., 1956, 6, № 2, 231—248 (венг.)

Краткое изложение основных идей теории обобщенных функций Л. Шварца с отдельными доказательствами и приложениями. T. Frey

6691. К аксиоматике гильбертова пространства. Видав (Zur Axiomatik des Hilbertschen Raumes. Vidav Ivan), Math. Z., 1959, **71**, № 4, 458—460 (нем.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — произвольное кольцо с единицей 1, а $\mathfrak{H}$ — множество элементов, в котором установлены две операции: I. Внутреннее соотнесение $\mathfrak{H}\times\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$, с помощью которого каждой упорядоченной паре $x, y\in\mathfrak{R}$ однозначно относится элемент $x+y\in\mathfrak{H}$. II. Внешнее соотнесение $\mathfrak{R}\times\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}$, по которому паре α, x $(\alpha\in\mathfrak{R}, x\in\mathfrak{H})$ однозначно отвечает $\alpha x\in\mathfrak{H}$. Линейными формами в $\mathfrak{H}$ называются отображения $x\to f(x)$ множества $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{R}$, удовлетворяющие при любых $\alpha\in\mathfrak{R}$ и $x, y\in\mathfrak{H}$ двум условиям:

$$f(\alpha x+y) = \alpha f(x) + f(y); \qquad (1)$$

$$f(1\cdot x) = f(x). \qquad (2)$$

Элементарными средствами устанавливается следующее простое предложение. Пусть $\mathfrak{H}$ удовлетворяет условиям: а) из $(-1)\cdot x + x = (-1)\cdot x + y$ следует $x = y$ $(x, y\in\mathfrak{H})$; б) для всех $x\in\mathfrak{H}$, за исключением, быть может, единственного элемента $\mathfrak{z}$, существует линейная форма f такая, что $f(x)\neq 0$. Тогда $\mathfrak{H}$ есть $\mathfrak{R}$-модуль, т. е. аддитивная абелева группа с кольцом операторов $\mathfrak{R}$ (Ван-дер-Варден, Современная алгебра, Ч. 1, М. — Л., 1934, стр. 134). В частности, пусть $\mathfrak{R}$ — поле комплексных чисел, а в качестве линейных форм в $\mathfrak{H}$ взяты $f_y(x) = (x, y)$ $(x, y\in\mathfrak{H})$, где (x, y) удовлетворяет условиям $(x, y, z\in\mathfrak{H}; \alpha, 1\in\mathfrak{R})$: 1) $(\alpha x+y, z) = \alpha(x, z) + (y, z)$; 2) $(1\cdot x, y) = (x, y)$; 3) $(y, x) = \overline{(x, y)}$; 4) существует не более одного элемента $\mathfrak{z}\in\mathfrak{H}$, для которого $(\mathfrak{z}, \mathfrak{z}) = 0$. Тогда $\mathfrak{H}$ — линейное векторное пространство. И. С. Иохвидов

6692. Сингулярные интегралы двух измерений. Макки Киббен (Singular integrals in two dimensions. McKibben John J.), Amer. J. Math., 1959, 81, № 1, 23—36 (англ.)

Бесконечно дифференцируемая функция u двух вещественных переменных (x, y) называется быстро убывающей, если для произвольного многочлена $P(x, y)$ и произвольной частной производной Du функции u функция $P(x, y)\,Du$ ограничена; пусть (ζ) — множество быстро убывающих функций, топологизированное по Шварцу. Умеренным (tempered) распределением называется линейное непрерывное отображение (ζ) в множество вещественных чисел. Пусть $g(\varepsilon)$ — комплексная функция $(0<\varepsilon<\tau)$. Если она представима в виде $g(\varepsilon) = \sum_{l=1}^{N} a_l \varepsilon^{\mu_l} + a\log\varepsilon + f(\varepsilon)$, где $\mu_l<0$, $\lim_{\varepsilon\to 0+} f(\varepsilon)$ существует и конечен, то пишут $g(\varepsilon) = \infty(\varepsilon)$, а предел $\lim_{\varepsilon\to 0+} f(\varepsilon)$ обозначают Pf. $g(0)$ (конечная часть в смысле Адамара). Пусть $q(x, y)$ — многочлен, $g(0, 0)\neq 0$, $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — конечное множество полярных углов, определяемых по многочлену q и являющихся для него исключительными, δ и ε — положительные числа, $G(\delta)$ — область, определяемая условиями $|\theta-\theta_l|>\delta$ $(l=1, 2,\ldots n)$, $G(\delta, \varepsilon)$ — множество точек $\in G(\delta)$, в которых выполняется условие $|q|>\varepsilon$.

Основной результат: Пусть $u\in(\zeta)$,

$$g_\delta(u, \varepsilon) = \int_{G(\delta,\varepsilon)} u(x, y)\,[q(x, y)]^{-1}\,dxdy.$$

Тогда: а) $g_\delta(u; \varepsilon) = \infty(\varepsilon)$; б) Pf. $g_\delta(u; 0) \equiv E(u; \delta) = \infty(\delta)$; в) $E(u) \equiv$ Pf. $E(u, 0)$ есть умеренное распределение в (ζ).

Следствие. Для каждого многочлена q существует умеренное распределение E такое, что $Eq = 1$. Ю. Л. Шмульян

6693. Уравнения в средних значениях с почти периодическим ядром. Нейдинг Н. М., Укр. матем., ж., 1959, **11**, № 2, 163—174 (рез. англ.)

Изучаются уравнения вида

$$\varphi(x) - \lambda \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x), \qquad (1)$$

в котором $K(x, s)$ B^2-почти периодическая функция от двух переменных, $f(x)$ — равномерная или N-почти периодическая функция. Доказывается, что для уравнения (1) справедливы теоремы Фредгольма, и указываются достаточные условия для того, чтобы решение этого уравнения было равномерной или N-почти периодической функцией. Основная часть работы посвящена изучению условий существования собственных значений ядра $K(x, s)$.

Пусть

$$K(x, s) = \sum\nolimits_{m,n} a_{m,n}\, e^{i(\lambda_n x - \mu_m s)}$$

Числа μ_m, λ_n автор называет правыми и левыми показателями. Последовательность членов $a_1 e^{i(\lambda_1 x-\mu_1 s)}$, $a_2 e^{i(\lambda_2 x-\mu_2 s)}, \ldots, a_m e^{i(\lambda_m x-\mu_m s)}$ автор называет цепочкой, если $\mu_1=\lambda_2$, $\mu_2=\lambda_3, \ldots, \mu_{m-1}=\lambda_m$. Цепочка называется замкнутой, если $\mu_m=\lambda_1$. Для того чтобы существовало собственное значение, необходимо, чтобы разложение ядра содержало замкнутую цепочку. Б. М. Левитан

6694. К вопросу существования и единственности решений одного класса линейных операторных уравнений. Сарымсаков Т. А., УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер.; Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1959, № 1, 69—74 (рез. узб.)

Пусть линейный непрерывный оператор A, действующий в линейном топологическом пространстве E, обладает следующими свойствами: 1) существует ограниченное, замкнутое, частично упорядоченное множество Q такое, что $AQ\subseteq Q$; 2) для любых $x, y\in Q$ существуют натуральное m, число λ $(0<\lambda<1)$ и элементы $z, u, v\in Q$ такие, что $z\leqslant A^m x$, $z\leqslant A^m y$, $A^m x - z = (1-\lambda)\,u$, $A^m y - z = (1-\lambda)\,r$; 3) существует множество $Q_0\subset Q$ такое, что $\theta\in Q_0$, $AQ_0\subseteq Q_0$, $f(x) = 1(\neq 1)$

для $x \in Q_0$ ($x \overline{\in} Q_0$), где f — непрерывный функционал. Доказывается, что при этих условиях в Q_0 существует, и притом единственное, решение уравнения $Ax = x$.

Специализируя условия, автор формулирует еще одну теорему, в которой, как указывается, содержатся все ранее полученные результаты, относящиеся к вопросу регулярности однородных процессов Маркова, т. е. к вопросу существования финального распределения вероятностей. С. Н. Крачковский

6695. Построение пространств L^p посредством пополнения. Заманский (Construction des espaces L^p par complétion. Zamansky Marc), J. math. pures et appl., 1959, 38, № 2, 97—116 (франц.)

Дан очерк абстрактной теории функциональных пространств L^p ($p \geqslant 1$), определяемых посредством пополнения с помощью надлежащим образом введенного понятия интеграла. Пусть E — топологическое пространство, B — семейство открытых множеств в E такое, что: 1) если $O, O' \in B$, то $O \cup O'$, $O \cap O'$ и $O \setminus \overline{CO'} \in B$; 2) каждое $O \in B$ содержится в некотором компакте; предполагается, что для множеств из B определена мера μ и что граница каждого $O \in B$ есть множество нулевой меры ($M \in E$ есть множество нулевой меры, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное или счетное покрытие (O_i) этого множества такое, что $\sum_i \mu(O_i) < \varepsilon$). Рассматривается множество характеристических функций χ_O для всевозможных O из B; оно порождает векторное пространство S ступенчатых функций, каждая из которых почти везде равна некоторой функции вида $\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{O_i}$, где a_i попарно различны, а O_i попарно не пересекаются; для функций φ из S вводится интеграл $\int_E \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(O_i)$. Пусть R — отношение эквивалентности „$f(x) = g(x)$ почти везде“ и $\Phi = S/R$. Векторное пространство Φ, наделенное нормой $\| \widetilde{\varphi} \| = \left(\int_E |\varphi|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \mu(O_i) \right)^{\frac{1}{p}}$ ($p \geqslant 1$, $\widetilde{\varphi} \in \Phi$) обозначается через Φ^p. Пусть Γ^p — множество последовательностей Коши из Φ^p, а ρ — отношение эквивалентности между ними ($(\varphi_n) \in \Gamma^p$ и $(\gamma_n) \in \Gamma^p$ связаны отношением ρ, если $\lim_{n \to \infty} \| \varphi_n - \gamma_n \| = 0$); тогда Γ^p / ρ является пополнением $\hat{\Phi}^p$ пространства Φ^p. Пусть, далее, L^p — множество тех числовых функций на E, которые являются почти везде пределами (в обычном смысле) последовательностей $(\varphi_n) \in \Gamma^p$ таких, что $(|\varphi_n|) \in \Gamma^p$ (последнее при $p = 1$ выполняется само собой, а при $p > 1$ означает дополнительное предположение); тогда L^p — векторное пространство. Доказывается, что если $(\varphi_n) \in \Gamma^p$, то существует последовательность (φ_{n_k}), сходящаяся почти везде; для различных таких последовательностей пределы эквивалентны по R. Это позволяет сопоставить элементу пространства $\hat{\Phi}^p$, порожденному последовательностью $(\varphi_n) \in \Gamma^p$, ($(|\varphi_n|) \in \Gamma^p$), элемент $\hat{f} \in L^p$, порожденный функцией $f(x) = \lim \varphi_{n_k}(x)$ (почти везде). Доказывается, что при $p = 1$ это соответствие есть изоморфизм векторных пространств $\hat{\Phi}^1$ и L^1, а при $p > 1$ — изоморфизм L^p на некоторое подпространство пространства $\hat{\Phi}^p$. С. Н. Крачковский

6696. Дополнение: функциональные пространства с трансляциями. Шеффер (Addendum: function spaces with translations. Schäffer Juan Jorge), Math. Ann., 1959, 138, № 2, 141—144 (англ.)

Рассматриваются дополнительные к предыдущей работе автора (РЖМат, 1960, 574) соотношения между нормой $|\varphi|_F$ произвольной функции $\varphi \in F$ и значениями $\int_{J'} |\varphi(t)| dt$, где $J' \subset J = [0, \infty)$ — любой интервал заданной меры $\mu(J') = l$. С. Н. Крачковский

6697. Итерации операторов, отображающих положительный конус в себя. Бонсалл (The iteration of operators mapping a positive cone into itself. Bonsall F. F.), J. London Math. Soc., 1959, 34, № 3, 364—366 (англ.)

Пусть X — полуупорядоченное банахово пространство с конусом X^+ положительных элементов. Предполагается, что замкнутая линейная оболочка X^+ есть все пространство X. Пусть T — вполне непрерывный линейный оператор, определенный на X, преобразующий X^+ в себя и обладающий ненулевым спектральным радиусом $\rho = \lim_{n \to \infty} \| T^n \|^{1/n}$. Пусть P — оператор проектирования на нуль-пространство оператора A^ν, где $A = T - \rho I$, ν — ранг ρ.

Теорема. Имеет место формула

$$\lim_{n \to \infty} \| (I+T)^n \|^{-1} (I+T)^n = \| A^{\nu-1} P \|^{-1} A^{\nu-1} P,$$

в которой предел берется по норме операторов.

Я. Б. Рутицкий

6698. Интерполяция банаховых пространств и соответствующие приложения. II. Гальярдо (Interpolation d'espaces de Banach et applications (II). Gagliardo Emilio), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 24, 3388—3390 (франц.)

Настоящая статья является продолжением статьи того же наименования (РЖМат, 1960, 575) и содержит дальнейшее развитие проблемы построения для каждой пары банаховых пространств „промежуточных“ банаховых пространств, связанных только со структурой заданных пространств и инвариантных относительно „квазилинейных“ преобразований.

Если A и B — банаховы пространства, то $A \cap B$, по определению, есть линейное подмножество из A, отождествленное с линейным подмножеством из B, причем закон отождествления линеен и таков, что множество Z пар $(u, -u)$, $u \in A \cap B$, замкнуто в $A \times B$. При этом пространство $E = A \times B / Z$, снабженное нормой $\| u \|_E = \inf (\| v \|_A + \| w \|_B)$ ($v + w = u$), есть наименьшее банахово пространство, содержащее A и B и индуцирующее в них то отождествление элементов, которое порождается подмножеством $A \cap B$. Теперь можно определить „промежуточное“ пространство для заданных A и B как всякое банахово пространство C, $C \subseteq E$ (алгебраически и топологически), и связанное только со структурой пространств A и B и с законом отождествления, порождаемым $A \cap B$. Оказывается, „промежуточное“ пространство C можно определить в силу его инвариантности относительно линейных преобразований посредством некоторого функционала от области $F(M)$, где $M \equiv M(u)$ есть множество точек (x, y) таких, что $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, и существуют $v \in A$, $w \in B$, $u = v + w$, $\| v \|_A < x$, $\| w \|_B < y$. Например, если $F(M) = \inf (x + y)$, $(x, y) \in M$, то $C = E$; если $F(M) = \inf x$, $(x, 0) \in M$, то $C = A$; если $F(M) = \inf y$, $(0, y) \in M$, то $C = B$. Если, согласно введенным понятиям, $F(M)$ „квазилинеен“, „положительного типа“ и „квазинепрерывен“, то (теорема 2. VI) множество C точек $u \in E$ таких, что $F(M) < +\infty$ является „промежуточным“ пространством с нормой $\| u \|_C = \inf \sum_i F[M(u_i)]$, $\sum u_i = u$, причем существуют положительные константы c_1 и c_2 такие, что $c_1 \| u \|_C < F[M(u)] < c_2 \| u \|_C$.

Л. А. Ходакова

6699. О производной нормы в пространстве Банаха. Персидский К. П., КазССР Ғылым Акад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1959, № 4, 85—89 (рез. каз.)

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана функция $x = x(t)$, множество значений которой принадлежит банахову пространству. Вводятся обозначения:

$$v = \| x(t) \|, \quad v'_+ = \lim \frac{\| x(t+\Delta t) \| - \| x(t) \|}{\Delta t},$$

$$v'_- = \lim_{\Delta t \to -0} \frac{\| x(t+\Delta t) \| - \| x(t) \|}{\Delta t}$$

и доказывается теорема.

Если всюду в $[a, b]$ существует производная $x'(t)$, то функции v'_+ и v'_- существуют во всех точках сегмента $[a, b]$ и удовлетворяют неравенству $v'_+ \geqslant v'_-$.

И. С. Иохвидов

6700. О спектре вольтеррова оператора в некоторых банаховых пространствах. Гольденгершель Э. М., Докл. АН СССР, 1959, **124**, № 6, 1195—1198

В пространстве $C_\alpha^{(n)}(\Theta, \infty)$ вектор-функций $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$, непрерывных на $[\Theta, \infty]$ $\Theta \geqslant 0$, с нормой

$$\| f \|_\alpha = \sup_{\Theta < x < \infty} \| f(x) \| e^{-\alpha x} \left(\| f(x) \| = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \right)^{1/2} \right)$$

рассматривается оператор

$$V_\Theta f = \int_\Theta^x K(x, y) f(y)\, dy,$$

ядро которого $K(x, y)$ является непрерывной в области $\Theta < y < x < \infty$ матрицей-функцией, и изучается его спектр. Полученные результаты применяются для доказательства ограниченности решений некоторых краевых задач.

М. С. Бродский

6701. Линейные операторы и их сопряженные. Голдберг (Linear operators and their conjugates. Goldberg Seymour), Pacif. J. Math., 1959, **9**, № 1, 69—79 (англ.)

Классификация линейных ограниченных операторов, действующих из одного нормированного (вообще говоря, неполного) пространства в другое, данное А. Тейлором и С. Халбергом (РЖМат, 1959, 574), обобщается на неограниченные операторы.

И. Ц. Гохберг

6702. О некоторых свойствах линейных операторов, связанных с понятием раствора. Маркус А. С., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1959, **39**, 265—272

Рассматриваются линейные ограниченные операторы A, действующие из одного банахова пространства E_1 в другое E_2. Пусть A — такой оператор, $L(A)$ — по пространство его нулей, $\alpha(A) = \dim L(A)$, $\beta(A) = \dim E_2 / \overline{A E_1}$, $k(A) = \sup_y \inf_x \| x \|$, где inf берется по всем решениям уравнения $Ax = y$, а sup — по всем $y \in A(E_1)$, $\| y \| = 1$. Если A нормально разрешим и $\alpha(A) < \infty$, $\beta(A) < \infty$ (соответственно $\beta(A) = \infty$), то говорят, что A есть Ф (соответственно Φ_+)-оператор (РЖМат, 1959, 4885).

Доказываются следующие теоремы:

1) Если A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно к Ф (или Φ_+)-оператору A и $\alpha(A_n) = \alpha(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $\lim_{n \to \infty} \Theta(L(A_n), L(A)) = 0$, $(\Theta(N_1, N_2)$ — раствор подпространств N_1, N_2, (см. РЖМат, 1959, 4885).

2) Если A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно к Ф (или Φ_+)-оператору A, то следующие утверждения эквиваленты: а) $\alpha(A_n) = \alpha(A)$ для достаточно больших n; б) последовательность $k(A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ограничена; в) последовательность $k(A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится к числу $k(A)$; г) $\lim \Theta(L(A_n), L(A)) = 0$; д) $\lim \Theta(A_n(E_1), A(E_1)) = 0$.

3) Если A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно к Ф-оператору A и $\alpha(A_n) = \alpha(A)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то M_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится равномерно к M.

Отмечается, что утверждения б), в), г), д) второй теоремы эквивалентны для любого нормально разрешимого оператора A и что при надлежащих условиях эта теорема остается в силе для замкнутых линейных операторов.

С. Н. Крачковский

6703. Квазинормальные операторы в банаховом пространстве. Краббе (Vaguely normal operators on a Banach space. Krabbe G. L.), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, **3**, № 1, 51—59 (англ.)

Рассматривается пространство $L^p(G)$ функций, определенных на локально компактной абелевой группе G и суммируемых с p-й степенью по некоторой мере Хара. Если T_i $(i = 1, 2)$ — операторы, определенные в $L^p(G) \cup L^{p'}(G)$ $(p^{-1} + p'^{-1} = 1)$, причем

$$(T_i x, y) = (x, T_i y) \quad (x \in L^p(G), y \in L^{p'}(G)),$$

то оператор $T_1 + iT_2$ называется квазинормальным (vaguely normal). Автор ограничивается случаем $G = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ и в пространстве $L^2(G) = l_2$ определяет оператор $\varphi_\otimes$ (оператор Лорана) следующим образом: если $\varphi(\theta) \in L_\mu^\infty[0, 1]$, $\{x_\nu\} \in l_2$, то $\varphi_\otimes \{x_\nu\} = \sum_\nu x_\nu [Y_\varphi]_{n-\nu}$, где $[Y_\varphi]_n = \int_0^1 e^{-2\pi i n \theta} \varphi(\theta)\, \mu(d\theta)$.

Дается интегральное представление билинейной формы этого оператора. Обобщая оператор Лорана тривиальным образом на пространства l_p $(p \neq 2)$, автор показывает, что $\varphi_\otimes$, определенный на $l_p \| l_{p'}$, квазинормален.

Особо изучается семейство $\mathfrak{A}_{\otimes p}$ операторов $A_\otimes$ на l_p, порожденных функциями $A(\Theta)$, совпадающими почти всюду (по мере μ) с функциями ограниченного изменения на $[0, 1]$. Показано, что оператор $A_\otimes$, рассматриваемый на $l_p \| l_{p'}$, квазинормален; его билинейная форма допускает интегральное представление, при $p \geqslant 2$ его резольвентное множество пусто; семейство $\mathfrak{A}_{\otimes p}$ содержится в слабом замыкании алгебры, порожденной оператором $I_{\otimes p}$, где $I(\Theta) = \Theta$.

Ю. Н. Валицкий

6704. Гомоморфизмы и идемпотенты в групповых кольцах. Коэн (Homomorphisms and idempotents of group algebras. Cohen Paul J.), Bull. Amer. Math. Soc., 1959, **65**, № 3, 120—122 (англ.)

Пусть G, H — локально компактные абелевы группы, $M(G)$ — алгебра всех конечных борелевских мер на G, $L(G)$ — подалгебра $M(G)$, состоящая из мер, абсолютно непрерывных относительно меры Хара. Известно, что каждый ненулевой гомоморфизм $L(G)$ в поле комплексных чисел имеет вид: $\mu \to \int_G (\chi, g)\, d\mu(g)$, где $\chi \in \hat{G}$ ($\hat{G}$ — группа характеров G). Поэтому, если задан произвольный гомоморфизм $\Phi: L(G) \to M(H)$, то он порождает отображение $\Phi_*: \hat{H} \to \{\hat{G}, 0\}$. Автор доказывает, что отображение Φ_* устроено следующим образом. Существует конечное число множеств $K_i \subset \hat{H}$, являющихся смежными классами по некоторым открытым подгруппам в $\hat{H}$, и отображений $\psi_i: K_i \to \hat{G}$ таких, что $\psi_i(x+y-z) = \psi_i(x) + \psi_i(y) - \psi_i(z)$. Пространство $\hat{H}$ разлагается

на непересекающиеся подмножества S_j, принадлежащие булевой алгебре, порожденной всеми K_i. На каждом S_j отображение Φ_* либо нулевое, либо совпадает с ψ_i, если $S_j \in K_i$. Обратно, всякое отображение $\Phi_*: \hat{H} \to \{\hat{G}, 0\}$ такого вида индуцировано некоторым гомоморфизмом $\Phi: L(G) \to M(H)$. Отображение Φ переводит $L(G)$ в $L(H)$ тогда и только тогда, когда прообраз каждого компактного множества в $\hat{G}$ при отображении Φ_* есть компакт. Доказательство основано на следующей теореме. Если μ — идемпотентная мера (т. е. $\mu * \mu = \mu$), то $\hat{\mu}$—характеристическая функция множества E, принадлежащая булевой алгебре, порожденной смежными классами по открытым подгруппам $\hat{G}$. Автор особо выделяет предложение о тригонометрических полиномах, полученное им в процессе доказательства теоремы о идемпотентных мерах: если $|c_j| \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, N$; $n_1, \ldots, n_N$ — произвольные целые числа, то $\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{in_j x} \right| dx > \left(\frac{\ln N}{\ln \ln N} \right)^{1/8}$ (K — не зависит от c_j, n_j, N). А. А. Кириллов

6705. Обобщение теоремы Стоуна—Вейерштрасса. Хаусснер (A generalized Stone—Weierstrass theorem. Hausner Alvin), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 85—87 (англ.)

Пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная или неассоциативная алгебра с базисом $e_1, e_2, \ldots, e_n$ над полем действительных чисел; $C(\Omega, \mathfrak{A})$ — множество всех непрерывных $\mathfrak{A}$-значных функций на компактном (бикомпактном) хаусдорфовом пространстве Ω, т. е. функций вида $F = \sum_{i=1}^{\tau} f_i e_i$, где f_i — непрерывные действительные функции на Ω. Естественным образом $C(\Omega, \mathfrak{A})$ превращается в банахову алгебру, если для $F \in C(\Omega, \mathfrak{A})$ ввести норму по формуле

$$\| F \| = \sum_{i=1}^{n} \sup_{\omega \in \Omega} | f_i(\omega) | ,$$

так что можно говорить о замкнутых подалгебрах алгебры $C(\Omega, \mathfrak{A})$. Классическая теорема Стоуна—Вейерштрасса утверждает, что любая замкнутая подалгебра алгебры $C(\Omega, \mathfrak{A})$, где $\mathfrak{A}$ — алгебра действительных чисел, разделяющая точки Ω, на самом деле совпадает с $C(\Omega, \mathfrak{A})$. В случае, если $\mathfrak{A}$ — алгебра комплексных чисел, аналогичная теорема не верна.

Сравнительно недавно было доказано, что теорема Стоуна—Вейерштрасса выполняется, если $\mathfrak{A}$ — алгебра кватернионов (конечно, везде здесь речь идет о подалгебрах, содержащих константы). В реферируемой работе доказано, что теорема Стоуна—Вейерштрасса имеет место, если $\mathfrak{A}$ — алгебра Кэли—Диксона размерности 2^n ($n > 1$) или клиффордова алгебра размерности 2^n ($n > 1$). Доказательства носят чисто алгебраический характер. Е. А. Горин

6706. Тензорные произведения банаховых алгебр. Гелбаум (Tensor products of Banach Algebras. Gelbaum Bernard R.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 2, 297—310 (англ.)

Сравнительно недавно различными авторами было доказано несколько похожих по форме теорем, типичным примером которых является следующая: Пусть X — компактное (бикомпактное) пространство, A — коммутативная банахова алгебра (нормированное кольцо), $D = C(X, A)$ — алгебра A-значных функций, непрерывных на X, $\mathfrak{M}_1$ — пространство максимальных идеалов A, $\mathfrak{M}_2$ — пространство максимальных идеалов $C(X)$, $\mathfrak{M}_3$— пространство максимальных идеалов D. Тогда $\mathfrak{M}_3$ гомеоморфно $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ ($\mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2, 3$) рассматриваются в слабой топологии). Центральным пунктом при доказательстве подобного рода утверждений является установление того факта, что (в данном случае) D „порождается“ сравнительно простыми функциями.

В реферируемой работе такая ситуация исследуется в чистом виде. Основные результаты таковы. Пусть A_1 и A_2 — банаховы алгебры и $A_3' = A_1 \otimes A_2$ — их алгебраическое тензорное произведение, $\| \ldots \|_i$ — норма в A_i ($i = 1, 2$).

Введем норму в A_3' по формуле

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)} \otimes a_2^{(i)} \right\| = \inf \sum_{i=1}^{n} \left\| a_1^{(i)} \right\|_1 \left\| a_2^{(i)} \right\|_2 ,$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям $\sum_{i=1}^{n} a_1^{(i)} \otimes a_2^{(i)}$ (такая норма обычно называется ядерной). Пополняя A_3' по этой норме, мы получим полную нормированную алгебру, причем $\| a_1 \otimes a_2 \| = \| a_1 \|_1 \| a_2 \|_2$. Предположим, что A_1 и A_2 — коммутативные банаховы алгебры и $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ — множества их максимальных идеалов. Тогда и пополнение A_3' будет коммутативной банаховой алгеброй, и если через $\mathfrak{M}_3$ обозначить его множество максимальных идеалов, то $\mathfrak{M}_3$, как доказано в работе, оказывается гомеоморфным $\mathfrak{M}_1 \times \mathfrak{M}_2$ ($\mathfrak{M}_i$ ($i = 1, 2, 3$) рассматриваются в слабой топологии). Полученные результаты применяются к теории представлений локально бикомпактных абелевых групп. Е. А. Горин

6707. О стоуновских пространствах. Исивата (On Stonian spaces. Isiwata Takesi), Sci. Repts Tokyo Kyoiku Daigaku, 1958, **A6**, 15 Dec., 147—176 (англ.)

Стоуновским пространством в реферируемой статье называется вполне регулярное T_1-пространство X, обладающее тем свойством, что всякая ограниченная вещественная непрерывная функция, заданная на произвольном открытом множестве $U \subset X$, допускает непрерывное продолжение на X. Это определение шире обычного, ибо не предполагает компактности X. В дальнейшем, если не оговорено иное, X будет обозначать стоуновское пространство, а $C(X)$ (соответственно $B(X)$) — частично упорядоченную систему всех непрерывных (соответственно непрерывных ограниченных) вещественных функций на X.

В § 1 рассматриваются различные эквивалентные между собой определения стоуновского пространства (в частности, показано, что если $X \subseteq Y$, где Y — какое-либо подпространство чеховской компактификации βX пространства X, то Y — стоуновское пространство), и доказывается, что если X содержит бесконечное компактное подмножество, то существует компактное подпространство пространства X, не являющееся стоуновским; кроме того, доказывается, что в X имеются счетные некомпактные подмножества.

В § 2 изучается так называемое вполне стоуновское пространство, т. е. стоуновское пространство, в котором всякое замкнутое подпространство является стоуновским. Доказывается, что если вполне стоуновское пространство X нормально, то чеховская компактификация любого его подпространства гомеоморфна замыканию этого подпространства в βX. В § 3 показано, что всякое плотное компактное подпространство пространства X, являющееся стоуновским пространством, гомеоморфно βX. В § 4 устанавливается существование стоуновского пространства X, обладающего сопряженным пространством X^* в том смысле, что если $X^* = \beta X - X$, то $\beta X^* = \beta X$, так что X^{**} гомеоморфно X. Даны необходимые и достаточные условия для того, чтобы X обладало сопряженным. Показано, что если X — вполне

регулярное T_1-пространство, обладающее сопряженным, то для любой компактификации Z этого пространства $\beta(Z-X)=Z$, т. е. $(Z-X)^*=X$.

В §§ 5—8 изучаются положительные линейные функционалы на пространстве $C(X)$ (или $B(X)$), где X — произвольное вполне регулярное T_1-пространство (в частности, стоуновское); изучение проводится в тесной связи с понятием бэровой меры, ассоциированной с рассматриваемым функционалом; устанавливаются условия, при которых эта мера обладает ядром. Дано необходимое и достаточное условие для того, чтобы всякий положительный линейный функционал на $B(X)$ мог быть распространен на $C(X)$. В § 9 рассматривается множество всех ограниченных линейных функционалов на $C(X)$ и изучаются его свойства для различных топологий в $C(X)$. С. Н. Крачковский

6708. О некоторых расширениях функциональных колец. Банашевский (On certain extensions of function rings. Banaschewski Bernhard), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 1., 87—96 (англ.)

Изучаются некоторые вопросы теории Галуа для нормированных колец всех непрерывных ограниченных действительных функций на топологических пространствах. Кольцо E называется нормальным расширением кольца C, если E прямо неразложимо и обладает такой группой автоморфизмов G, что подкольцо C совпадает со множеством всех элементов кольца E, выдерживающих все автоморфизмы из группы G. В этом случае G называется группой автоморфизмов кольца E над кольцом C. Нормальное расширение E кольца C с группой автоморфизмов G называется расширением Галуа, если группа G определяется единственным образом, т. е. если G содержит любой автоморфизм кольца E, оставляющий на месте все элементы подкольца C. Доказывается, что для наперед заданных прямо неразложимого функционального кольца C и группы G существует нормальное расширение $E \supseteq C$, группа автоморфизмов которого над подкольцом C изоморфна группе G. Приведены также необходимые и достаточные условия для того, чтобы расширение Галуа E над C одновременно удовлетворяло следующим условиям: 1) G — конечная группа, 2) для каждого максимального идеала подкольца C существует точка $(G:1)$ максимальных идеалов кольца E, содержащих этот идеал (условие 2) заимствовано из алгебраической теории числовых полей). С. Д. Берман

6709. Пространства, инвариантные относительно сдвига. Лакс (Translation invariant spaces. Lax Peter D.), Acta math., 1959, **101**, № 3-4, 163—178 (англ.)

Пространство интегрируемых с квадратом комплекснозначных функций $u(x)$ вещественного переменного x, обращающихся в 0 для $x<0$, обозначается через h; пространство преобразований Фурье функций из h — через H. Пусть r — подпространство h, инвариантное относительно правого сдвига (если $g(x)\in h$, то и $g(x-s)\in r$ для любого положительного s), R — пространство преобразований Фурье функций из r.

Доказывается следующая теорема представления: Каждое непустое замкнутое R-пространство представимо в виде FH, где $F(z)$ регулярна в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и удовлетворяет там неравенству $|F(z)|\leqslant 1$, а на вещественной оси $|F(x)|=1$. С точностью до постоянного множителя, равного по модулю 1, $F(z)$ однозначно определяется пространством R. Эта теорема обобщает результаты Бьюрлинга и Кархунена (Beurling A., Acta math., 1948, **81**, 239—255; Karhunen K., Arkiv mat., 1950, **1**, 141—160). Основной целью работы является доказательство более общей векторной теоремы представления. Пусть H_S — пространство преобразований Фурье векторных функций, значения которых принадлежат конечномерному гильбертову пространству S над полем комплексных чисел, и R — подпространство H_S, инвариантное относительно правого сдвига. В этом случае теорема представления имеет вид:

Каждое замкнутое R-пространство представимо в виде FH_T, где $F(z)$ — операторнозначная функция от z, отображающая гильбертово пространство T (размерность которого может быть ниже размерности S) в S. $F(z)$ регулярна в верхней полуплоскости и удовлетворяет там неравенству $\|F(z)\|\leqslant 1$, а для вещественных z $F(z)$ является изометрией. С точностью до умножения на постоянную унитарную матрицу справа $F(z)$ однозначно определяется пространством R.

На основе теорем представления далее изучается деление в полугруппе функций $F(z)$ и в кольце всех ограниченных аналитических функций. При обычном определении делимости доказывается, что F_1 делится на F_2 тогда и только тогда, когда F_1H содержится в F_2H, и что имеют место известные теоремы о НОК и НОД двух функций. Известная теорема Титчмарша о свертках доказывается путем сведения к теореме о разложении на множители в кольце ограниченных аналитических функций функции e^{idz}. Результаты переносятся также на векторные пространства. В. И. Левин

6710. Равностепенная непрерывность и почти периодические функции. Эллис (Equicontinuity and almost periodic functions. Ellis Robert), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 4, 637—643 (англ.)

Пусть X — отделимое однородное пространство, $C(X, X)$ — множество непрерывных отображений X в X и $C(X)$ — множество действительных непрерывных функций на X с топологией, порожденной равномерной сходимостью. Пусть $f\in C(X)$, $a\in C(X, X)$. По определению $(fa)x=f(xa)$. Функция $f(x)$ называется почти периодической относительно множества $A\subseteq C(X, X)$, если $fA=[fa/a\in A]$ — относительно компактное подмножество множества $C(X)$.

Изучаются свойства множества A при помощи соответствующих почти периодических функций. В частности доказывается, что если последних достаточно много, то A равностепенно непрерывно. Б. М. Левитан

6711. О размерности класса функций $L^2(G)$ на топологической группе G. Ким Кё Сек, Сухак ка мулли. Математика и физика, 1957, **1**, № 2, 21—25 (кор., рез. русск.)

Получена следующая теорема: Размерность класса функций $L^2(G)$, определенных на компактной топологической группе G, равна весу группы G. Резюме автора

6712. Об одной характеристике эллиптических дифференциальных операторов. Ньето (Über eine Charakterisierung der elliptischen Differentialoperatoren. Nieto José), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 123—125 (нем.)

Дифференциальный оператор $D=\sum_{\|h\|<m}a(x)D^h$ называется квазиэллиптическим, если из того, что правая часть уравнения $D\varphi=f$ дифференцируема p раз, следует, что φ дифференцируема $p+m$ раз. Устанавливается, что всякий квазиэллиптический оператор является эллиптическим. Тот факт, что всякий эллиптический оператор является квазиэллиптическим, был доказан Л. Шварцем (РЖМат, 1957, 6506 К). Автор указывает, что подробные доказательства будут приведены в другой заметке. Ф. С. Алиев

6713. Об использовании свойств минимакса в теории возмущений. Князев П. Н., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 2, 94—100

Пусть самосопряженный оператор A имеет чисто непрерывный спектр на отрезках $[a_k, b_k]$ $(0\leqslant a_k<b_k<a_{k+1}$, $k=1, 2, \ldots)$, тогда спектр оператора $A+B$, где B — неотрицательный вполне непрерывный оператор,

кроме отрезков $[a_k, b_k]$, содержит на интервалах (b_k, a_{k+1}) не более счетного множества собственных значений конечной кратности, причем их предельными точками могут быть лишь точки b_k. Доказательству этого результата предшествует ряд теорем, посвященных исследованию возмущения спектра самосопряженных операторов различных классов одномерным самосопряженным оператором. Теоремы эти получены путем различных предельных переходов от класса вполне непрерывных операторов, возмущение которого исследовано с помощью минимаксимальных свойств собственных значений. Л. Д. Фаддеев

6714. Об абсолютной эквивалентности проекторов. Браун (On the absolute equivalence of projections. Brown Arlen), Bul. Inst. politechn. Iaşi, 1958, 4, № 3-4, 5-6 (англ.; рез. русск., рум.)

Два ортогональных проектора E и F в гильбертовом пространстве H называются абсолютно эквивалентными, если в минимальном кольце операторов, содержащем E и F, найдется такой частично изометричный оператор V, что $V^*V = E$, $VV^* = F$. Надь (РЖМат, 1955, 5144, стр. 291 оригинала) показал, что если $\|E - F\| < 1$, то E и F абсолютно эквивалентны, причем

$$V = F(I + E(F - E)E)^{-1/2}E. \qquad (1)$$

Автор устанавливает, что в общем случае абсолютно эквивалентных ортогональных проекторов E и F формула (1) дает ограниченный оператор с плотной областью определения, причем расширение $\overline{V}$ этого оператора на все пространство H есть частично изометричный оператор и $\overline{V}^*\overline{V} = E$, $\overline{V}\overline{V}^* = F$. Оператор V, задаваемый формулой (1), будет определен всюду тогда и только тогда, когда выполнено дополнительное условие $\|E - F\| < 1$. А. С. Маркус

6715. О спектральной теории Хилла и операторном исчислении для полугрупп операторов в гильбертовом пространстве. Фойаш (On Hille's spectral theory and operational calculus for semi-groups of operators in hilbert space. Foiaş Ciprian), Compositio math., 1959, 14, № 1, 71—73 (англ.)

В гильбертовом пространстве рассматривается линейный (неограниченный) оператор A, удовлетворяющий требованию: существует действительное число r такое, что $\|(A - \xi I)^{-1}\| < (\xi - r)^{-1}$, если $\xi > r$. Для функций $\varphi(\lambda)$, ограниченных и непрерывных при $\mathrm{Re}\,\lambda < r$ и аналитических при $\mathrm{Re}\,\lambda < r$, автор строит функции $\varphi(A)$, определяя их как функции некоторого вспомогательного ограниченного оператора.

Доказывается теорема: e^{tA} $(t \geqslant 0)$ есть сильно непрерывная полугруппа и A — ее производящий оператор. Ю. Н. Валицкий

6716. Разложения по собственным функциям в L^p и C. Смарт (Eigenfunction expansions in L^p and C. Smart D. R.), Illinois J. Math., 1959, 3, № 1, 82—97 (англ.)

Рассматривается действующий в банаховом пространстве линейный замкнутый оператор T с простым дискретным спектром и полной системой собственных векторов. На оператор T накладывается большое число дополнительных ограничений и устанавливаются некоторые результаты о спектре и о разложении по собственным векторам оператора $T + S$, где оператор S в определенном смысле мал по сравнению с T. С помощью указанных результатов доказываются теоремы о разложении по собственным векторам некоторых регулярных дифференциальных операторов в пространствах C и L^p $(1 < p < \infty)$. Эти теоремы являются частичным обобщением некоторых результатов Шварца (РЖМат, 1955, 5137) и Креймера (РЖМат, 1959, 8031), полученных ими для пространства L^2. А. С. Маркус

6717. Проблема моментов для самосопряженных операторов. Надь (Momentumproblema onadjungált operatorokra. Szőkefalvi Nagy Béla), Magyar tud. Acad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 1, 163—171 (венг.)

Перевод на венгерский язык из журнала Acta math. Acad. scient. hung, 1952, 3, 285—293.

6718. Вложение в алгебры типа I. Уайдом (Embedding in algebras of type. I. Widom Harold), Duke Math. J., 1956, 23, № 2, 309—324 (англ.)

Терминологию и обозначения см. РЖМат, 1954, 4368.

Рассматривая AW^*-алгебру A как модуль (линейное векторное пространство) над ее центром Z, автор называет z-значным состоянием AW^*-алгебры A такой линейный функционал на A (со значениями в Z), который неотрицательные элементы переводит в неотрицательные. z-значное состояние r называется непрерывным, когда оно обладает следующим свойством: если e_α ортогональные проекторы из A и $\sup_\alpha e_\alpha = e$, то $r(a^*ea) = \sum_\alpha r(a^*ea)$ для любого $a \in A$. Пусть 1 — единица алгебры A. Центральным следом $Tr(a)$ алгебры A называется такое ее z-значное состояние, что $Tr(a^*, a) = 0$ только при $a = 0$, $Tr(1) = 1$ и $Tr(ab) = Tr(ba)$ для всех a, $b \in A$. Множество $\{r\}$ z-значных состояний называется полным, если для любого элемента $a \neq 0$ существует такое $r \in \{r\}$, что $r(a^*, a) \neq 0$. AW^*-вложением AW^*-алгебры A в другую AW^*-алгебру B называется изоморфизм между алгеброй A и некоторой AW^*-подалгеброй алгебры B, так что сохраняются кольцевые операции, инволюция и $\sup_\alpha e_\alpha$, где e_α ортогональные проекторы. Для того, чтобы AW^*-алгебра A с центром Z могла быть AW^*-вложена в некоторую AW^*-алгебру типа I с центром Z необходимо и достаточно, чтобы A имела полное множество непрерывных z-значных состояний.

Двойным коммутатором в алгебре B подмножества C алгебры B называется множество C'' тех элементов $a \in B$, для которых $xa = ax$ каждый раз, когда $x \in B$ и $xc = cx$ для всех $c \in C$.

Пусть A есть AW^*-подалгебра AW^*-алгебры B типа I с центром Z и $A \supseteq Z$. Если A — алгебра типа I, то $A'' = A$. З. Л. Лейбензон

6719. Обобщение теоремы Дая. Огасавара, Маэда (A generalization of a theorem of Dye. Ogasawara Toziro, Maeda Shuichiro), J. Sci. Hiroshima Univ., 1956, A 20, № 1, 1—4 (англ.)

Обобщается теорема Дая (РЖМат, 1953, 822).

Для кольца M операторов в гильбертовом пространстве M_P и M_U обозначают соответственно множества проекционных и унитарных операторов из M. M называется неатомичным, если для любого $P \in M_P$, $P > 0$ существует такое $Q \in M_P$, что $0 < Q < P$. Пусть M и N — неатомичные кольца операторов в гильбертовом пространстве. Если Ф групповой изоморфизм M_U на N_U, взаимно непрерывный в слабой топологии, то Ф имеет единственное продолжение до прямой суммы линейного и сопряженного к линейному *-изоморфизмов M на N. З. Л. Лейбензон

6720. О прямом произведении факторов. Мисоноу, Сугаку, 1956, 8, № 1, 32—33 (японск.)

6721. Эргодические подгруппы ортогональной группы на действительном гильбертовом пространстве. Сигал (Ergodic subgroups of the orthogonal group on a real Hilbert space. Segal I. E.), Ann. Math., 1957, 66, № 2, 297—303 (англ.)

Определение распределения d на линейном топологическом пространстве L и пространства квадратично ин-

тегрируемых функционалов $L_2(L, d)$ по отношению к этому распределению смотри в других работах автора (РЖМат, 1958, 1352, 1353), где подробно изучаются так называемые нормальное и клиффордово распределения.

Группа G преобразований пространства L естественным образом индуцирует свое представление $\Gamma(G)$ в $L_2(L, d)$. Автор предлагает говорить, что группа G действует на L эргодически по отношению к распределению d, если любой инвариантный по отношению к $\Gamma(G)$ элемент из $L_2(L, d)$ является постоянным. Доказано, что если G является подгруппой ортогональной группы на действительном гильбертовом пространстве H, не оставляющей инвариантных подпространств конечной размерности, то она действует эргодически по отношению к нормальному распределению n на H. На основании этого предложения доказывается теорема:

Пусть G — подгруппа ортогональной группы на действительном бесконечномерном гильбертовом пространстве H, оставляющая инвариантным каждый вектор в подпространстве M и не имеющая инвариантных конечномерных подпространств в ортогональном дополнении $H \ominus M$. Тогда если f — инвариантный по отношению к $\Gamma(G)$ элемент из $L^2(H, n)$, то f сосредоточен на M. При определении понятия „функционал сосредоточен на подпространстве" следует помнить, что $L_2(H, h)$, наряду с настоящими функционалами, содержит также идеальные элементы. Аналогичные результаты доказаны в связи с клиффордовым распределением.

В качестве следствия сформулированной теоремы получается следующий результат: Пусть A — самосопряженный оператор в H. Тогда квадратичной форме (Ax, x) можно сопоставить случайную величину по отношению к нормальному распределению в H (точный смысл сопоставления приведен в статье) в том и только в том случае, когда A имеет абсолютно сходящийся след. Приведены также следствия, имеющие, по мнению автора, значение для квантовой теории поля.

Л. Д. Фаддеев

6722. Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления. Ч. I. Случай тензорного произведения представлений основной серии. Наймарк М. А., Тр. Моск. матем. о-ва, 1959, 8, 121—153

Подробное изложение результатов, опубликованных ранее автором (РЖМат, 1960, 1855). При доказательстве применяется следующий прием: регулярное представление $(\varkappa(g) \to \varkappa(gg_0))$ разлагается, с одной стороны, на неприводимые (известным образом), а с другой стороны, на представления вида $\gamma_{\varkappa_1} \times \gamma_{\varkappa_2}$, где $\gamma_\varkappa$ — представление основной серии. Д. П. Желобенко

6723. О разложении на неприводимые представления тензорного произведения представления основной серии и представления дополнительной серии собственной группы Лоренца. Наймарк М. А., Докл. АН СССР, 1959, 125, № 6, 1196—1199

Получена явная форма указанного выше разложения и описан класс функций, реализующих неприводимые компоненты (все эти компоненты оказываются принадлежащими основной серии). Метод основан на изучении некоторого аналога регулярного представления группы Лоренца. Подобный результат для произведения двух представлений основной серии был ранее получен автором (РЖМат, 1960, 1855). Д. П. Желобенко

6724. Нормальные представления топологических групп. Такэноути, Сугаку, 1955, № 1, 1—8 (японск.)

6725. Бесселевы функции и представления группы евклидовых движений. Виленкин Н. Я., Успехи матем. наук, 1956, 11, № 3, 69—112

Бесселевы функции с целым индексом являются матричными элементами операторов неприводимых унитарных представлений группы всех движений плоскости. Это обстоятельство служит для автора исходным пунктом построения полной теории этих функций. В значительной своей части работа является применением к случаю группы движений плоскости более общих результатов по теории представлений и сферических функций на группах, полученных ранее рядом авторов (см., например, реф. 6727). Ф. А. Березин

6726. Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях. Березин Ф. А., Гельфанд И. М., Тр. Моск. матем. о-ва, 1956, 5 311—351

Изучаются свойства зональных сферических функций на симметрических пространствах, которыми являются групповые многообразия компактных полупростых групп Ли или многообразия смежных классов G/G_0 комплексной полупростой группы Ли по ее максимальной компактной подгруппе. Для функций, постоянных на двусторонних смежных классах по стационарной подгруппе, дано выражение для свертки функций $f_1(g)$ и $f_2(g)$ в виде

$$f_1 f_2(t) = \int a(t; t^{(1)}, t^{(2)}) f_1(t^{(1)}) f_2(t^{(2)})\, dt^{(1)} dt^{(2)}, \qquad (1)$$

где $t^{(1)}$, $t^{(2)}$ пробегают многообразие $\mathfrak{M}$ двусторонних смежных классов. Для функции $a(t; t^{(1)}, t^{(2)})$ указано дифференциальное уравнение. Для зональных сферических функций выведено функциональное уравнение вида

$$\Phi_\rho(t^{(1)})\, \Phi_\rho(t^{(2)}) = \frac{1}{\mu(S_{12})} \int_{S_{12}} \Phi_\rho(x)\, d\mu(x), \qquad (2)$$

где интеграл, стоящий в правой части, берется по „сфере" S_{12} со сложным радиусом $t^{(1)}$ и центром, расположенным на сложном расстоянии $t^{(2)}$ от начальной точки, $\mu(S_{12})$ есть объем указанной сферы. Это функциональное уравнение впервые было получено Годманом, который, однако, не указал его геометрического смысла. С помощью функционального уравнения ( ) доказано, что среднее значение функции $f(t)$ по сфере S_{12} равно $\int_{\mathfrak{M}} a(t; t^{(1)}, t^{(2)}) f(t)\, dt$. На симметрических пространствах ранга n рассматриваются независимые дифференциальные операторы $\Delta_x^{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ (операторы Лапласа), такие, что зональная сферическая функция является собственной для каждого из них. На множестве функций, зависящих только от сложного расстояния t переменной точки от начальной, оператор $\Delta_x^{(k)}$ превращается в оператор $\Delta_t^{(k)}$ — радиальную часть оператора $\Delta_x^{(k)}$. Для любой функции f имеем $\Delta_x^{(k)} \psi(t, x) = \Delta_t^{(k)} \psi(t, x)$, $1 \leqslant k \leqslant t$, где $\psi(t, x)$ среднее от функции f по сфере $S(t, x)$ с радиусом t и центром x. При некоторых естественных дополнительных условиях зональная сферическая функция является единственной собственной функцией для операторов Лапласа и потому есть функция от их собственных значений: $\Phi_\rho(t) = \Phi(t, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Оператор $\Phi(t, \Delta_x^{(1)}, \ldots, \Delta_x^{(n)})$ имеет смысл и является оператором усреднения по сфере $S(t, x)$. Изучено кольцо, тесно связанное с алгеброй представлений компактной полупростой группы G. Элементами алгебры представлений являются различные представления ψ группы G, суммой представлений — их прямая сумма, произведением — кронекеровское произведение. Кольцо Ξ, связанное с алгеброй представлений, состоит из аддитив-

ных функций ξ от представлений с законом умножения $\xi_1, \xi_2(\psi) = \sum_{\psi_1} \xi_1(\hat{\psi}_1 \times \psi)\, \xi_2(\psi_1)$ (сумма распространена на все неприводимые представления, $\hat{\psi}$ есть представление, контраградиентное ψ). Кольцо Ξ во многом аналогично кольцу R функций, постоянных на двусторонних смежных классах по стационарной подгруппе. В частности, закон умножения в нем может быть задан формулой $\xi_1\xi_2(\psi) = \sum_{\psi_1,\psi_2} \xi_1(\psi_1)\, \xi_2,(\psi_2)\, G(\psi_1, \psi_2; \psi)$, аналогичной формуле (1). Функция $G(\psi_1, \psi_2; \psi)$ при неприводимых ψ_1, ψ_2, ψ равна кратности, с которой представление ψ входит в разложение кронекеровского произведения $\psi_1 \times \psi_2$. Для функции $G(\psi_1, \psi_2; \psi)$ составлено конечно-разностное уравнение, аналогичное дифференциальному уравнению для функции $a(t; t^{(1)}, t^{(2)})$. Отмечается глубокая двойственность между функциями $G(\psi_1, \psi_2; \psi)$ и $a(t; t^{(1)}, t^{(2)})$. Многие результаты работы были анонсированы ранее в работе И. М. Гельфанда, Докл. АН СССР, 1950, **70**, № 1. Н. Я. Виленкин

6727. К теории присоединенных сферических функций на группах Ли. Виленкин Н. Я., Матем. сб., 1957, **42**, № 4, 485—496

Рассматривается следующее определение присоединенных сферических функций. Пусть G — группа Ли, $H \subset G$ — ее компактная подгруппа, $g \to T_g$ — неприводимое унитарное представление G и $h \to T_h$ — представление H, индуцированное представлениям T_g. Пространство $\mathfrak{H}$ представления T_g разлагается в сумму попарно ортогональных подпространств $\mathfrak{H}_k$, $1 \leqslant u < \infty$, в каждом из которых представление T_h индуцирует представление H, кратное неприводимому. При этом неприводимые представления H, определяющие представления, действующие в пространствах $\mathfrak{H}_k$ с различными k, не эквивалентны между собой. В каждом из подпространств $\mathfrak{H}_k$ выбирается ортонормированный базис ξ_{ke}. В этом базисе оператор T_g записывается с помощью клеточной матрицы с клетками

$$Q_{mk}(g) = \| T_g \xi_{k,e},\ \xi_{me'} \| .$$

Матрицу $Q_{mk}(g)$ автор называет присоединенной сферической функцией. Для так определенных сферических функций автор доказывает ряд формул, обобщающих формулы, полученные в работах Гельфанда и Березина (реф. 6726) и Годмана (Godement R., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, № 3, 496—556). Приведем некоторые из этих формул:

$$Q_{nk}(g_1)\, Q_{ks}(g_2) = d(k) \int Q_{ns}(g_1 h g_2)\, \mathrm{Sp} T_k(h)\, d\mu(h). \quad (1)$$

Здесь $T_x(h)$ — неприводимое представление H, которому кратно представление, действующее в $\mathfrak{H}_k$ и $d(k)$ — размерность этого представления.

Обозначим через R_{ns} множество матриц F_{ns}, элементами которых являются функции на G и которые удовлетворяют условиям $F_{ns}(h_1 g h_2) = Q_{nn}(h_1)\, F_{ns}(g)\, Q_{ss}(h_2)$. Легко проверить, что если $F_1 \in R_{mn}$, $F_2 \in R_{ns}$, то $F(g) = \int F_1(g_1)\, F_2(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) \in R_{ms}$. $F(g)$ автор называет сверткой F_1 и F_2 и обозначает $F = F_1 * F_2$. Обозначим через $\Phi(F_{mn})$ матрицу с элементами

$$\Phi_{kv,sq} = \mathrm{sp} \int F_{mk,ns}(g)\, Q^*_{mv,nq}(g)\, d\mu(g).$$

Оказывается, что

$$\Phi(F_{m,n})\, \Phi(F_{ns}) = d(n)\, \Phi(F_{mn} * F_{ns}), \quad (2)$$

$d(n)$ имеет тот же смысл, что в (1).

Кроме упомянутых выше результатов, в работе содержится также теорема о том, что сферические функции удовлетворяют уравнениям $\Delta Q_{ms}(g) = C_{mm} Q_{ms}(g)$, где C_{mm} — постоянная матрица и Δ, по терминологии автора, — „левый оператор Лапласа“, т. е. дифференциальный оператор, перестановочный с левыми сдвигами и такой, что если $F(hg) = Q_{mn}(h)\, F(g)$, то $\Delta_g F(hg) = Q_{mm}(h)\, \Delta_g F(g)$. Аналогичная формула справедлива и для „кривых операторов Лапласа“. Ф. А. Березин

6728. Общий оператор диффузии и полугруппы, сохраняющие положительность в одномерном случае. Феллер (The general diffusion operator and positivity preserving semi-groups in one dimension. Feller William), Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 417—436 (англ.)

Автор дает абстрактное определение процесса диффузии и наиболее общую форму оператора диффузии в одномерном случае. Пусть E — (конечный или бесконечный) замкнутый интервал на действительной прямой и M_+ — множество всех неотрицательных мер на борелевских множествах из E. Процесс — (по определению) это однопараметрическая полугруппа $\{T_t\}_{t>0}$ линейных преобразований на M_+ в M_+ таких, что из сходимости $\mu_n \to \mu$ мер как функционалов на $C(E)$ следует сходимость $\mu_n T_t \to \mu T_t$. Следует заметить, что автор не предполагает, что T_t сохраняет меру. Теорема 1 утверждает, что такой процесс взаимно соответствует полугруппе $\{T_t\}_{t>0}$ сохраняющих неотрицательность, ограниченных линейных преобразований $C(E)$ в $C(E)$. Процесс называется процессом локального характера, или процессом диффузии, если: 1) для каждого $f \in C(E)$, тождественно равного нулю в некоторой окрестности какой-либо точки $x_0 \in E$, $\lim_{t \downarrow 0} t^{-} (T_t f - f)(x_0) = 0$ и 2) для каждого $t > 0$ $\lim_{h \downarrow 0} (T_{t+h} f)(x) = (T_t f)(x)$ равномерен в E. Локально порождающий оператор A процесса диффузии T_t определяется локально ограниченной сходимостью $\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} (T_t F - F)(x) = f(x)$, где $F \in C(E)$ и f непрерывна в некоторой окрестности некоторой точки $x_0 \in E$. В этом случае автор пишет $F \in D(A; x_0)$.

Лемма 2 играет центральную роль в настоящей статье: Пусть $F \in D(A; x_0)$; если $F(x_0) = 0$ и F имеет локальный минимум в x_0, то $(AF)(x_0) \geqslant 0$.

Точка x_0 называется нулевой точкой, если $(T_t f)(x_0) = 0$ для каждого $f \in C(E)$ и всех $t > 0$ (Поглощающие барьеры в случае классической диффузии суть нулевые точки). Точка x_0 называется поглощающей точкой, если для каждого $F \in D(A; x_0)$ имеет место $(AF)(x_0) = CF(x_0)$. Точка x_0 называется правой (левой) точкой сдвига, если из $A(f(x) g(x_0) - f(x_0) g(x)) > 0$, $|x - x_0| < \varepsilon$, следует, что в некоторой окрестности x_0 отношение f/g строго возрастает (убывает).

Основной результат содержится в теореме 7. В открытом интервале I, не содержащем поглощающих точек и точек сдвига, существует строго возрастающая функция v, функция $g \in C(E)$ и выбор независимой переменной x такие, что в I

$$Af = g D_v(f/g)' + cf$$

(D_v означает дифференцирование по v). Если процесс диффузии сохраняет меру, то $g = 1$ и $c = 0$, так что $Af = D_v f'$. K. Yosida

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 5, 488.

6729. Почти периодические свойства общих полугрупп в пространствах Банаха. Якобс (Fastperiodizitätseigenschaften allgemeiner Halbgruppen in Banach-Räumen. Jacobs Konrad), Math. Z., 1957, **67**, № 1, 83—92 (нем.)

Основным результатом работы является следующая теорема расщепления (Aufspaltungssatz): Пусть $\mathfrak{H}$ — пространство Банаха и $\mathfrak{G}$ — произвольная полугруппа линейных преобразований в $\mathfrak{H}$. Пусть пространство $\mathfrak{H}$ и сопряженное пространство $\mathfrak{H}'$ можно так строго нормировать, что преобразования группы $\mathfrak{G}$, соответственно двойст-

венной группы $\mathfrak{G}'$, не увеличивают норму. Пусть по крайней мере одно из пространств равномерно выпукло-нормируемо. Тогда $\mathfrak{H}$ распадается в прямую сумму пространства $\mathfrak{P}$ $\mathfrak{G}$-почти периодических векторов и пространство исчезающих векторов (Fluchtvektoren), точнее: каждый вектор $h\in\mathfrak{H}$ однозначно представляется в виде $h=p+f$, $p\in\mathfrak{P}\in\mathfrak{F}$, причем p, f от h зависят линейно, непрерывно и относительно $\mathfrak{G}$ инвариантны. По результатам, обозначениям и определениям работа примыкает к предыдущей работе автора (РЖМат, 1957, 6500).

Б. М. Левитан

6730. Теоремы о сходимости бесконечных произведений в абстрактных полугруппах (обобщения классических предельных теорем теории вероятностей). Бергстрём (Konvergenzsätze über unendliche Produkte in abstrakten Halbgruppen (Verallgemeinerungen der klassischen Grenzwertssätze in der Wahrscheinlichkeitsrechnung). Bergström Harald). Abhandl. Math. Seminar Univ. Hamburg, 1959, **23**, 228—256 (нем.)

Обозначения и определения: R — коммутативная алгебра с единицей e. Элемент $x\in R$ называется (однозначно) безгранично делимым в множестве $M\supset R$, если для любого натурального n существует (единственный) элемент $x_n\in M$ такой, что $x_n^n=x$.

В R, как в линейном пространстве, вводится обобщенная норма. Именно, каждому элементу $x\in R$ сопоставляется неотрицательная, всюду конечная функция $\|x\|$ вещественной переменной $\sigma\in\sum$, где $\sum$ — некоторый (конечный или бесконечный) промежуток. Кроме обычных требований, предъявляемых к норме, должно выполняться условие: если $\|x\|_\sigma=0$, а $y\in R$, то $\|xy\|_\sigma=0$ ($\|x\|_\sigma$ — значение функции $\|x\|$ в точке σ). Если для любого $x\in M\subset R$ выполняется неравенство $\|(x-e)^2\|\leqslant\xi\|x-e\|^2$, где ξ — фиксированная функция, то множество M называется квадратично e-стабильным.

В R вводится еще одна норма:

$$|||x|||_\sigma=\sup_{y\in R}\frac{\|xy\|_\sigma}{\|y\|_\sigma}.$$

Если для всех элементов некоторой полугруппы $H\in R$ выполняется соотношение $|||x|||=\|x\|$, то H называется банаховой полугруппой.

В качестве примера автор рассматривает совокупность H функций распределения; произведением является свертка функций. R — линейная оболочка H. Норма вводится посредством равенства

$$|||f(x)|||_\sigma=\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\Phi\left(\frac{x-t}{\sigma}\right)df(t)\right|,$$

где $\Phi(x)$ — гауссова функция распределения. Единичным элементом служит функция $\varepsilon(x)=[1+\operatorname{sign}x]/2$. При этом H является полной, выпуклой, e-стабильной банаховой полугруппой. Другой способ нормировки R получаем, полагая $\|f(x)\|_\sigma=|\widetilde{f}(\sigma)|$, где $\widetilde{f}(\sigma)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$.

В статье изучаются произведения, образованные из элементов некоторой двойной последовательности $\{x_k(n)\}$. Автор говорит, что такая последовательность принадлежит классу Γ, если при каждом $\sigma\in\sum$ выполнены условия:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\lambda>0}\left|\sum_{k=1}^{\lambda}(|||x_k(n)|||_\sigma-1)\right|<\infty;$$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\lambda>0}\left|\sum_{k=1}^{\lambda}\left(\frac{1}{|||x_k(n)|||_\sigma}-1\right)\right|<\infty.$$

Основным результатом статьи является

Теорема 6. 1. Пусть H — выпуклая, полная и квадратично e-стабильная банахова полугруппа с единичным элементом e и $\{x_k(n)\}$ — двойная последовательность класса Γ, удовлетворяющая условиям:

1. $x_i(n)=e$ при $i>k_n$, где $k_n\uparrow\infty$;
2. существуют элементы $x_i(\infty)\in H$ такие, что $\|x_i(n)-x_i(\infty)\|\to 0$ при $n\to\infty$;
3. $\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i(n)-e\|^2\to\sum_{i=1}^{\infty}\|x_i(\infty)-e\|^2<\infty$;
4. $\|\sum_{k=\rho}^{\mu}[x_k(\infty)-e]\|\to 0$ при $\rho,\mu\to\infty$;
5. $\|\sum_{k=1}^{k_n}[x_k(n)-e]-\sum_{k=1}^{k_m}[x_k(m)-e]\|\to 0$ при $m,n\to\infty$.

Тогда существуют элементы $y, z\in H$ такие, что 1) $\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|y-\prod_{i=0}^{k}x_i(n)\|=0$; 2) $\lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\|z-\prod_{i=k}^{k_n}x_i(n)\|=0$. При этом элемент z безгранично делим в H.

М. З. Соломяк

6731. Операционное исчисление для бесконечно малых производящих операторов полугрупп. Балакришнан (An operational calculus for infinitesimal generators of semigroups. Balakrishnan A. V.), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **91**, № 2, 330—353 (англ.)

Пусть $T(\xi)$ $(\xi\geqslant 0)$ — однопараметрическая полугруппа линейных ограниченных операторов в банаховом пространстве X такая, что

$$T(\xi_1+\xi_2)=T(\xi_1)T(\xi_2)\quad(\xi_1,\xi_2>0),\quad T(0)=I,$$
$$\|T(\xi)x-x\|\to 0$$

при $\xi\to 0$ и $w^+=\inf_{\xi>0}\frac{\operatorname{Log}\|T(\xi)\|}{\xi}>-\infty$.

Бесконечно малый производящий оператор полугруппы $Ax=\lim_{\xi\to 0}\frac{T(\xi)x-x}{\xi}$, как известно, является замкнутым линейным оператором с плотной областью определения. Вводится коммутативное нормированное кольцо (с единицей) $S(w)$ счетно аддитивных мер α, заданных на ограниченных борелевских множествах полуинтервала $[0,\infty)$ с нормой $\int_0^\infty\|T(\xi)\|d_\xi|\alpha|<\infty$ ($|\alpha|$ — вариация α) и операцией свертывания в качестве умножения элементов; $L(w)$ обозначает идеал этого кольца, состоящий из абсолютно непрерывных мер $\alpha: d_\xi\alpha=f(\xi)d\xi$. Обозначим

$$\varphi(\lambda;f)=\int_0^\infty e^{\lambda\xi}f(\xi)d\xi\quad(\operatorname{Re}\lambda<w^+).$$

В операционном исчислении Хилла — Филлипса (Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., 1951; Phillips R. S., Pacif. J. Math., 1952, 343—369) каждой числовой функции $f(\lambda)=\int_0^\infty e^{\lambda\xi}d_\xi\alpha$ $(\alpha\in S(w))$ ставится в соответствие ограниченный оператор $f(A)x=\int_0^\infty T(\xi)xd_\xi\alpha$ $(x\in X)$. Автор распространяет это соответствие на более широкий класс функций $f(\lambda)$, при которых получаются неограниченные операторы $f(A)$. Вводится класс $\mathfrak{M}$ числовых функций $\varphi(\lambda)$, голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda<w^+$ и обладающих свойством: существует плотное в $L(w)$ множество $D(C_w)$ элементов f таких, что для каждого $f\in D(C_w)$ найдется $g\in L(w)$, для которого $\varphi(\lambda)\Phi(\lambda;f)=\Phi(\lambda;g)$. Каждой функции $\varphi(\lambda)\in\mathfrak{M}$ ставится в соответствие сначала оператор C_w с областью определения $D(C_w)$ по формуле $C_wf=g$. По этому оператору определяется затем оператор C_φ, действующий из X в X: $D(C_\varphi)$ — множество

элементов вида $\Phi(A;\ f)\,x=\int_0^\infty T(\xi)xf(\xi)\,d\xi$ ($f\in D(C_w)$, $x\in X$); $C_0\Phi(A;\ f)\,x=\Phi(A;\ C_wf)\,x$. Доказывается, что оператор C_0 можно замкнуть, причем его замыкание C имеет плотную в X область определения. Наконец, полагают $\varphi(A)\,x=Cx$ ($x\in D(C)$). Устанавливается ряд предложений об операторе C и его спектре, показывающих естественность этого обобщения. Приводятся применения теории к определению дробных степеней бесконечно малого образующего оператора полугруппы.

С. И. Зуховицкий

6732. Свойства действительных функций, обладающих дифференциалом второго порядка в смысле Гато. Николеску (Proprietăţi ale funcţiilor reale diferenţiabile Gâteaux direct de ordinul doi. Nicolescu Lilly Jeanne), Comun. Acad. RPR, 1959, 9, № 5, 415—418 (рум.; рез. русск., франц.)

Обобщаются теоремы Ролля, Коши и Вайнберга на случай функций, указанных в заглавии и заданных в нормированном линейном пространстве над полем действительных чисел. Э. Апарисио

6733. О производной Фреше оператора $Au\equiv\int_{-\pi}^{\pi}\Phi[s;\ u(s)]\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}ds$. **Гусейнов А. И.,** Елми əсəрлəр. Аəрб. унив. Физ.—риjазиjjат вə кимjа сер., Уч. зап. Азерб. ун-та. Физ.-матем. и хим. сер., 1959, № 1, 3—5 (рез. азерб.)

Автор доказывает, что в нулевой точке производная в смысле Фреше оператора

$$Au=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi[s,\ u(s)]\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}dx,\qquad(1)$$

действующего из гильбертового функционального пространства L_2 в самого себя, выражается оператором

$$Bu=\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'_u(s,\ 0)\,u(s)\,ds,\qquad(2)$$

если выполнены условия: α) $\Phi(s,\ 0)=0$, $-\pi\leqslant s\leqslant\pi$, β) $|\Phi'_u(s,\ u)|<M<\infty$, $-\infty<u<\infty$, $-\pi\leqslant s\leqslant\pi$, γ) $\Phi'_u(s,\ u)$ непрерывно по u в точке $u=0$ равномерно по s. Операторы (1), (2) часто используются в вопросах теории нелинейных сингулярных интегральных уравнений.

Э. С. Цитланадзе

6734. Новое доказательство теоремы Шаудера о неподвижных точках. О Жен Хен, Сухак ка мулли Математика и физика, 1957, 1, № 2, 26—31 (кор., рез. русск.)

Дается доказательство теоремы Шаудера о неподвижных точках, опирающееся на теорему I. I статьи М. М. Вайнберга (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4, 55—102). М. Ф. Бокштейн

6735. Другое доказательство теоремы Шаудера о неподвижных точках. О Жен Хен, Сухак ка мулли Математика и физика, 1957, 1, № 3, 12—14 (кор.; рез. русск.)

Еще одно доказательство теоремы Шаудера, не использующее на этот раз ни теоремы, указанной в реф. 6734, ни аппроксимирующего данное отображение симплициального отображения (Немыцкий В. В., Успехи матем. наук, 1936, вып. I, стр. 150). М. Ф. Бокштейн

6736. Оператор Немыцкого в обобщенных пространствах Орлича. Вайнберг М. М., Шрагин И. В., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 145—159

Пусть B — множество n-мерного пространства конечной или бесконечной лебеговой меры, $M(u)$ и $M_1(u)$ — функции Юнга, $d=\sup\{u:M(u)<\infty\}$, $d_1=\sup\{u:M_1(u)<\infty\}$, $g(u,\ x)$ — вещественная функция, определенная на топологическом произведении $(-\infty,\ \infty)\times B$, измеримая по x при каждом фиксированном $u\in(-\infty,\ \infty)$ и непрерывная по u почти при каждом фиксированном x; для произвольных положительных чисел λ, μ, ν и для возрастающей последовательности положительных чисел $\{a_n\}\to\infty$ положим, что

$E_x(\lambda,\ \mu,\ \nu)=\{u:\lambda u\in<-d,\ d>,\ M_1(\mu\,|\,g(u,\ x)\,|\,)\leqslant$
$\leqslant\nu M(\lambda\,|\,u\,|)\}$, где $<-d,\ d>=[-d,\ d]$ при $M(d)<\infty$ и $<-d,\ d>=(-d,\ d)$ при $M(d)=\infty$, $F(x;\ \lambda,\ \mu,\ \nu)=$
$=\sup\{u\,|\,g(u,\ x)\,|\,:u\in E_x(\lambda,\ \mu,\ \nu)\cup\{0\}\}$, $E_x^{(n)}(\lambda,\ \mu,\ \nu)=$
$=[-a_n\lambda^{-1},\ a_n\lambda^{-1}]\cap E_x(\lambda,\ \mu,\ \nu)$, $F_n(x;\ \lambda,\ \mu,\ \nu)=$
$=\sup\{\mu\,|\,g(u,\ x)\,|\,:u\in E_x^{(n)}(\lambda,\ \mu,\ \nu)\cup\{0\}\}$,

L^M и L^{M_1} — обобщенные по Занену пространства Орлича, порожденные соответственно функциям $M(u)$ и $M_1(u)$, L_M^x — подпространство L^M, состоящее из всех функций $u(x)$, для которых $\int_B M[k\,|\,u(x)\,|\,]\,dx<\infty$ при любом k, $hu=g(u(x),\ x)$ — оператор Немыцкого.

Используя свойства функций E_x и F, авторы находят необходимые и достаточные условия действия оператора hu из L^M, L_M, L_M^x в L^{M_1}, L_{M_1}, $L_{M_1}^x$. Пусть $\mathfrak{X}$—какой-либо из классов L^M, L_M, L_M^x и $\mathfrak{X}_1$ — какой-либо из классов L^{M_1}, L_{M_1}, $L_{M_1}^x$.

Доказаны также теоремы, устанавливающие достаточные (в некоторых случаях и необходимые) условия действия hu из L^M в $\mathfrak{X}$, а также из $\mathfrak{X}$ в L^{M_1} и из L^M в $\mathfrak{X}_1$. Далее изучены некоторые новые свойства оператора hu. Например, если h действует из L^M в $L_{M_1}^x$ или из L_M^x в $L_{M_1}^x$, то он непрерывен. Э. С. Цитланадзе

6737. О неравномерно сжатом операторе. Соколов Е. И., Болотин А. С., Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1959, 39, 279—280

Приведен простой пример, показывающий, что для оператора A, отображающего компакт в себя, из неравенства $\rho(Ax,\ Ay)<\rho(x,\ y)$ $(x\neq y)$ не следует неравенство $\rho(Ax,\ Ay)\leqslant\alpha\rho(x,\ y)$, где $\alpha<1$ — постоянная.

А. И. Перов

6738. Условия полной непрерывности общего нелинейного интегрального оператора, действующего в пространствах Орлича. Фириченкова Л. Т., Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1959, 77, 235—246

Пусть $L^{M_1}=L^{M_1}(G)$ и $L^{M_2}=L^{M_2}(G)$ — пространства Орлича, порожденные функциями Юнга M_1 и соответственно M_2, удовлетворяющими Δ_2-условию. Изучается общий нелинейный интегральный оператор $K:K\varphi=\int_G K(\varphi(y),\ x,\ y)\,dy$, действующий из L^{M_1} в L^{M_2}. Предполагается, что вещественная функция вещественных аргументов $K(u,\ x,\ y)$ непрерывна по u и измерима по $\{x,\ y\}\in\hat{G}=G\times G$, где G — ограниченное измеримое множество конечномерного пространства.

Теорема 1. Если для любой ограниченной измеримой функции

$$\psi(x,\ y)\iint_{GG}M_2[K(\psi(x,\ y)\,x,\ y)]\,dxdy<\infty\qquad(1)$$

и каждому $\varepsilon>0$ соответствует $\delta>0$ такое, что

$$\Big\|\int_E|K(\varphi(y),\ x,\ y)|\,dy\Big\|_{L^{M_2}}<\varepsilon$$

для всякой функции $\varphi(y)$ из единичного шара пространства L^{M_1} при $\operatorname{mes}E<\delta$ $(E\subset G)$, то оператор K вполне непрерывен из L^{M_1} в L^{M_2}.

Теорема 2. Пусть функция Юнга $N_2(v)$, дополнительная к M_2, удовлетворяет условию:

$$N_2(uv)\leqslant cN_2(u)\,N_2(v),\quad c=\text{const}\qquad(2)$$

Тогда, если (1) выполнено для всякой функции $\psi(x, y) \in L^{M_1}(\hat{G})$, то оператор K вполне непрерывен из L^{M_1} в L^{M_2}.

Теорема 3. Пусть выполнены условия (1) и (2). Тогда, если оператор Немыцкого $hu = g(u(x), x)$ ограничен из L^{M_1} в L^{M_2} и $|K(u, x, y)| \leqslant R(x, y) g(u, y)$, $R(x, y) \in L^{M_2}(\hat{G})$, то K вполне непрерывен из L^{M_1} в L^{M_2}.

М. М. Вайнберг

6739. О приближенном отыскании всех решений данного линейного уравнения в пространстве Банаха. Иванов В. В., Симоненко И. Б., Докл. АН СССР, 1959, 126, № 6, 1172—1175

Пусть E_1 и E_2 — пространства Банаха, имеющие базисы, а $\overline{E}_1$ и $\overline{E}_2$ — сопряженные им пространства. Рассматривается уравнение

$$Kx = y, \tag{1}$$

где K — линейный оператор из E_1 в E_2, причем соответствующее однородное уравнение имеет α линейно независимых решений: $x_1, x_2, \ldots, x_\alpha$. Пусть $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_\alpha \in \overline{E}_1$ таковы, что $\det\{\overline{x}_j(x_k)\} \neq 0$. E_1^0 — подпространство E_1, состоящее из всех элементов x, для которых $\overline{x}_j(x) = 0$, $j = 1, 2, \ldots, \alpha$. Пусть, наконец, уравнение $K^* \overline{u} = 0$, сопряженное уравнению (1), имеет β линейно независимых решений: $\overline{u}_1, \overline{u}_2, \ldots, \overline{u}_\beta \in \overline{E}_2$, элементы $u_1, u_2, \ldots, u_\beta \in E_2$ таковы, что $\det\{\overline{u}_k(u_j)\} \neq 0$, и условия $\overline{u}_k(y) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, \beta)$ необходимы и достаточны для разрешимости уравнения (1).

Теорема 1. Уравнение $\widetilde{K}\chi = K\overset{\circ}{\chi} + \sum_1^\beta c_j u_j = y$ относительно $\chi = \{\overset{\circ}{x}, c_1, \ldots, c_\beta\}$ имеет единственное решение при любом $y \in E_2$.

Пусть L_n M_N — конечномерные подпространства E_1^0 и E_2, $N = n + \beta$ и M_N содержат, начиная с некоторого N, $u_1, u_2, \ldots, u_\beta$. P_N — проекционные операторы из E_2 на M_N.

Теорема 2. Если $\| P_N K\varphi_n - K\varphi_n \| \leqslant \varepsilon_N \| \varphi_n \|$ для $\varphi_n \in L_n$ и $\varepsilon_N \to 0$, то при достаточно больших N

$$\| P_N \widetilde{K} \chi_n \| \geqslant C \| \widetilde{K}\chi_n \|, \quad \chi_n = \{\varphi_n, c_1, \ldots, c_\beta\}, \quad C > 0.$$

Из теорем 1 и 2 и результатов Н. И. Польского (РЖМат, 1958, 4248) следует, что уравнение (2) можно решать проекционными приближенными методами. Указаны некоторые приложения сформулированных теорем.

И. К. Даугавет

6740. О решении одной проблемы, касающейся eT-пространств. Мамузич (Sur la solution d'un problème concernant eT-espaces. Mamuzić Zlatko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1956, 11, № 2, 95—103 (франц.; рез. сербо-хорв.)

Пусть T — частично упорядоченное множество такое, что: 1) отношение $a < c \;\&\; b < c$ влечет сравнимость элементов a и b; 2) всякая цепь, содержащаяся в T, вполне упорядочена. Множество T становится eT-пространством, если окрестностями точек в T являются множества:

$$\begin{gathered} T(a) = (z, \cdot) \setminus (a, \cdot), \quad z < a, \quad \gamma a \in (\mathrm{II}); \; a, z \in T; \\ T(a) = \{a\}, \quad \gamma a \,\overline{\in}\, (\mathrm{II}), \quad a \in T, \end{gathered} \tag{1}$$

где $(z, \cdot)$ (соответственно $(a, \cdot)$) означает множество элементов $> z$ (соответственно $> a$), γ_a — порядковый тип множества $(\cdot, a)$ элементов $< a$, (II) — множество всех порядковых чисел второго рода, меньших максимального порядкового типа всевозможных цепей из T.

Курепа показал (РЖМат, 1959, 6715), что всякое eT-пространство, отделимое в смысле Фреше (пространство $(T\tau_T)$ есть пространство класса $E[M]$, причем соответствующая экарта определяется по формулам:

$$\begin{cases} f(a, b) = t((\cdot, a] \cap (\cdot, b]), \text{ если } a \neq b \\ (t \text{ — порядковый тип}) \\ f(a, a) = \begin{cases} \gamma a, & \text{если } \gamma a \in (\mathrm{II}) \\ \gamma a + 2, & \text{если } \gamma a \,\overline{\in}\, (\mathrm{II}) \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

(так что M оказывается пространством всех порядковых чисел, меньших $\gamma T + 2$ или γT, смотря по тому, является ли γT порядковым числом 1-го или 2-го рода). Показав на примере, что существует пространство (T, τ_T), не удовлетворяющее условно непрерывности $0^{1\prime}$:

$$a \in \overline{F} \Rightarrow f(a, a) \in f(F, F),$$
$$a \in T, \quad F \subset T, \quad f(F, F) = \{f(x, x) \mid x \in T\},$$

Курепа поставил проблему, найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы eT-пространство удовлетворяло $0^{1\prime}$. Решению этой проблемы и посвящена реферируемая статья. Основным ее результатом является следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы eT-пространство удовлетворяло условию непрерывности $0^{1\prime}$, определенному, согласно (2), для абстрактной экарты f, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in T$, $\gamma x \in (\mathrm{II})$, существовала точка $z_x < x$ такая, что

$$[y \in R_{\gamma x} T \;\&\; y > z_x] \Rightarrow [y = x],$$

где $R_{\gamma x} T$ — множество элементов из T типа γx.

Доказываются еще две другие эквивалентные формулировки этой теоремы. Кроме того, рассматриваются некоторые свойства пространств (T, τ_T); например, доказывается, что все окрестности (1) в пространстве (T, τ_T) суть открыто-замкнутые множества и что всякое пространство (T, τ_T) регулярно.

С. Н. Крачковский

6741. О полунепрерывности функционалов. I. Коси (On semi-continuty of functionals. I. Koshi Shozo), Proc. Japan Acad., 1958, 34, № 8, 513—517 (англ.)

R обозначает K-пространство. Элементу $p \in R$ отвечает оператор $[p]$; $[p]x = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} (\nu \cap \nu \mid p \mid)$, $x \geqslant 0$ и $[p]x = [p]x^+ - [p]x^-$ для любого $x \in R$. Согласно Накано R называется „тотально-непрерывным", если для каждой двойной последовательности проекторов $[p_{i,j}] \uparrow_{j=1}^{\infty} [p]$ имеется последовательность проекторов $[p_k] \uparrow_{k=1}^{\infty} [p]$ и номера $l_{(l,k)}$ $(l, k = 1, 2, 3, \ldots)$, так что $[p_k] < [p_{i, l(l,k)}]$.

Конечный и вещественный функционал $m(x)$ называется полунепрерывным, если $0 < a_\lambda \uparrow_{\lambda \in \Delta} a$ влечет $m(a) = \sup_{\lambda \in \Delta} m(a_\lambda)$. Доказывается (теорема I): Пусть для тотально-непрерывного пространства R и конечного функционала $m(x)$ выполнено:

1) $\bigcap_{\lambda \in \Delta} a_\lambda = \bigcap_{l=1}^{\infty} a_{\lambda_l}$ при некотором выборе последовательности $\{a_{\lambda_l}\}$, $0 < a_\lambda \in R$, $(\lambda \in \Delta)$;

2) из $a, b = 0$ следует $m(a + b) = m(a) + m(b)$;

3) из $|a| < |b|$ следует $m(a) < m(b)$;

4) для каждого $a\in R$ из $0\leqslant\lambda_i\uparrow_{i=1}^{\infty}\lambda_0$, λ_i — числа, следует $m(\lambda_0 a)=\sup_i m(\lambda_i a)$.

Тогда функционал $m(x)$ является полунепрерывным в некотором l-идеале M, полном в R (полнота означает: $|a|\wedge|b|=0$ для всех $b\in M$ влечет $a=0$); термин „l-идеал" взят по Биркгофу.

Пусть f — линейный функционал в R. f называется ограниченным, если $\sup_{|x|\leqslant|a|}|f(x)|<\infty$ для каждого $a\in R$; f называется универсально-непрерывным, если из $a_\lambda\uparrow_{\lambda\in\Delta}0$ следует $\inf_{\lambda\in\Delta}|f(a_\lambda)|=0$. Для ограниченного f Накано доказал $f=f_1+f_2$, где f_1 — универсально-непрерывен, f_2 — ортогонален ко всем универсально-непрерывным линейным функционалам. Автор отмечает, что из этой теоремы и теоремы I вытекает совпадение каждого ограниченного f с некоторым универсально-непрерывным f_1 на некотором l-идеале полном в R. Этим подтверждается предположение, высказанное Амемией.

Д. П. Мильман

6742. Поправка к моей работе: «Дифференциальное исчисление для неметрических структур. II. Дифференциальные формы». Фишер (Berichtigung zu meiner Arbeit: «Differentialkalkül für nichtmetrische Strukturen. II: Differentialformen. Fischer H. R.), Arch. Math., 1959, **10**, № 1, 28—30 (нем.)

Отмечена ошибка, которая имеется на стр. 432 указанной в заглавии работы (РЖМат, 1959, 588), и дано исправленное изложение соответствующего раздела.

С. Н. Крачковский

6743. О бинарных отношениях в связных упорядоченных пространствах. Крул (Concerning binary relations on connected ordered spaces. Krule I. S.), Canad. J. Math., 1959, **11**, № 1, 107—111 (англ.)

Две упорядоченности связного топологического пространства X, естественным образом связанные с топологией в X, или тождественны, или обратны друг другу (Eilenberg S., Amer. J. Math., 1941, **63**, 39—45). Автор характеризует эти упорядоченности как рефлексивные, транзитивные отношения, которые удовлетворяют некоторым топологическим условиям. Пусть $L\subset X\times X$ — бинарное отношение в множестве X (через σL обозначается двойственное к L), (X, L) называется упорядоченным множеством, если L рефлексивно, транзитивно, антисимметрично и для $x, y\in X$ или $(x, y)\in L$ или $(y, x)\in L$. Если X — топологическое пространство, то вводятся следующие обозначения: для любого $x\in X$ через $L(x)$ обозначается множество всех точек $y\in X$, для которых $(y, x)\in L$; для любого $A\subset X L(A)=\bigcup\{L(a)/a\in A\}$; $K_L=\{k\in X$ таких, что из $x\in L(k)$ следует $k\in L(x)\}$ (так называемое множество L-минимальных элементов, см. РЖМат, 1957, 213). Отношение L называется непрерывным, если $L(\overline{A})\subset\overline{L(A)}$ для любого $A\subset X$; L монотонно, если $L(x)$ есть связное для каждого $x\in X$; L замкнуто снизу (сверху), если $L(x)$ ($\sigma L(x)$) замкнуто для каждого $x\in X$. Доказывается, что если (X, R) — связное упорядоченное пространство, L — рефлексивное, транзитивное, замкнутое сверху и снизу, монотонное, непрерывное отношение в X, причем $K_L=K_R$ или $K_L=K\sigma R$, то $L=R$ или $L=\sigma R$ (не обязательно соответственно), верно и обратное.

В заключение рассматриваются примеры, в которых X есть множество вещественных чисел (или его подмножество), $R=\{(x, y)\in X\times X/x<y\}$, а L не удовлетворяет какому-либо условию теоремы; тогда $R\neq L\neq\sigma R$.

Г. И. Домрачева

6744. О некоторых соотношениях между бимодуляром и норммодуляром в линейных полуупорядоченных пространствах. Хонда (Honda Kōji), Муроран когё дайгаку кэнкю хококу, Mem. Muroran Univ. Engng, 1957, **2**, № 3, 771—779 (японск., рез. англ.)

Относительно бимодуляра $M(x, y)$ $(x\in R, y\in S)$, определенного в двух линейных полуупорядоченных пространствах R и S, норммодуляра по норме S

$$m(x)=\sup_{\|y\|\leqslant 1}M(x, y)\quad(x\in R,\ y\in S),$$

и второй нормы модуляра $|||a|||=\sup_{\|\tilde{x}\|\leqslant 1}|\tilde{x}(a)|$ ($\|\tilde{x}\|$ — первая норма $\tilde{m}$), введенных Накано, автор получил следующую теорему:

Теорема II. I. Пусть R полурегулярно и все $M(x, y)$ $(0\neq y\in S,\ \|y\|>0)$ монотонно полны на R и являются непрерывными модулярами. Тогда

$$|||a|||=\sup|||a|||_y=\inf_{m(\xi, a)\leqslant 1}\frac{1}{|\xi|},$$

где $|||a|||_y$ есть вторая норма на $M(x, y)$.

Далее, предполагая, что D_m есть регулярный дилататор на R, автор доказал следующие теоремы:

Теорема IV. I. Если m есть монотонно полный на R модуляр и норма m непрерывна, то D_m имеет монотонно полную норму.

Теорема IV. II. Пусть m — монотонно полный и равномерно ограниченный модуляр, тогда равномерно ограничен и норммодуляр по норме D_m собственного модуляра.

Теорема IV. III. Если m — монотонный полный и ограниченный и равномерно монотонный модуляр, то m_n также будет равномерно монотонным. О Жен Хек

6745. Пространства, сопряженные к пространствам Накано. Ямамуро (On conjugate spaces of Nakano spaces. Yamamuro Sadayuki), Trans. Amer. Math. Soc., 1959, **90**, № 2, 291—311 (англ.)

Пусть R—пространство Накано (см., например, РЖМат 1956, 1492) с модуляром $m(x)$. Вводится сопряженное к R пространство $\bar{R}$ линейных (аддитивных и однородных) функционалов $\Phi(x)$ на R, удовлетворяющих условию: из $x_\lambda\uparrow 0$ следует $\inf_{\lambda\in\Delta}|\Phi(x\lambda)|=0$. $\bar{R}$ есть векторная структура, в которой каждое множество положительных элементов имеет точную грань ($\Phi\geqslant 0$ означает $\Phi(x)\geqslant 0$ для всех $x\geqslant 0$).

Амемия (РЖМат, 1957, 614) ввел две нормы в R: $\|x\|=\inf_{\xi>0}\frac{1+m(\xi x)}{\xi}$ (первая норма), $|||x|||=\inf_{m(\xi x)\leqslant 1}\frac{1}{|\xi|}$ (вторая норма), при этом, $|||x|||\leqslant\|x\|\leqslant 2|||x|||$. Совокупность всех $\bar{x}\in\bar{R}$, ограниченных по норме, обозначается $\bar{R}^m$ и называется „модулярно-сопряженным пространством". Функционал $\bar{m}(\bar{x})$, равный $\sup_{x\in R}\{\bar{x}(x)-\bar{m}(x)\}$ является модуля в $\bar{R}^m$, и по отношению к $\bar{m}(\bar{x})$ пространство $\bar{R}^m$ является пространством Накано. Если модуляр $m(x)$ конечен (т. е. $m(x)<\infty$ для всех $x\in R$), то $\bar{R}^m$ является дуальным (сопряженным) банаховым пространством.

Элемент $p\in R$ порождает оператор на R, $[p]$ называемый „проектором", по формулам:

$[p]x=\bigcup_{v=1}^{\infty}(x\wedge v\,|\,p\,|)$ при $x\geqslant 0$; $[p]x=[p]x^+-[p]x^-$ при любом $x\in R$. Ниже предполагается выполненным условие: из $\bar{x}(p)=0$ для всех $\bar{x}\in\bar{R}$ следует $[p]=0$.

При некоторых ограничениях, Накано установил: $m(x)=\sup_{\bar{x}\in\bar{R}}\{\bar{x}(x)-m(x)\}$ (равенство Накано). Автор

упрощает доказательство этой теоремы Накано о рефлексивности модуляра и доказывает рефлексивность норм при рефлексивности модуляра. Доказывается, что равенство Накано равносильно совместному выполнению условий:

$$1)\quad \|\overline{x}\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\overline{x}(x)|, \quad |||\overline{x}||| = \sup_{|||x|||\leqslant 1} |\overline{x}(x)|,$$

$$2)\quad \|x\| = \sup_{\|\overline{x}\|\leqslant 1} |\overline{x}(x)|, \quad |||x||| = \sup_{|||\overline{x}|||\leqslant 1} |\overline{x}(x)|.$$

Автор замечает, что условие 1) верно также без требования равенства Накано.

Множество проекторов B называется идеалом, если выполнено: (1) $0\overline{\in}B$; (2) если $[p]\in B$ и $[p]\leqslant[q]$, то $[q]\in B$; (3) если $[p]\in B$, $[q]\in B$, то $[p]\cdot[q]\in B$. Максимальными называются идеалы, не содержащиеся ни в каком другом (как правильная часть); они обозначаются $\widetilde{q}, \widetilde{p}, \ldots$.

Через $U_{[p]}$ обозначается совокупность всех максимальных идеалов, содержащих $[p]$. $\{U_{[p]}\}$ образует систему окрестностей, по отношению к которой множество F всех максимальных идеалов превращается в локальнобикомпактное хаусдорфово пространство; в нем $U_{[p]}$ замкнуто и открыто.

Если $\mu([p])$ — вещественная функция проекторов, то равенство $\lim_{[p]\to\widetilde{p}} \mu([p]) = \alpha$ означает: для любого $\varepsilon>0$ можно найти $[p]$ так, чтобы для любого $[q]\in\widetilde{p}$ и удовлетворяющего $[q]\leqslant[p]$ выполнялось $|\mu([q])-\alpha|<\varepsilon$.

Накано доказал существование для $p\in R$, $a\in R$ предела

$$\lim_{[p]\to\widetilde{p}} \frac{m(\xi[p]a)}{m([p]a)} = \omega(\xi, a, \widetilde{p}),$$

для $\widetilde{p}\in U_{[a]}$ (ξ — число), а также, что $m([p]a)$ может рассматриваться как мера на $U_{[p]}$ так, чтобы выполнялось $m(\xi[p]a) = \int_{U[p]} \omega(\xi, a, \widetilde{p})\, m(d\widetilde{p}a)$. Функция $\omega(\xi, a, \widetilde{p})$ называется спектром $m(x)$.

При дифференцируемости $\omega(\xi, a, \widetilde{p})$ по ξ и конечном $m(x)$, при некоторых ограничениях на „a“, $\omega(\xi, a, \widetilde{p})$ используется для интегрального представления по мере $m(d\widetilde{p}a)$ функционала Мазура

$$\Phi_a(x) = \lim_{\eta\to+0} \frac{|||x+\eta y||| - |||x|||}{\eta}, \quad |||x||| = |||y||| = 1.$$

Дается интегральное представление по мере $m(d\widetilde{p}a)$ для $\overline{x}([p]x)$ при $\overline{x}\in\overline{R}^m$, $[x]\leqslant[a]$; в нем используется также некоторый функционал $a^{\overline{R}}\in\overline{R}^m$, отличающийся от $\Phi_a(x)$ лишь множителем, зависящим от a. При этом выполняется $a^{\overline{R}}(a) - \overline{m}(a^{\overline{R}}) = m(a)$; тем самым верхняя грань в равенстве Накано достигается для $\overline{x} = a^{\overline{R}}$ (при $x=a$). Исследуется связь $a^{\overline{R}}(a)$ с нормами a и $a^{\overline{R}}$.

Д. П. Мильман

6746. О двух теоремах интегрирования Бурбаки. Ито, Сугаку, 1954, 6, № 2, 89—90 (японск.)

6747. О группах преобразований, сохраняющих меру. I. Дай (On groups of measure preserving transformations. I. Dye H. A.), Amer. J. Math., 1959, 81, № 1, 119—159 (англ.)

Пусть M — гиперстоунова алгебра (т. е. слабо замкнутое коммутативное кольцо в некотором гильбертовом пространстве) с положительным точным (т. е. $\lambda(x'x)=0$, $x\in M$ лишь при $x=0$) нормальным функционалом λ. Изучаются группы G автоморфизмов M, сохраняющих λ. Результаты аналогичны некоторым результатам теорий о факторах, в частности дается определение типа группы и аппроксимативно конечной группы и доказывается, что: 1) каждая группа, имеющая единственный образующий элемент аппроксимативно конечна, 2) каждая подгруппа аппроксимативной коммутативной группы аппроксимативно коммутативна; 3) каждая аппроксимативно коммутативная группа, имеющая счетное образующее множество, эквивалентна прямому произведению групп с двумя элементами; 4) пусть G—группа типа II и пусть M счетно над подкольцом элементов, инвариантных относительно G; тогда G содержит аппроксимативно коммутативную подгруппу с тем же подкольцом инвариантных элементов, что и G, и максимальную среди таких подгрупп. В заключение устанавливается, что существуют не аппроксимативно конечные группы G.

A. Guichardet

6748. Мультипликативный интеграл в группе Ли. **Чернявский И. Я.**, Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 4, 198—223

Указываются достаточное условие для существования мультипликативного интеграла в группе Ли и система дифференциальных уравнений для его вычисления. В первой части работы изучаются свойства мультипликативного интеграла в полугруппе с единицей и топологией Хаусдорфа. Дадим его определение в этом случае. Пусть задана однозначная функция сегмента $g(\Delta)$, определенная для сегментов Δ, содержащихся в отрезке $[a, b]$, и принимающая значения в полугруппе с единицей и топологией Хаусдорфа G. Каждому разбиению $a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ ставится в соответствие элемент $\prod_{i=1}^{n} g(\Delta_i)\in G$, где $\Delta_i=[t_{i-1}, t_i]$. Мультипликативным интегралом функции $g(\Delta)$ называется предел частично упорядоченной последовательности $\prod_{i=1}^{n} g(\Delta_i)$, когда максимальная длина Δ_i стремится к нулю. Он обозначается через $\prod_a^b g$. Если $a<b<c$ и существуют $\prod_a^b g$ и $\prod_b^c g$, то $\prod_a^c g$ существует и равен $\prod_a^b g$, $\prod_b^c g$. Поэтому для существования мультипликативного интеграла по любому сегменту $\Delta\subset[a, b)$ достаточно, чтобы он существовал для сегментов Δ, длины которых $|\Delta|<\delta$. Функция $g(\Delta)$ называется непрерывной, если для любой окрестности единицы полугруппы O_e, значения $g(\Delta)$ лежат в O_e для сегментов достаточно малой длины. Если G — числовая прямая, то производной от $g(\Delta)$ в точке x называется $\lim_{\Delta\to x} \frac{g(\Delta)}{|\Delta|}$. Запись $\Delta\to x$ означает, что концы Δ стремятся к x. Пусть G — группа Ли и пусть ${}^*O_e$ окрестность единицы, являющаяся прообразом шара в R^n радиуса ε_0 с центром в начале координат и такая, что ${}^*O_e{}^*O_e$ лежит в пределах координатизируемой окрестности e. Если $g(\Delta)$ непрерывна, то $g(\Delta)\in{}^*O_e$ при $|\Delta|<\delta$. В этом случае вместо $g(\Delta)$ можно рассматривать n функций $g^\alpha(\Delta)$ со значениями на числовой прямой, $g(\Delta)$ называется дифференцируемой, если $g^\alpha(\Delta)$ дифференцируема. Основной результат: если $g(\Delta)$ непрерывно дифференцируемая функция на $[a, b]$, то мультипликативный интеграл $\prod_a^b g$ существует и является непрерывно дифференцируемой функцией сегмента на $[a, b]$. В этом случае $\prod_{t_0}^{t} g([t_0, t]\subset[a, b]$, $0<t-t_0<\delta)$

удовлетворяет системе дифференциальных уравнений $\frac{\partial x_\alpha}{\partial t} = \left[\frac{\partial \varphi^\alpha(x,a)}{\partial u^\beta}\right]_{u=e} g^\beta(t)$, $x, u \in G$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n$, где $g^\beta(t)$ — производная $g^\beta(\Delta)$ в точке t, а функции $\varphi^\alpha(x, u)$ задают умножение в G в координатах. При этом, если частные производные $\varphi^\alpha(x, u$, ограничены на $[a, b]$ общей константой M, а $|g^\alpha(t)| \leqslant R$, то $\delta_0 \leqslant \frac{\varepsilon_0}{MR\sqrt{n}}$.

Автор отмечает, что результаты статьи можно использовать для нахождения индуцированной связности на поверхности, оснащенной в пространстве линейной аффинной связности. С. Г. Гиндикин

6749. О понятии энтропии динамической системы. Синай Я., Докл. АН СССР, 1959, 124, № 4, 768—771

В работах А. Н. Колмогорова (РЖМат, 1960, 637) определён новый метрический инвариант автоморфизма пространства Лебега — „энтропия на единицу времени", — позволивший установить существование метрически неизоморфных автоморфизмов со счётнократным лебеговским спектром. В реферируемой работе: 1) даётся усовершенствованное определение колмогоровского инварианта; 2) изучаются некоторые свойства нового инварианта; 3) вычисляется значение этого инварианта для произвольного эргодического автоморфизма двумерного тора. Пусть T — автоморфизм пространства Лебега M. Энтропия конечного разбиения A пространства M на измеримые множества $A_1, \ldots, A_n$ определяется известной формулой $H(A) = \sum_{t=1}^{n} \mu(A_t) \lg \mu(A_t)$. Из общих теорем теории информации следует существование предела

$$h_T(A) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} H(A \vee TA \vee \ldots \vee T^{k-1}A),$$

где $A \vee TA \vee \ldots \vee T^{k-1}A$ — самое крупное общее подразбиение разбиений $A, TA, \ldots, T^{k-1}A$. Конечная или бесконечная верхняя грань $h_T = \sup_A h_T(A)$ называется энтропией автоморфизма T. Доказываются:

Теорема 1. Если A и B — такие разбиения, что элементы разбиения B содержатся в замкнутой подалгебре алгебры S всех измеримых множеств пространства M, порождённой элементами разбиений T^nA, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, то $h_T(B) \leqslant h_T(A)$; в частности, если элементы разбиений T^nA, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, порождают всю алгебру S, то $h_T(A) = h_T$. (Несколько более общее предложение имеется в цитированной работе А. Н. Колмогорова, где рассматриваемые разбиения не предполагаются конечными).

Теорема 2. Если существует такое разбиение A, что алгебра S порождается элементами разбиений T^nA с $n \geqslant 0$, то $h_T = 0$.

Теорема 3. Для всякого автоморфизма T и всякого целого числа k справедливо равенство $h_{T^k} = |k| h_T$. На основании теорем 1 и 3 доказывается (доказательство приводится не полностью), что энтропия автоморфизма двумерного тора с действительными собственными значениями λ_1, λ_2, $|\lambda_1| > 1$, равна $\lg |\lambda_1|$. Без доказательства сообщается, что энтропия эргодического автоморфизма r-мерного тора с r действительными собственными значениями $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ равна $\sum_{|\lambda_t|>1} \lg |\lambda_t|$. Эта теорема представляет собой первый существенный шаг вперед в проблеме метрической классификации эргодических автоморфизмов тора.

Примечание референта. Можно показать, что энтропия h_T совпадает с колмогоровским инвариантом $h_1(T)$, если $h_1(T) < \infty$. Легко строятся неэргодические автоморфизмы, у которых $h_1(T) = \infty$, но $h_T < \infty$. Существуют ли эргодические автоморфизмы с этими свойствами — неизвестно. В. А. Рохлин

6750. Идемпотентные меры на абелевых группах. Рудин (Idempotent measures on abelian groups. Rudin Walter), Pacif. J. Math., 1959, 9, № 1, 195—209

Под мерой на локально компактной абелевой группе G понимается ограниченная счетно аддитивная комплексная функция, определенная на совокупности всех борелевских множеств в G. Мера μ называется идемпотентной, если $\mu * \mu = \mu$ ($*$ — знак свёртки). Работа посвящена проблеме описания всех идемпотентных мер на G. Преобразование Фурье — Стилтьеса меры μ есть некоторая функция φ, определенная на группе Γ характеров группы G. Мера μ идемпотентна в том и только в том случае, если φ есть характеристическая функция некоторого множества $S(\mu)$, $\varphi \subset \Gamma$, и, таким образом, рассматриваемая проблема эквивалентна проблеме описания всех множеств $S(\mu)$, т. е. всех множеств в Γ, характеристические функции которых являются преобразованиями Фурье — Стилтьеса. Автор доказывает, что идемпотентная мера всегда сосредоточена на компактной подгруппе группы G. Если сама группа G компактна, то все подгруппы группы Γ, все смежные классы по этим подгруппам и все элементы наименьшего кольца множеств, содержащего все эти смежные классы, являются множествами $S(\mu)$. Автор высказывает гипотезу, что верна и обратная теорема: все множества $S(\mu)$ принадлежат указанному кольцу. Он доказывает эту гипотезу для случая, когда G есть конечномерный тор или дискретная (т. е. конечная) группа. В примечании при корректуре сообщается, что уже после завершения работы эту гипотезу доказал Коэн (P. J. Cohen) для произвольной компактной группы G. Для случая, когда G есть окружность, проблема, изучаемая в работе, была ранее решена Хельсоном (РЖМат, 1955, 69?) В. А. Рохлин

6751. Предельное свойство средней волны в функциональной теории систем многих частиц. Дету ш (Propriété limite de l'onde moyenne en théorie fonctionnelle des systèmes de corpuscules. Destouches Jean-Louis), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 19, 2722—2724 (франц.)

Средняя волна u_M для части E системы, образованной частицами одного класса, определяется в нелинейной функциональной теории выражением

$$u_M(P, t) = \sum \frac{a(\{u_j\})}{a(E)} u_j(P, t),$$

где $a(E)$ — аддитивная функция, а функция u_j, представляющие частицы, предполагаются удовлетворяющими нелинейному уравнению $L_j u_j = a_j(u_j, \nabla)$ (Q_j — нелинейный член).

В частном случае, когда L_j не зависит от индекса j (например, частицы части E не зависят одна от другой), определены некоторые предельные свойства средней волны, которые могут быть сформулированы в виде следующей теоремы:

Если выполнены условия: 1) $|Q_j(u_j, \nabla)| < b$; 2) существуют множества $D(u_j, \varepsilon, t)$ точек P, для которых $|Q_j(u_j, \nabla)| > \varepsilon$ в момент времени t; 3) область R_n, содержащая n частиц, много больше по сравнению с $D(u_j, \varepsilon, t)$; 4) существуют сферы $S_a(t, \varepsilon, t)$, большая из которых содержит одно из множеств $D(u_j, \varepsilon, t)$;

5) центры сфер $S_n(i, \varepsilon, t)$ расположены в R_n случайно с равномерным распределением, — то с вероятностью порядка 1 — объем $D(u_j, \varepsilon, t)$/объем R_n — член Q_M средней волны u_M рассматриваемой части E системы ограничен произвольным ε, а средняя волна u_M с той же вероятностью удовлетворяет линейному уравнению $Lu_M = 0$.

Н. А. Тихонов

6752. Замечание о преобразовании Паули. Тоушек (A note on the Pauli transformation. Touschek B.), Nuovo cimento, 1959, 1, № 2, 394—404 (англ.; рез. итал.)

Рассматривается релятивистская квантовая „теория поля типа Гайзенберга" (т. т. Г.), определяемая несколькими постулатами и в том числе требованием инвариантности относительно преобразования Паули — Тоушека для операторов спинорного поля:

$$\psi(x) \to \exp(i\alpha\gamma_5)\,\psi(x). \qquad (1)$$

Доказывается теорема: Для того чтобы в т. т. Г. частица со спином $^1/_2$ могла иметь отличную от нуля массу покоя, она должна обладать хотя бы одной дополнительной (кроме спиновой) внутренней степенью свободы. Для описания связанного с этим вырождения в простейшем случае должны существовать два „асимптотических" спинорных поля $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, связанных с исходным полем $\psi(x)$ некоторыми предельными соотношениями. Показано, что законы преобразования φ_1 и φ_2, при преобразовании ψ согласно (1), существенно различны. Если, например, для φ_1 приняты также закон (1) и линейное соответствие между ψ и φ_1, то φ_2 должно преобразовываться по закону $\varphi_2 \to \exp(-i\alpha\gamma_5)\varphi_2$ и в силу этого соответствие между ψ и φ_2 не может быть линейным. Эти положения иллюстрируются на примере т. т. Г., основанной на нелинейном спинорном уравнении поля

$$\gamma_\mu\,\partial\psi/\partial x_\mu + l^2 i\gamma_5\gamma_\mu\,\psi(\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi) = 0.$$

П. И. Фомин

6753. К соотношению между фазой рассеяния и ограниченными состояниями. Покингхорн (A note on the relation between scattering phase and bound states. Polkinghorne J. C.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1958, 54, № 4, 560—561 (англ.)

Рассматривается гамильтониан $H = H_0 + V$, где H_0 — гамильтониан свободных частиц в задаче о рассеянии, а V — потенциал. Устанавливается, что фаза рассеяния $\delta(k)$ для S-состояний удовлетворяет при некоторых условиях, наложенных на V, соотношению $\delta(0) - \delta(\infty) = (n - m)\pi$. Здесь n и m — числа собственных состояний операторов H и H_0, соответствующих точечному спектру. Указанный результат обобщает результаты Левинсона (Levinson N. K., Danske Vidensk. Selsk. mat.-fys. Medd. 1949, 25, № 9) и Яуха (Jauch J. M., Helv. phys. acta., 1957, 30, 143).

М. С. Лившиц

6754. Об одном способе исследования законности метода Томонага промежуточной связи. Мандельбройт (Une méthode pour l'étude de la validité de la méthode du couplage intermédiaire de Tomonaga. Mandelbrojt Jacques), C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 13, 915—917 (франц.)

Используется неравенство Вейнштейна (Weinstein D. H., Proc. Nat. Acad. Sci., 1934, 20, 529)

$$|\langle\psi^*|H|\psi\rangle - E| \leqslant [\langle\psi^* HH\psi\rangle - \langle\psi^* H\psi\rangle^2]^{1/2},$$

где ψ — произвольная функция, E — ближайшее к $\langle\psi^* H\psi\rangle$ собственное число гамильтониана H, обладающего полной системой собственных функций.

Выясняется, что в простейшем случае скалярной теории нейтральных частиц приближение Томонага дает точное решение. В скалярной симметричной теории с учетом изотопического спина имеет место соотношение

$$\lim_{g\to\infty} \frac{E - E_T}{E} = 0$$

где E_T — приближение Томонага, g — константа связи,

М. С. Лившиц

6755 К. Обобщенные функции и действия над ними. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., М., Гос. изд-во физ.-матем. лит., 1958, 439 стр., илл., 13 р. 75 к.

Первый выпуск серии, выходящей под общей редакцией И. М. Гельфанда и содержащей систематическое изложение теории обобщенных функций и ряда примыкающих к ней вопросов математического анализа (в частности, дифференциальных уравнений), функционального анализа, теории представлений групп Ли и т. д.

Постановка вопросов и содержание гл. I („Определение и простейшие свойства обобщенных функций") в значительной степени заимствованы из книги Л. Шварца (РЖМат, 1 57, 6506К), однако одной из характерных черт главы (и всей книги) является то, что значительно большую, чем у Шварца, роль играет применение аналитического продолжения обобщенных функций по параметру. Рассматривается большое число конкретных интересных примеров обобщенных функций, в частности получающихся при регуляризации расходящихся интегралов и суммировании расходящихся рядов. Особенно подробно изучается регуляризация функций со степенными особенностями; детально исследуются также (впервые в настоящей книге) функции $(x \pm i0)^\lambda = \lim_{y\to\pm 0}(x+iy)^\lambda$. Далее указывается общая („каноническая") методика регуляризации функций, имеющих на каждом конечном интервале конечное число особенностей вида $\sum_k p_k(x)(x-\alpha)_\pm^{\lambda_k}$ (функция $p_k(x)$ бесконечно дифференцируемы); эта регуляризация однозначно определяется также некоторой естественной системой аксиом. В n-мерном пространстве исследуются регуляризация функции r^λ; в частности, рассматривается разложение ее на „плоские волны" вида $|\omega_1 x_1 + \ldots + \omega_n x_n|^\lambda$. Результаты исследования наиболее важных обобщенных функций конкретного вида сведены вместе (как и в других главах), что облегчает возможность применения книги в качестве справочника. Указано применение обобщенных функций к построению фундаментального решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, а также фундаментального решения задачи Коши для линейного уравнения с частными производными и постоянными коэффициентами. Первообразная любого комплексного порядка λ обобщенной функции $g(x)$, сосредоточенной на полуоси $x \geqslant 0$, определяется как свертка $g(x) * (\Gamma^{-1}(\lambda)\, x_+^{\lambda-1})$; многие специальные функции (в частности, гипергеометрическая, бесселевы и т. д.) являются производными дробного порядка от элементарных функций. В добавлениях рассматриваются локальные свойства обобщенных функций (по цитированной книге Шварца) и свойства обобщенных функций, зависящих от параметра.

В гл. II „Преобразования Фурье обобщенных функций" изложение следует статье авторов (РЖМат, 1955, 3291); авторы получают и исследуют преобразования Фурье целого ряда конкретных обобщенных функций, а также аналитических функционалов. В качестве простых приложений проведено построение с помощью преобразования Фурье фундаментальных решений полигармонического и волнового уравнений. Освещается также преобразование Лапласа, непосредственно связанное с преобразованием Фурье.

Гл. III „Обобщенные функции, сосредоточенные на поверхностях, и фундаментальные решения дифференциальных уравнений" начинается с определения (примененного уже в работе Гельфанда и Шапиро (РЖМат,

1957, 652)) обобщенной функции $\delta(P)$, где $P(x_1,\ldots,x_n)$ — произвольная достаточно гладкая функция, для которой $\operatorname{grad} P \neq 0$ при $P=0$. Далее вводятся „производные" обобщенные функции $\delta' P$, $\delta'' P$, ..., которые также можно представить в инвариантном интегральном виде; если в свою очередь $\delta(P)$ получается дифференцированием характеристической функции области $P \geqslant 0$, что дает возможность просто вывести формулу Грина. Рассчитан ряд примеров; так, $\delta^{((n-3)/2)}(r^2-t^2)$ в случае нечетного n дает фундаментальное решение задачи Коши для волнового уравнения. Рассматриваются также функционалы вида $\mu(x)\delta^{(k-1)}(P)$ (k — кратный слой на поверхности $P=0$ с плотностью μ). Аналогичными свойствами обладают функции $\delta(P_1,\ldots,P_k)$ и их производные вида $\partial^m/\partial P_1^{\alpha_1}\ldots\partial P_k^{\alpha_k}$, носителем которых служит $n-k$-мерное многообразие (без особых точек), определяемое уравнениями $P_1=0,\ldots,P_k=0$.

В гл. III изучаются фундаментальные решения линейных уравнений с частными производными и постоянными коэффициентами. Для эллиптических уравнений (любого порядка), а также для задачи Коши в случае ее корректности это делается так же, как в указанной статье Гельфанда и Шапиро. Подобно тому, как это делается для эллиптических уравнений, строится фундаментальное решение „однородных регулярных" уравнений вида $L(\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n)\,n=0$, т. е. таких уравнений, для которых многочлен $L(\omega_1,\ldots,\omega_n)$ однороден и $\operatorname{grad} L \neq 0$ при $L=0$, $\omega_1^2+\ldots+\omega_n^2>0$, однако это решение получается в виде интеграла по сфере $\Omega: \omega_1^2+\ldots+\omega_n^2=1$, у которого подинтегральная функция содержит L в знаменателе, что приводит к необходимости регуляризации этого интеграла (она осуществляется с помощью интегрирования по части Ω, в которой $|L|>\varepsilon$, причем $\varepsilon \to 0$).

Гл. IV „Однородные обобщенные функции" начинается с определения однородных и присоединенных однородных обобщенных функций, после чего рассматривается регуляризация однородных функций вида $f^\lambda(x)$ ($f>0$); здесь авторы следуют статье Гельфанда и Шапиро. (Отметим, в частности, исследование однородных обобщенных функций целой степени $\leqslant -n$, о котором не было упомянуто в реферате на указанную статью). Дополнительно рассматривается регуляризация функций вида $r^\lambda f$, где f — обобщенная функция, заданная на единичной сфере. Далее подробно изучаются некоторые важные обобщенные функции, связанные с квадратичной формой $P=x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_n^2$ ($1<p<n$). Идея этих исследований содержалась в работе И. М. Гельфанда и М. И. Граева (РЖМат, 1956, 6705), но основная для дальнейшего идея применения квадратичных форм с комплексными коэффициентами проводится в данной книге впервые. Прежде всего, доказывается, что обобщенная функция $(P_1 \pm iP_2)^\lambda$, где квадратичная форма P_1 произвольна, а P_2 положительно определена, будучи продолжена на всю плоскость λ, имеет простые полюсы при $\lambda=-n/2,\ -n/2-1,\ \ldots$, где вычеты вычисляются. На основании этого с помощью предельного перехода определяются и исследуются обобщенные функции $(P\pm i0)^\lambda$ и их преобразования Фурье; аналогично рассматриваются преобразования Фурье функций $(c^2+P\pm i0)^\lambda$, $(c^2+P)_\pm^\lambda$, $(c^2+P)_\pm^\lambda/\Gamma(\lambda+1)$ (при целых λ), $\delta(c^2+P)$ и т. д. Эти результаты применяются к отысканию фундаментального решения „полиультрагиперболического" уравнения $L^k u=0$, где $L=\partial^2/\partial x_1^2+\ldots+\partial^2/\partial x_p^2-\partial^2/\partial x_{p+1}^2-\ldots-\partial^2/\partial x_n^2$; например, если n нечетное или если $k<n/2$, таким решением служит

$$(-1)^k e^{\pm\pi(n-p)i/2}\,4^{-k}\pi^{-n/2}\,\Gamma(n/2-k)\,\Gamma^{-1}(k)\,(P\pm i0)^{-n/2+k}.$$

Рассматривается регуляризация произвольных функций в степени λ, что примерно соответствует § 4 цитированной статьи Гельфанда и Шапиро. Авторы отмечают, что отдельные пункты в книге написаны В. А. Боровиковым, Н. Я. Виленкиным, М. И. Граевым и З. Я. Шапиро. Книга глубоко оригинальна; в ней впервые систематически освещается ряд новых аспектов современной математики. Она будет полезна специалистам в различных областях математики, физики и смежных наук.

Примечание референта. Утверждения, набранные на стр. 34 и 43 курсивом, требуют простых дополнительных предложений. А. Д. Мышкис

Примечание редакции (Составлено по письму референта). Пример $\delta(x)+\delta'(x-1)+\delta''(x-2)+\ldots$ показывает, что утверждение на стр. 34 верно при дополнительном предположении о компактности носителя обобщенной функции. На стр. 43 надо дополнительно потребовать дважды непрерывную дифференцируемость функции f.

См. также: 6126, 6253, 6319, 6357, 6358, 6378, 6381, 6387, 6389, 6414, 6415, 6491, 6493, 6504, 6522, 6615, 6639.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Редакторы *Н. В. Смирнов, Н. Н. Воробьев*

6756. О характеристических функциях случайных величин со значениями в банаховом пространстве. Гетур (On characteristic functions of Banach space valued random variables. Getoor R. K.), Pacif. J. Math., 1957, 7, № 1, 885—896 (англ.)

Автор изучает соотношения между характеристическими функциями и распределениями в банаховых пространствах. Со всяким слабым распределением (под которым понимается согласованная система конечномерных распределений) в X связывается мера в пространстве, алгебраически сопряженном к исходному (т. е. в пространстве всех линейных функций на X). Указаны условия для конечномерных распределений, чтобы мера была задана в сопряженном пространстве X^*, аналогичные так называемой лемме Ерохина (РЖМат, 1959, 7177). С их помощью выводятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы предел последовательности характеристических функций был характеристической функцией. К сожалению, отнесение слабого распределения к X, а меры к X^* вызывает усложнение формулировок и неестественные предположения, вроде рефлексивности X. И. В. Гирсанов

6757. Комбинаторная задача и ее приложение к теории вероятностей. I. Нараяна (A combinatorial problem and its application to probability theory. I. Narayana T. V.), J. Indian Soc. Agric. Statist., 1955, 7, № 1-2, 169—178 (англ.)

Пусть дано k множеств шаров; i-е множество состоит из a_i шаров ($i = 1,2,\ldots,k$). Каждому множеству шаров ставится в соответствие упорядоченное множество из r ящиков; r ящиков, соответствующих i-му множеству шаров, перенумеруем $i_1, i_2, \ldots, i_r$ ($i = 1,2,\ldots,k$). Предположим, что $a_i \geqslant r$ для всех i.

Пусть далее даны $k-1$ неотрицательных чисел $L_1, L_2, \ldots, L_{k-1}$, удовлетворяющих условиям: $a_i + L_i \geqslant a_{i+1}$ ($i = 1,2,\ldots,k-1$).

Распределим каждое множество шаров в соответствующее множество ящиков так, чтобы ни один ящик не остался пустым, и так, чтобы дополнительно удовлетворялись условия:

$$t_1^{(i)} + t_2^{(i)} + \ldots + t_s^{(i)} + L_i \geqslant t_1^{(i+1)} + t_2^{(i+1)} + \ldots + t_s^{(i+1)},$$
$$s = 1,\ldots,r,\ i = 1,\ldots,k-1, \qquad (1)$$

где $t_1^{(i)},\ldots,t_r^{(i)}$ — число шаров i-го множества в ящиках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$.

Показывается, что число способов такого распределения k множеств шаров в соответствующие множества ящиков дается в виде некоторого определителя k-го порядка. Особо рассматривается случай $k = 2$, причем $a_1 = a_2 = n$, $L_1 = L$. Соотношения (1) принимают в этом случае следующий вид:

$$t_1^{(1)} + \ldots + t_s^{(1)} + L \geqslant t_1^{(2)} + \ldots + t_s^{(2)},\ n + L \geqslant n, \qquad (2)$$

$s = 1,\ldots,r-1$, где $t_1^{(1)} + \ldots + t_r^{(1)} = t_1^{(2)} + \ldots + t_r^{(2)} = n$.

Тогда, если $(t_1^{(1)},\ldots,t_r^{(1)})$ и $(t_1^{(2)},\ldots,t_r^{(2)})$ суть разбиения целого числа n на r слагаемых, то при выполнении условий (2) говорят, что разбиение $(t_1^{(1)},\ldots,t_r^{(1)})$ „L-доминирует" над разбиением $(t_1^{(2)},\ldots,t_r^{(2)})$.

Если в соотношениях (2) всюду поставить знаки строго неравенства (исключая последнюю строчку) и положить $L = 0$, то полученные соотношения могут соответствовать рекуррентным событиям Феллера для бросания монеты до первого возвращения к равновесию (Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложение, 1952 г.).

Примечание референта. В работе имеются опечатки: 1) на стр. 175, 14-я строка снизу, вместо $L > 0$ должно быть $L < 0$; 2) на той же странице, 5-я строка снизу, вместо $p_1, p_2, \ldots, p_{\binom{n-1}{r-1}}$ должно быть $p_1, p_2, \ldots, p_{\binom{m-1}{r-1}}$.

В. Н. Сачков

6758. Неполные моменты трехмерного нормального распределения. Камат (Incomplete moments of the trivariate normal distribution. Kamat A. R.), Санкия, Sankhya, Indian J. Statist., 1958, **20**, № 3-4, 321—322 (англ.)

В небольшой заметке приводятся формулы для неполных моментов (РЖМат, 1954, 1734) трехмерного нормального распределения, выраженные через коэффициенты корреляции.

Р. Х. Дивеев

6759. О характеризации безгранично делимых законов распределения. Бёге (Über die Charakterisierung unendlich teilbarer Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Böge Werner), J. reine und angew. Math., 1959, **201**, № 3—4, 150—156 (нем.)

В статье распространяются некоторые результаты референта (РЖМат, 1955, 1858) на случай произвольных конечных групп; доказывается, что для замкнутости относительно композиции множества безграничных делимых законов (б. д. з.) на группе G, необходима и достаточна коммутативность G, а также устанавливается критерий однозначного представления характеристической функции (х. ф.) б. д. з. в экспоненциальной форме.

Примечание референта. Указываемые автором случаи неоднозначного представления х. ф. б. д. з. в экспоненциальной форме не противоречат теореме референта об однозначном представлении некоторого значения логарифма х. ф. б. д. з. Утверждение автора о таком противоречии основано, по-видимому, на том, что он упустил из виду многозначность логарифма.

Н. Н. Воробьев

6760. Несколько теорем о суммах положительных случайных величин. Мотоо (Some theorems on the sum of positive random variables. Motoo Minoru), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, **7**, № 3, 169—181 (англ.)

Назовем последовательность $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $s_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ и $\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_n \ldots$ — положительные и независимые случайные величины с одной и той же функцией распределения $F(x)$ и не имеющие математического ожидания, устойчивой, если существует последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ — положительных монотонно возрастающих чисел такая, что

$$F^{(n)}(xc_n) \to G(x),\ n \to \infty,$$

где $F^{(n)}(x)$ — n-кратная свертка функции распределения $F(x)$ и $0 < G(x_0) < 1$ для некоторого $x_0 > 0$, причем случай, что $\lim_{x\to\infty} G(x) < 1$, допускается. Устойчивость $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ влечет существование предела

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{[n\lambda]}}{c_n} = \mu \leqslant \infty$$

для любого $\lambda > 1$. Случай $\mu < \infty$ полностью решен (Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.-Л., 1949, §§ 28, 35). Для случая $\lim_{n\to\infty} c_{n\lambda}/c_n = \infty$ автор приводит некоторые предельные теоремы, дающие необходимые и достаточные условия устойчивости.

Примечание референта. Необходимо заметить, что часть сведений, сообщаемых теоремой 2, содержится в более ранней работе (Darling D. A., Trans. Amer. Math. Soc. 1952, **73**, 107).

Б. А. Рогозин

6761. Броуновское движение в пространстве Грина. Дуб (Brownian motion on a Green space. Doob J. L.), Теория вероятностей и ее применения, 1957, **2**, № 1, 3—33 (англ.; рез. русск.)

Статья посвящена изучению броуновского движения в локально евклидовом пространстве R, которое называется пространством Грина. Автор переносит на этот случай ряд своих ранних результатов (РЖМат, 1957, 664; 1454) и результаты Ханта (РЖМат, 1960, 1902). В §§ 2, 3 вводится определение процесса, обрывающегося в случайный момент времени τ; соответствующие определения даются для случая марковского процесса x_t. Новым является предположение измеримости x_t относительно системы σ-алгебр $F(t)$, $F(s) = F(t)$, $t > s$, вообще говоря, отличных от минимальных σ-алгебр, относительно которых x_t измерим.

Броуновский процесс в пространстве Грина определяется как процесс, локально изометричный броуновскому движению (с дисперсией, постоянной для всех точек пространства). Доказывается существование и единственность этого процесса, существование и некоторые свойства плотностей $p(t, \xi, \eta)$ для его переходных вероятностей (симметричность, характер особенности при $t = 0$, существование нулевого предела у $p(t, \xi, \eta)$ при $t \to \infty$).

Методами, примененными автором в более ранних работах, исследуется круг вопросов, связанных с решением

задачи Дирихле, связь с мартингалами. Пространство называется имеющим нулевую границу, если всякая ограниченная субгармоническая функция есть постоянная, и имеющим положительную границу в противном случае.

В первом случае доказывается, что $\tau = \infty$; при этом почти всякая траектория броуновского движения всюду плотна на R (и нигде не плотна в случае положительной границы).

С помощью формулы $g(\xi, \eta) = \int_0^\infty p(t, \xi, \eta)\, dt$ вводится функция Грина и исследуются ее свойства. Наряду с пространством Грина, автор изучает также тепловое движение, фазовым пространством которого являются подмножества прямого произведения пространства R на прямую линию, и доказывает для него ряд эквивалентных предложений. И. В. Гирсанов

6762. О дискретных переменных, сумма которых абсолютно непрерывна. Блэкуэлл (On discrete variables whose sum is absolutely continuous. Blackwell David), Ann. Math. Statistics, 1957, 28, № 2, 520—521 (англ.)

Пусть $\{Z_n\}$, $n = 1,2,\ldots$, — стационарный стохастический процесс с D состояниями $0,1,\ldots, D-1$ и $X = \sum_1^\infty Z_n/D^n$. Гаррис (РЖМат, 1960,3-65) показал, что распределение X абсолютно непрерывно тогда и только тогда, когда Z_n независимы и равномерно распределены по $0, 1,\ldots, D-1$, т. е. тогда и только тогда, когда распределение X равномерно на единичном интервале. В статье показывается, что если $\{Z_n\}$, — стохастический процесс с D состояниями $0, 1,\ldots, D-1$, такой, что $X = \sum_1^\infty Z_n/D^n$ имеет абсолютно непрерывное распределение, то условное распределение $R_k = \sum_{n=1}^\infty \times Z_{k+n}/D^n$ при заданных $Z_1, \ldots, Z_k$ сходится к равномерному распределению на единичном интервале с вероятностью 1, когда $k \to \infty$. Следовательно, безусловное распределение R_k сходится к равномерному распределению, когда $k \to \infty$. Отсюда следует и результат Гарриса, так как если $\{Z_n\}$ — стационарный процесс, то распределение R_k не зависит от k. Резюме автора

6763. К построению Леви винеровского процесса. Такано (Takano Kinsaku), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1954, 2, № 1, 31—36 (японск.; рез. англ.)

Цель статьи — придать логическую ясность построению Леви винеровского процесса (Lévy P., Processus stochastique et mouvement brownien, Paris, 1948). Пусть $\xi(1)$, $\xi(1/2)$, $\xi(1/4)$, $\xi(3/4)$, $\xi(1/8)$, $\xi(3/8)$, $\xi(5/8)$, $\xi(7/8)$, $\xi(1/16),\ldots, \xi(15/16),\ldots$ — независимые случайные величины, каждая из которых распределена нормально $(0, 1)$. Пусть $x(0) = 0$, $x(1) = \xi(1)$,

$$x\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left\{x(0) + x(1)\right\} + \frac{1}{2}\xi\left(\frac{1}{2}\right),\ldots,$$

$$x\left(\frac{h}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\left\{x\left(\frac{h-1}{2^n}\right) + x\left(\frac{h+1}{2^n}\right)\right\} + \frac{1}{2^{(n+1)/2}}\xi\left(\frac{h}{2^n}\right),\quad h = 1,3,\ldots, 2^n-1,\ n = 1,2,\ldots$$

Пусть $f_n(t)$, $n = 1,2\ldots$, определена следующим образом:

$$f_n\left(\frac{k}{2^n}\right) = x\left(\frac{k}{2^n}\right),\ k = 0,1,\ldots, 2^n,$$

в интервале $\left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$, $k = 1,2,\ldots, 2^n$, $f_n(t)$ линейна. Тогда с вероятностью 1 $f_n(t)$ стремится к непрерывной функции $x(t)$ равномерно в $0 \leqslant t \leqslant 1$ при $n \to \infty$ и множество случайных величин $\{x(t); 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ является винеровским процессом. Резюме автора

6764. Локальная предельная теорема для цепи Маркова с непрерывным временем. Сираждинов С. Х. УзССР Фанлар Акад. ахбороти. Физ.-матем. фанлари сер., Изв. АН УзССР. Сер. физ.-матем. н., 1958, № 6, 83—86 (рез. узб.)

Пусть $\eta(t) = (\eta^1(t), \ldots, \eta^s(t))$ — центрированный и нормированный вектор продолжительности пребывания в состояниях $e_1, \ldots, e_s$; $W_\gamma(t, X)$ — функция плотности, соответствующая абсолютной непрерывной компоненте (а. н. к.) функции распределения $\eta(t)$ при условии, что в начальный момент система была в E_γ. При выполнении условия (А) А. Н. Колмогорова получено асимптотическое разложение для $W_\gamma(t, X)$. Получено также асимптотическое разложение для плотности а. н. к. функции распределения величины $h_1\xi^1(t) + \ldots + h_s\xi^s(t)$, где $\xi^l(t)$ — время пребывания в состоянии L_l; h_l — числа, среди которых имеется хотя бы два различных. А. М. Каган

6765. Многомерная задача экстраполяции. Розенблатт (A multi-dimensional prediction problem. Rosenblatt Murray), Arkiv mat., 1958, 3, № 5, 407—424 (англ.)

Рассматривается задача экстраполяции m-мерного стационарного процесса $\mathbf{X}_t$ с дискретным временем, у которого спектральная матрица $F(\lambda)$ абсолютно непрерывна. Пусть $\mathbf{X}_t^*$ — прогноз величины $\mathbf{X}_t$, использующий значения $\mathbf{X}_\tau$ при $\tau = t-1$, $t-2,\ldots$ Показано, что для того чтобы ковариационная матрица $M(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^*) \times (\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^*)$ была положительна, достаточно, чтобы $F'(\lambda)$ была непрерывна и несингулярна для всех λ; для того же необходимо, чтобы существовал $\int_{-\pi}^{\pi} \log\det F'(\lambda)\, d\lambda$ (результат Засухина; РЖМат, 1959, 10208).

Пусть

$$F'(\lambda) = \begin{pmatrix} f_1(\lambda) & f_2(\lambda) \\ \overline{f_2}(\lambda) & f_1(\lambda) \end{pmatrix}$$

При некоторых предположениях, например, когда $f_2(\lambda)$ вещественна и когда $f_2(\lambda)$ — чисто мнимая, получены явные выражения для матрицы $M(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^*)(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_t^*)$. В качестве примера приводится модель, описывающая движение волн на поверхности океана.

М. И. Фортус

6766. Энтропия и дисперсия. Адам (Entropie und Streuung. Adam A.), Metrika, 1958, 1, № 2, 99—110 (нем.)

Аксиоматически определяется дисперсия последовательности случайных величин по аналогии с рекуррентным аксиоматическим введением энтропии по Фаддееву.

Б. С. Флейшман

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

6767. О распределении суммы положительных или отрицательных отклонений от среднего в выборке, извлеченной из нормальной совокупности. Сиотани (Shiotani Minoru), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1954, 2, № 1, 63—74 (японск., рез. англ.)

Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ упорядоченная выборка из нормальной совокупности $(0, \sigma)$; $\overline{\overline{x}}(\overline{x})$ — среднее наблюдений, меньших (больших), чем выборочное среднее $\overline{x}$;

$$U_n = \overline{\overline{x}} - \overline{x}, \quad T_n = \overline{x} - \overline{\overline{x}}.$$

Автор находит распределения статистики U_n и T_n. Приводятся таблицы эффективностей U_n- и T_n-оценок для стандартного отклонения σ, а также таблицы коэффициентов несмещенности этих оценок. Резюме автора

6768. Метод определения объема исходной выборки в процедуре двух выборок Штейна. Мошман (A method for selecting the size of the initial sample in Stein's two sample procedure. Moshman Jack), Ann. Math. Statistics, 1958, 29, № 4, 1271—1275 (англ.)

Рассматривается двухвыборочная процедура, используемая при получении доверительного интервала для м. о. нормальной генеральной совокупности. Пусть необходимо построить доверительный интервал длины $2L$, надежность которого задается доверительным коэффициентом $1-\alpha$. Осуществляется исходная выборка $\{x_l\}$ объема N_0. Пусть $S^2 = \sum(x_l - \bar{x})^2/(N_0 - 1)$; $t_{n,\gamma}$ — высшая $100\cdot\gamma$-процентная точка S-распределения с n степенями свободы; $z = L^2/t^2_{N_0-1,1-\alpha/2}$. Тогда общий объем выборки определяется из соотношения $N = \max\left(\left[\frac{S^2}{z}\right] + 1; N_0\right)$

В статье производится анализ характеристик распределения случайной величины N, и даются рекомендации по рациональному выбору объема N_0 исходной выборки. Л. Н. Куцев

6769. Интерпретация статистики χ_2 критерия независимости. Сиотани (Siotani Minoru), Токэй сури кэнкюсё ихо. Proc. Inst. Statist. Math., 1955, 3, № 1, 27—31 (японск.; рез. англ.)

Разбиение χ^2 по двухстрочной таблице связностей было осуществлено Ланкастером (Lancaster H. O., Biometrika, 1949, 36, 117—129). С помощью такого разбиения и распространения его на трехстрочные таблицы и выше автор получает истолкование χ^2-статистики. Резюме автора

6770. Графические методы статистического вывода. IV. Смесь частиц двух родов. Масуяма (Graphical method of statistical inference. IV. Mixing ratio of particles of two kinds. Masuyama Motosaburo. Repts Statist. Appl. Res. Union Japan. Sci. Engrs, 1953, 3, 1—2) (англ.)

Часть III см. Repts. Statist. Appl. Res. Union Japan. Sci. Engrs, 1952, 1, № 4, 1—6. Описывается метод, использующий биномиальную вероятностную бумагу (там же, 1951, 1, № 2, 15—22), для выборочной оценки относительных пропорций объектов двух родов в смеси. Указываются бактериологические приложения. T. E. Harris

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 2, 154.

6771. Графические методы статистического вывода. V. О гамма-распределении и связанных с ним задачах. Масуяма (Graphical method of statistical inference. V. On a gamma distribution and related problems. Masuyama Motosaburo. Repts Statist. Appl. Res. Union Japan. Sci. Engrs, 1953, 3, 3—5) (англ.)

Автор указывает дальнейшие применения биномиальной вероятностной бумаги (Repts Statist. Appl. Res. Union Japan. Sci. Engrs, 1951, 1, № 2, 15—22): 1) аппроксимация процентных точек гамма-распределений; 2) построение доверительных интервалов для дисперсии в нормальной совокупности; 3) проверка гипотез относительно неизвестной дисперсии нормального распределения. T. E. Harris

Перевод из Math. Revs, 1955, 16, № 2, 154.

6772. Одна формулировка группового и факторного анализа. Трайон (Domain sampling formulation of cluster and factor analysis. Tryon Robert C.), Psychometrika, 1959, 24, № 2, 113—135 (англ.)

Рассматривается задача об определении по системе данных о реакциях на воздействия $X_1, X_2, \ldots, X_n$ наименьшего числа k величин, воспроизводящих имеющиеся между исходными величинами взаимодействия. Приводится многоступенчатая схема решения этой задачи. Изучаются специальные случаи многомерного анализа: групповой и факторный анализ. В. В. Петров

6773. Оценка параметров системы линейной регрессии, подчиненной двум различным режимам. Куондт (The estimation of the parameters of a linear regression system obeying two separate regimes. Quandt Richard E.), J. Amer. Statist. Assoc., 1958, 53, № 284, 873—880 (англ.)

Пусть даны соотношения

$$y = a_1 x + b_1 + u_1, \qquad (1)$$

$$y = a_2 x + b_2 + u_2, \qquad (2)$$

характеризующие два различных режима системы, где u_1 и u_2 — независимые нормально распределенные $(0, \sigma)$ и $(0, \sigma_2)$ соответственно ошибки. Производится T последовательных независимых наблюдений. Предполагаем, что первые t наблюдений порождены (1), а последующие $T - t$ порождены ( ). В работе приводится метод оценки положения единственной точки переключения t, основанный на исследовании соответствующей функции правдоподобия. Рассмотрены также два критерия для оценки гипотезы, что не имеется точек переключения при альтернативной гипотезе, что имеется ровно одна точка переключения. Л. Н. Куцев

6774. Простые бета-приближения для H-критерия Краскала—Уоллеса. Уоллес (Simplified beta-approximations to the Kruskal — Wallis H test. Wallace David L.), J. Amer. Statist. Assoc., 1959, 54, № 285, 225—230 (англ.)

Приводятся три приближения для модифицированной H-статистики Краскала — Уоллеса. Л. Я. Савельев

6775. Карты 10% и 50% точек кривых оперативной характеристики для фиксированных эффектов F-теста в анализе дисперсии, $\alpha = 0{,}01$ и $0{,}05$. Данкан (Chats of the 10% and 50% points of the operating characteristic curves for fixed effects analysis of variance F tests, $\alpha = 0.01$ and 0.05. Duncan Acheson J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1957, 52, № 279, 345—349 (англ.)

Рассматривается некоторая квадратичная форма φ^2, которая для простого плана анализа дисперсии с c столбцами и r рядами в каждом столбце определяется формулой $\varphi^2 = r\sum_j \theta_j^2/c\sigma^2$, где σ^2 — экспериментальная или остаточная дисперсия, θ_j — наблюденные значения исследуемого признака. Приводятся две карты, первая из которых дает значение φ для значения $\beta = 0{,}10$ и $0{,}50$ и для различных значений степеней свободы f_1 и f_2 при данном $\alpha = 0{,}05$, где β — ордината кривой оперативной характеристики, т. е. β представляет собой вероятность принять нулевую гипотезу. Вторая карта дает те же значения φ для $\alpha = 0{,}01$. Даются также различные виды φ^2 в зависимости от формы моделей дисперсионного анализа (двустрочный план дисперсионного анализа и латинский квадрат $r \times n$). Для данных значений f_1 и f_2 из этих карт без труда можно найти значение φ, для которого вероятность принять нулевую гипотезу равна 0,10 или 0,050. Указывается, что при помощи этих карт можно решать и обратную задачу. М. К. Камалов

6776. Приемы линейного программирования для регрессионного анализа. Уагнер (Linear programming techniques for regression analysis. Wagner Harvey M.), J. Amer. Statist. Assoc., 1959, 54, № 285, 206—212 (англ.)

Описывается, как с помощью линейного программирования можно решить задачи нахождения гиперплоскостей p-мерного пространства, обладающих одним из

следующих свойств: а) сумма абсолютных отклонений k заданных точек p-мерного пространства от гиперплоскости минимальна; б) минимален максимум отклонения этих же точек от гиперплоскости. С. С. Кислицын

6777. Анализ экспериментов в парных сравнениях. **Ура Сёдзи,** Хинсицу канри, Statist. Quality Control, 1959, **10**, № 2, 78—80 (японск.)

6778. Приложение факторного анализа к исследованию производительности. Асорин-Поч (Un diseño factorial aplicado al estudio de la productividad. Azorin Poch F.), Trab. estadist., 1955, **6**, № 2, 155—162 (исп.)

Элементарная статья.

6779. Предельная теорема для эмпирических функций распределения. Фиш (A limit theorem for empirical distribution functions. Fisz M.), Bull. Acad. polon. sci., 1957, cl. 3, **5**, № 7, 695—698 (англ.; рез. русск.)

Рассматривается обобщение известного непараметрического критерия Н. В. Смирнова однородности двух выборок на случай k ($k \geqslant 3$) выборок. Для проверки гипотезы однородности трех выборок предлагается использовать распределения следующих функционалов:

$$A^{+}_{n_1n_2n_3} = \max_x Y_{n_1n_2n_3}(x); \quad A_{n_1n_2n_3} = \max_x |Y_{n_1n_2n_3}(x)|;$$

$$B^{+}_{n_1n_2n_3} = \max_x Z_{n_1n_2n_3}(x); \quad B_{n_1n_2n_3} = \max_x |Z_{n_1n_2n_3}(x)|,$$

где

$$Y_{n_1n_2n_3}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1+\frac{1}{n_1}\sqrt{n_{12}n_{13}}}}\left\{\sqrt{n_{12}}[S_1(x)-S_2(x)]+\right.$$

$$\left.+\sqrt{n_{13}}[S_1(x)-S_3(x)]\right\},$$

$$Z_{n_1n_2n_3}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\frac{1}{n_1}\sqrt{n_{12}n_{13}}}}\left\{\sqrt{n_{12}}[S_1(x)-S_2(x)]-\right.$$

$$\left.-\sqrt{n_{13}}[S_1(x)-S_3(x)]\right\}.$$

Здесь $n_{ij} = \frac{n_i n_j}{n_i + n_j}$ $(i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$; n_j и $S_j(x)$ обозначают соответственно численность и эмпирическую функцию распределения j-й выборки ($j = 1, 2, 3$). Сформулирована следующая.

Теорема 1. При условии, что

$$\lim_{n_1\to\infty} \frac{n_j}{n_1} = a_j \quad (j = 2, 3)$$

I. Для любых положительных чисел a и b имеют место соотношения:

$$\lim_{n_1\to\infty} P\left\{A^{+}_{n_1n_2n_3} < a, B^{+}_{n_1n_2n_3} < b\right\} = \left(1-e^{-2a^2}\right)\left(1-e^{-2b^2}\right),$$

$$\lim_{n_1\to\infty} P\left\{A_{n_1n_2n_3} < a, B_{n_1n_2n_3} < b\right\} = Q(a)\,Q(b),$$

где $Q(\lambda)$ — функция, найденная А. Н. Колмогоровым, определяется формулой

$$Q(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2}.$$

II. Имеем для каждого $\lambda > 0$:

$$\lim_{n_1\to\infty} P\left\{\max\left(A^{+}_{n_1n_2n_3}, B^{+}_{n_1n_2n_3}\right) < \lambda\right\} = \left(1-e^{-2\lambda^2}\right)^2,$$

$$\lim_{n_1\to\infty} P\left\{\max\left(A_{n_1n_2n_3}, B_{n_1n_2n_3}\right) < \lambda\right\} = [Q(\lambda)]^2.$$

Аналогичные соотношения имеют место для $k > 3$ (см. теорему 2). Утверждается, что доказательство теорем сводится (на основании идеи Дуба) к нахождению распределения функционалов от соответствующего гауссовского процесса. Замечена опечатка: правые части формул (11) и (12) должны быть переставлены. В. С. Королюк

6780. Предельная теорема для эмпирических функций распределения. Фиш (A limit theorem for empirical distribution functions. Fisz M.), Studia math., 1958, **17**, № 1, 72—77 (англ.)

Излагается доказательство теоремы, сформулированной ранее автором (реф. 6779). В. С. Королюк

6781. Эффективность критерия «рекордов» для проверки тренда в нормальной регрессии. Стюарт (The efficiency of the records test for trend in normal regression. Stuart Alan), J. Roy. Statist. Soc., 1957, **B19**, № 1, 149—153 (англ.)

Определяется относительная асимптотическая эффективность (о. а. э.) критерия «рекордов», предложенного автором и Фостером (РЖМат, 1955, 5191) для проверки тренда. В случае нормальной регрессии этот критерий имеет нулевую о. а. э. по сравнению с критериями ранговой корреляции и ранговой серийной корреляции. Однако два других простых критерия имеют нулевую о. а. э. относительно критерия «рекордов». Б. А. Севастьянов

6782. О дисперсиях и ковариациях оценок коэффициентов регрессии. Тёрнквист (Regressiokertoimien estimaattien variansseista ja kovariansseista. Törnqvist Leo), Arkhimedes, 1959, № 1, 17—20 (финск.)

Пусть $\varepsilon_t = \eta_t - \alpha x_t$ $(t = 1, \ldots, n)$ — стационарный автокоррелированный процесс со средним нуль и конечной дисперсией, x_t — заданная неслучайная последовательность. Вычислена дисперсия оценки наименьших квадратов для α по наблюденной выборке значений ε_t и η_t. Результат обобщен на случай стационарного процесса $\varepsilon_t = \eta_t - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{jt}$, где x_{jt} — заданные последовательности. Вычислены дисперсии и ковариации оценок наименьших квадратов для коэффициентов регрессии α_j. Автор указывает, что аналогичные результаты получены Вольдом в 1950 г. А. П. Хусу

6783. О статистическом контроле процесса разрывов. Акаикэ (On the statistical control of the gap process. Akaike Hirotugu), Ann. Inst. Statist. Math., 1959, **10**, № 3, 233—259 (англ.)

Под процессом разрывов автор подразумевает стационарный (в узком смысле) процесс X_n $(-\infty < n < \infty)$ с дискретным параметром, принимающий значения 0 и 1 и удовлетворяющий следующему условию. Предполагается существование такого дискретного вероятностного распределения со скачками величины $p_k - p_{k-1} \geqslant 0$ при $k = 1, 2, \ldots$, что $L = \sum_{n=1}^{\infty} n p_n < \infty$ и

$$P\{X_l = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant k\} = \frac{1}{L}\sum_{l>k}\sum_{n>l} p_n,$$

а для любого набора целых чисел $1 \leqslant n_1 < n_2 \ldots < n_r < k$

$$P\left\{X_{n_l} = 1,\ X_l = 0,\ i \neq n_l,\ 1 \leqslant l \leqslant k\right\} =$$

$$= \frac{1}{L}\left(\sum_{n<n_1} p_n\right) p_{n_2-n_1} p_{n_3-n_2} \cdots p_{n_r-n_{r-1}} \left(\sum_{n>k-n_r} p_n\right).$$

Изучаются асимптотические свойства оценок некоторых характеристик рассматриваемых процессов, получаемых эмпирическим путем. Приведены численные примеры и практические советы для применения излагаемой теории. М. Г. Шур

6784. ω^2-критерий в стационарном стохастическом процессе. Кадзами (Kazami Akiko), Токэй сугаку кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1954, **2**, № 1, 43—47 (японск.; рез. англ.)

Для проверки гипотез о функции распределения непрерывного стационарного стохастического процесса применяется метод, аналогичный ω^2-критерию в случае дискретных независимых величин. Этот метод часто позволяет избегать ошибок, которые присущи при прибиженном использовании классического ω^2-критерия.

Резюме автора

6785. Достаточность и статистические решающие функции. Бахадур (Sufficiency and statistical decision functions. Bahadur R. R.), Ann. Math. Statistics, 1954, **25**, № 3, 423—462 (англ.)

Статья представляет критический обзор абстрактного изучения достаточных статистик, начатое П. Р. Халмошем и референтом (Ann. Math. Statistics, 1949, **20**, 225—241) и продолженное другими авторами.

Автор ставит две основные задачи: 1) показать, что применение достаточных статистик в статистической методологии (см. цитированную выше работу) оправдывается в очень общих условиях; 2) распространить это положение на последовательные эксперименты. Для первой задачи оказывается достаточно, чтобы пространство решений (не выборочное) являлось σ-изоморфным борелевской прямой (что совсем не является ограничением на практике). Для второй задачи, где решение продолжить наблюдение принадлежит к совокупности возможных решений (если достаточная статистика должна удовлетворять предъявленным к ней требованиям вообще) достаточно, чтобы указанное условие выполнялось не только для неизвестных параметров, но и для будуших наблюдений. Автор четко формулирует это дополнительное условие, исследует и упрощает его. Отмечается, что оно автоматически выполняется в случае последовательных независимых наблюдений (что обычно имеет место на практике). По-новому освещаются минимальные достаточные статистики и относительная роль статистики и ее подполя. Обсуждается возможная патология и способы ее устранения. L. J. Savage

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 2, 154.

6786. Упрощенные решающие функции. Барнар (Simplified decision functions. Barnard G. A.), Biometrika, 1954, **41**, 241—251 (англ.)

Хотя автор утверждает, что его результаты косвенно связаны с результатами Вальда, они фактически представляют специальные случаи последних. Так, например, автор заново доказывает один случай хорошо известной теоремы подразделения для конечномерных выпуклых множеств. Автор также неверно думает, что в его утверждениях относительно известного уравнения Вальда содержится что-либо новое (см. Sequential analysis, N.-Y., Wiley, 1947, 196). Единственно новым содержанием статьи является точка зрения автора, что «вывод» и «решение» должны разделяться в статистических задачах; однако точная формулировка целей статистической задачи отсутствует. J. Kiefer

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 973.

6787. Многошаговые статистические решающие процедуры. Гиршик, Карлин, Ройден (Multistage statistical decision procedures. Girshick M. A., Karlin S., Royden H. L.), Ann. Math. Statistics, 1957, **28**, № 1, 111—125 (англ.)

Рассматривается задача нахождения байесовских решений для распределения экспоненциального типа, т. е. распределений вида $P(x \mid \omega) = \beta(\omega) \int_{-\infty}^{x} e^{t\omega} d\mu(t)$, где $\omega \in \Omega$ (Ω — интервал на вещественной прямой), а μ — некоторая (σ-конечная) мера на прямой линии. Сумма n одинаково распределенных независимых случайных величин экспоненциального типа z_n является достаточной статистикой. Распределение этой суммы

$$P_n(z_n \mid \omega) = [\beta(\omega)]^n \int_{-\infty}^{z_n} e^{t\omega} d\mu_n(t).$$

Рассматривается случай, когда возможны два решения и существует такое ω_0, что убыток $L(i, \omega)$ удовлетворяет неравенству

$$L(1, \omega) < L(2, \omega) \quad \text{для} \quad \omega < \omega_0 \quad \text{и}$$
$$L(1, \omega) > L(2, \omega) \quad \text{для} \quad \omega > \omega_0.$$

Производится n наблюдений и после каждого k-го наблюдения находится решение с учетом всех предыдущих наблюдений, т. е. определяется вероятность $\varphi_k(z_k)$, с которой на k-м шаге выберут первое решение, если значение достаточной статистики равно z_k. При этом риск равен

$$\rho_k(\varphi_k \mid \omega) = [\beta(\omega)]^k \int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega z_k} [\varphi_k(z_k) L(1, \omega) + (1 - \varphi_k(z_k)) L(z, \omega)] d\mu_k(z_k).$$

Требуется выбрать решающую функцию так, чтобы минимизировать суммарный риск

$$\rho(\varphi \mid \omega) = \sum_{k=0}^{n} \rho_k(\varphi_k \mid \omega).$$

Минимальным полным классом решающих функций является в этом случае класс монотонных решений, т. е. таких, что для некоторого t_n (t_n называется критическим числом)

$$\varphi_n(z) = 0 \quad \text{для} \quad z < t_n,$$
$$\varphi_n(z) = 1 \quad \text{для} \quad z > t_n$$
$$0 \leqslant \varphi_n(z) \leqslant 1.$$

Пусть $\Gamma = [a, b]$, где a — минимальная, а b — максимальная точка такая, что вероятность попадания в любой открытый интервал, ее содержащий, положительна при некотором ω.

Теорема 1. Пусть F — априорная вероятностная мера на Ω с множествами положительной меры выше и ниже ω_0. Если $\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ есть решающая функция байесовская относительно F с критическими точками $t_1, t_2, \ldots, t_n$, то $t_i - t_{i-1}$ должно быть внутренней точкой Γ для $i = 2, \ldots, n$.

Теорема 2. Пусть S — класс решающих функций критические точки которых таковы, что $t_i - t_{i-1} \in \Gamma$ и из того, что $t_i - t_{i-1}$ равно a или b и что $\varphi_{i-1}(t_{i-1}) > 0$, следует $\varphi_i(t_i) = 1$. Тогда S является классом решений существенно полным (essentially complete).

Теорема 5. Если множество ω, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} e^{\omega t} d\mu(t) < \infty$ является открытым, то все решающие функции из класса S являются допустимыми.

И. В. Романовский

6788. О коллективе. Судзуки (Suzuki Yukio), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1954, **2**, № 1, 113—116 (японск.; рез. англ.)

Изложение результатов Мизеса, Вальда, Феллера и Вилля о „коллективе“ и некоторые дополнительные замечания.

6789. К методу интервью. Нисихира (Nisihira Sigeki), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1955, **3**, № 1, 54—84 (японск., рез. англ.)

ТЕОРИЯ ИГР, ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЭКОНОМИКА

6790. Некоторые игры Блотто. Блэккетт (Some Blotto games. Blackett D. W.), Naval Res, Logist. Quart, 1954, **1**, 55—60 (англ.)

Автор решает игру с функцией выигрыша $\sum x_i f_i(y_i)$, где $f_j(x)$ строго возрастает и либо выпукла, либо вогнута, x_i удовлетворяют условиям $\sum x_i = 1$, $x_i \geqslant 0$, аналогичны условия для y_i. Игрок, выбирающий x_i, максимизирует, выбирающий y_i минимизирует. x_i мо-

жет быть, например, вероятностью того, что конвой выберет i-й курс, а y_i-той частью сил, которую командующий подводными лодками выделит для нападения на этом курсе. Отсюда название „игры Блотто" — теоретико-игровой термин для игр, учитывающих расположение сил противников. В доказательстве теоремы 1 имеется ошибка (в третьей формуле снизу, стр. 57), которая, к счастью, не влияет на справедливость рассуждений. J. M. Danskin

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 3, 273.

Примечание переводчика. В тексте реферата имеется опечатка — вместо $\sum x_i f(y_i)$ написано $\sum x_i f_i(x_i)$. И. В. Романовский

6791. Точки равновесия в играх с векторнозначными выигрышами. Шепли (Equilibrium points in games with vector payoffs. Shapley L. S.), Naval Res. Logist. Quart., 1959, **6**, № 1, 57—61 (англ.)

Пусть A — матрица выигрышей, элементы которой a_{ij} суть векторы n-мерного пространства. Пара смешанных стратегий (x^*, y^*) называется сильной точкой равновесия, если не существует такой стратегии x, что $xAy^* \geqslant x^*Ay^*$, и не существует такой стратегии y, что $x^*Ay^* \geqslant x^*Ay$ ($a \geqslant b$, если все компоненты a не меньше соответствующих компонент b и $a \neq b$). Пара (x^*, y^*) называется слабой точкой равновесия, если не существует такой стратегии x, что $xAy^* > x^*Ay^*$, и не существует такой стратегии y, что $x^*Ay^* > x^*Ay$ ($a > b$, если все компоненты a больше соответствующих компонент b).

Под αA, где α — вектор вероятностей, будем понимать матрицу $\| \alpha a_{ij} \|$.

Теорема. Слабые точки равновесия нулевой векторной игры A совпадают с точками равновесия биматричных игр $[\alpha A, -\beta A]$, где $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$. Сильные точки равновесия игры A совпадают с точками равновесия игр $[\alpha A, -\beta A]$, где $\alpha > 0$ и $\beta > 0$.

И. В. Романовский

6792. Теория игр. Боненблуст Г. Ф. (Bohnenblust H. Frederic), Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 53—86

Перевод одноименной главы книги Беккенбаха: „Modern Mathematics for the Engineer", Edited by E. F. Beckenbach, New York—Toronto—London, 1956; E. H. Frederic Bohnenblust, The Theory of Games, стр. 191—210. Элементарное изложение основ теории антагонистических игр (т. е. нулевых игр двух лиц), выгодно отличающееся от других статей этого рода наличием нетривиальных примеров. Имеется добавление (Ю. В. Геронимус): „Некоторые понятия и формулы из теории вероятностей". Н. Н. Воробьев

6793. К теории стратегических игр. Нейман (On the theory of games of strategy. Neumann John von), Ann. Math. Studies, 1959, **4**, № 40, 13—42 (англ.)

Перевод на английский язык одной из первых работ по математической теории игр. Впервые опубликована в Math. Ann., 1928, **100**, 295—320.

6794. Теория игр (I), (II), (III). Миядзава (Miyazawa Kōich), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag., Sci., 1957, **2**, № 1, 41—46; № 2, 95—99; № 3, 145—150 (японск.)

6795. Линейное программирование в условиях неопределенности. Данциг (Linear programming under uncertainty. Dantzig George B. Manag. Sci., 1955, **1**, 197—206) (англ.)

Из класса проблем, объединяемых под общим названием: „Линейное программирование в условиях неопределенности", автор рассматривает подкласс, который может быть описан следующим образом:

Пусть $K(\theta)$ — выпуклый многогранник в $(m+n)$-мерном пространстве (точки которого обозначаются векторной парой (x, y)) такой, что проекция $K(\theta)$ в m-мерное пространство является фиксированным множеством Ω, не зависящим от θ. Пусть $\varphi(x, y)$ — выпуклая функция. Тогда

$$\varphi(x) = \exp \left[\inf_{y \mid (x, y) \in K(\theta)} \varphi(x, y) \right]$$

является выпуклой функцией x.

Распространением методов линейного программирования (если объем проблемы не слишком велик) можно найти лучший выбор x в Ω. Рассматриваются разнообразные применения этих идей. В общем получается, что решение должно быть получено на первой стадии так, чтобы удовлетворить требованиям, встречающимся на последующих стадиях. Эти требования известны сначала только вероятностно, но становятся известными точно, когда найдено решение на второй стадии. A. J. Hoffman

Перевод из Math. Revs, 1956, **17**, № 7, 759.

6796. Двойственный симплекс-алгорифм для ограниченных переменных. Уагнер (The dual simplex algorithm for bounded variables. Wagner Harvey M.), Naval Res. Logist. Quart., 1958, **5**, № 3, 257—261 (англ.)

Для решения задачи линейного программирования максимизировать $c\lambda$ при $A\lambda \leqslant b$, когда на переменные наложено ограничение вида $0 \leqslant \lambda \leqslant u$, может быть использован метод Лемке (РЖМат, 1958, 1416). Небольшое видоизменение этого метода позволяет избежать часто встречающихся трудностей при нахождении допустимого решения и упрощает критерий для определения переменной, которую нужно удалить из базиса при проведении алгорифма. И. Л. Романовская

6797. Об определении всех оптимальных решений в линейном программировании. Фудзисава (A note on the determination of all optimal solutions in linear programming. Fujisawa Toshio), J. Operat. Res. Soc. Japan, 1958, **1**, № 3, 97—104 (англ.)

Автор указывает на возможность отыскания всех оптимальных решений как для обобщенной матричной (РЖМат, 1957, 717), так и для обычной задачи линейного программирования с помощью теории графов (König D., Theorie der Endlichen und Unendlichen Graphen, Leipzig, 1936). Л. И. Горьков

6798. Алгорифм для решения транспортной задачи, когда стоимость перевозки по каждому пути выпукла. Бил (An algorithm for solving the transportation problem when the shipping cost over each route is convex. Beale E. M. L.), Naval Res. Logist. Quart., 1959, **6**, № 1, 43—56 (англ.)

Описан алгорифм для решения обычной транспортной задачи, когда стоимость перевозки по каждому пути является выпуклой функцией от количества перевозимого груза. Дано доказательство сходимости метода в конечное число шагов. Этот метод может быть применен и в случае линейной функции стоимости перевозок, а также при наличии ограничений, налагаемых на пропускные способности дорог. Решение небольшого численного примера с такими ограничениями приведено в качестве иллюстрации. Л. И. Горьков

6799. Трудности в линейном программировании при решении транспортных задач. Лутер, Уолш (A difficulty in linear programming for transportation problems. Luther Marvin, Walsh John E.), Naval Res. Logist, Quart., 1959, **6**, № 1, 77—80 (англ.)

Отмечается, что применение линейного программирования к транспортной задаче подчас затруднительно из-за большого числа переменных. Л. И. Горьков

6800. О применении линейного программирования к сельскохозяйственным задачам. Молдон (An introduction to the application of linear programming to farming problems. Mauldon R. G.), J. Austral. Inst. Agric. Sci., 1958, **24**, № 3, 191—198 (англ.)

Разъясняется содержание общего метода линейного программирования. Делается обзор (1951—1957 гг.) работ, использующих этот метод для решения задач сельскохозяйственного планирования. Некоторое внимание уделяется специфике сельского хозяйства Австралии. Библ. 22 назв. Н. М. Митрофанова

6801. Целочисленное программирование. Теория и применения на практике. Крелле (Ganzzahlige Programmierungen. Theorie und Anwendungen in der Praxis. Krelle W.), Unternehmensforschung, 1958, 2, № 4, 161—175 (нем.; рез. англ., франц.)

Определение и примеры целочисленных программ. Краткие пояснения методов решения. О. В. Шалаевский

6802. Развитие линейного программирования в корпорации РЭНД. (I). Косэ (Kose Dairoku), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1956, 1, № 5, 222—226 (японск.)

6803. Функциональные уравнения в теории динамического программирования. III. Белман (Functional equations in the theory of dynamic programming. III. Bellman Richard), Rend. Circolo mat. Palermo, 1956, 5 № 3, 297—319 (англ.)

Работа входит в серию одноименных статей автора (см., например, РЖМат, 1956, 6564, 6743; 1958, 7009, 7011, 1417) и посвящена исследованию с точки зрения динамического программирования многошаговых (позиционных) нулевых игр двух лиц. Ее содержание близко содержанию гл. 10 монографий автора «Динамическое программирование», выходящей в русском переводе. После введения и описания рассматриваемых игр формулируется и обосновывается в применении к играм принцип оптимальности, приводящий к системе рекуррентных соотношений, а также к основному функциональному уравнению. Для последнего доказываются при некоторых условиях теоремы существования и единственности и устойчивости решения. Результаты применяются к теории игр на выживание. Н. Н. Воробьев

6804. Использование моделей динамического программирования для оптимального хозяйственного и домашнего планирования. Лофтсгард, Хиди (Application of dynamic programming models for optimum farm and home plans. Loftsgard Laurel D., Heady Earl O.), J. Farm. Econ., 1959, 41, № 1, 51—62 (англ.)

6805. Очерк по теории функций спроса и индексам цен. Раяоя (A study in the theory of demand functions and price indexes. Rajaoja Vieno. Comment. phys.-math. Soc. scient. fennica, 1958, 21, № 1, 96 pp., ill.) (англ.)

Изучается индивидуальное поведение потребителей с точки зрения теории предельной полезности Парето. Пусть на рынке свободно обращаются товары (l) $(l=1,\ldots,n)$ по ценам $p_l>0$. Будем говорить, что $q_1,\ldots,q_n$ $(q_l\geqslant 0)$ образуют бюджет, где q_l — количество l-го товара. Потребитель обладает некоторой суммой денег μ.

Предполагается, что: 1) существует функция предпочтения $U(q_1,\ldots,q_n)$ со свойствами: а) если потребителю надо сделать выбор из двух бюджетов, для которых значения U не равны, то он выбирает бюджет, для которого соответствующее значение U больше, б) U и ее частные производные до второго порядка включительно непрерывны, в) $\frac{\partial U}{\partial q_l}>0$ $(l=1,\ldots,n)$; 2) поверхности уровней, или поверхности безразличия, функции предпочтения выпуклы к началу. Отсюда следует, что существуют однозначные и непрерывные функции спроса.

$$q_l=q_l(p_1,\ldots,p_n;\ \mu),\quad l=1,\ldots,n. \qquad (1)$$

В гл. 1 изучаются семейства поверхностей безразличия (indeference maps). В гл. 2 рассматриваются с теоретической точки зрения функции спроса вида (1) и некоторые другие виды функций спроса. Гл. 3 посвящена изучению трех типов индексов цен. В гл. 4 изучаются функции предпочтения, которые представимы в виде

$$U(q_1,\ldots,q_n)=U(\varphi_1(q_1,\ldots,q_{k_1}),\ \varphi_2(q_{k_1+1},\ldots,q_{k_2}),\ldots).$$

В гл. 5 функция предпочтения изучается при двух специальных предположениях относительно поведения потребителя. Л. И. Горьков

6806. Существование общего равновесия для рынка с конкуренцией. Мак-Кензи (On the existence of general equilibrium for a competitive market. McKenzie Lionel W.), Econometrica, 1959, 27, № 1, 54—71 (англ.)

Рассматривается n товаров, образующих n-мерное евклидово пространство, и m потребителей. Векторы x_l, соответствующие возможным покупкам (продажа — отрицательная покупка) l-го потребителя образуют множество X_l. Относительно каждого X_l предполагается: 1) X_l выпукло, замкнуто и ограничено снизу как подмножество евклидова пространства, 2) X_l вполне упорядочено отношением предпочтения (обозначается $(>)$), относительно которого оно замкнуто, т. е. из $x_n'(\geqslant)x_n''$, $x_n'\to x'$, $x_n''\to x''$ следует $x'(\geqslant)x''$.

Цены (вектор p) рассматриваемых товаров также образуют n-мерное евклидово пространство. Для каждого вектора p определим

$$H_l(p)=\{x_l \mid p\cdot x_l\leqslant 0 \text{ и } x_l\in X_l\},$$

$$C_l(p)=\{x_l' \mid x_l'(\geqslant)x_l \text{ для всех } x_l\in H_l(p)\}.$$

Допустимые комбинации затрат и выпуска производственного сектора образуют множество Y, относительно которого предполагаем: 3) Y — замкнутый, выпуклый конус; 4) $Y\cap\Omega=\{0\}$, где Ω — положительный гипероктант, 5) $X_l\cap Y\neq\Delta$.

Пусть I_1 и I_2 такие, что $I_1\cup I_2=\{1,2,\ldots,m\}$ и $I_1\cap I_2=\Delta$. Обозначим $x_{I_k}=\sum_{l\in I_k}x_l$ и $X_{I_k}=\sum_{l\in I_k}X_l$. И, наконец, последнее предположение, 6) как бы ни выбирать I_1 и I_2, если $x_{I_1}\in(Y-X_{I_2})$, то существует $v\in(Y-X_{I_2})$ такое, что $v=x_{I_1}'-x_{I_1}$ и $x_l'(>)x_l$ для всех $l\in I_1$ и для некоторого $l\in I_1$ $x_l'(>)x_l$.

Равновесием конкуренции на абстрактном рынке называется множество $(p, y, x_1,\ldots,x_m)$, удовлетворяющее условиям:

I $y\in Y$, $p\cdot y=0$ и для любого $y'\in Y$ $p\cdot y'\leqslant 0$.

II $x_l\in C_l(p)\cap H_l(p)$, $l=1,\ldots,m$.

III $\sum_{l=1}^{m}x_l=y$.

Используя теорему Брауэра о неподвижной точке, автор доказал основную теорему: При условиях 1)—6) на абстрактном рынке существует положение равновесия конкуренции. Библ. 16 назв. Л. И. Горьков

6807. Покупка сырья на рынке с флюктуациями. Фейбиан, Фишер, Сазьени, Ярдени (Purchasing raw material on a fluctuating market. Fabian T., Fisher J. L., Sasieni M. W., Yardeni A.), Operat. Res., 1959, 7, № 1, 107—122 (англ.)

С помощью динамического программирования решается задача об определении времени и размера закупки сырья в предположении, что известны следующие данные: 1) максимально и минимально допустимые размеры запасов сырья; 2) текущая рыночная цена, 3) стоимость хранения сырья и стоимость потерь, связанных с нехваткой сырья, 4) функции распределения цен и спроса на сырье. Л. И. Горьков

6808. Ошибки выпуска продукции, порождаемые ошибками технологических коэффициентов в открытых льонтьевских моделях затрат-выпуска. Кимура (On

the errors of outputs due to errors of technical coefficients in Leontief's open input-output models. Kimura Hitosi), Ann. Inst. Statist. Math., 1956, 7, № 3, 205—213 (англ.)

Если

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 1-a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 1-a_{11}-\varepsilon_{11} & -a_{12}-\varepsilon_{12} & \dots & -a_{1n}-\varepsilon_{1n} \\ -a_{21}-\varepsilon_{21} & 1-a_{22}-\varepsilon_{22} & \dots & -a_{2n}-\varepsilon_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1}-\varepsilon_{n1} & -a_{n2}-\varepsilon_{n2} & \dots & 1-a_{nn}-\varepsilon_{nn} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} X_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ X_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{pmatrix},$$

где ε_{ij} — независимые случайные величины, $E\varepsilon_{ij}=0$, $D\varepsilon_{ij}=r_2^2 a_{ij}^2$, то

$$\sqrt{E(X_i'-X_i)^2} \leqslant \frac{r}{\sqrt{n}} X_i \sqrt{C^2+1}\ (M-1),$$

где C близко к 1, а $M=\sum X_k/\sum Y_k$.

И. В. Романовский

6809. Применение математики в экономике. Брож (Použití matematiky v ekonomice. Brož Rudolf), Textil (ČSR), 1959, **14**, № 3, 97—100 (чешск.)

6810. Линейная математическая модель оценки эффективности системы военной разведки. Тралл, Кумс, Колдуэлл (Linear model for evaluating complex systems. Thrall R. M., Coombs C. H., Caldwell W.). Naval Res. Logist. Quart., 1958, **5**, № 4, 347—361 (англ.)

Производится попытка построить количественную оценку эффективности работы разведки наземных войск. С этой целью строятся линейные выражения, оценивающие фактическую ситуацию на поле боя и информацию, собранную разведкой. Донесения разведывательных органов разделяются на 4 типа: 1) правильное указание на наличие и. расположение подразделения противника; 2) ложное донесение о фактически несуществующем подразделении; 3) правильное донесение с ошибкой в оценке расположения объекта; 4) отсутствие донесения о фактически существующем подразделении. Соответствующие результаты действий разведки называются: „попадание", „ложная тревога", „смещение" и „промах". Общая оценка действий разведки строится из количеств результатов всех этих типов. При этом учитывается относительная важность (в данной ситуации) отдельных результатов (попаданий, промахов и т. д.) посредством весовых множителей.

Вся информация делится на категории по видам подразделений противника, относительно которых составляются донесения: артиллерия, танки, пехота, аэродромы. Кроме того, информация делится по секторам территории. Разбиение территории на сектора учитывает глубину расположения сектора, проходимость и наличие растительности. Всего насчитывается 36 типов секторов. Оценка информации строится в зависимости от обстановки и задачи войск, обслуживаемых разведкой (наступление, оборона, отход) и от уровня штаба, использующего разведданные. За единицу измерения войск противника принимается подразделение, равноценное тому, в интересах которого ведется разведка.

Для каждого сектора с нормой j перечисляются числа подразделений данной категории i — t_i^j. Для каждого сектора строятся векторы, составляющими которы являются величины по категориям информации. Та вектор истинной ситуации для сектора j записывает

$$T^j=(t_1^j,\ t_2^j,\dots,\ t_n^j).$$

Аналогично строятся векторы: правильных донесени C^j, ложных тревог E^j, смещений S^j; вектор промах M^j получается из выражения для компонент: $m_i^j=$ $=t_i^j-c_i^j-s_i^j$.

Далее строятся векторы оценок: вектор важност значения сведений об объектах категории i в сектор $j-P^j$, вектор оценки качества данной информаци D^j, составляющие которого имеют вид

$$d_i^j=c_i^j-f_i^j e_i^j+g_i^j s_i^j-h_i^j m_i^j,$$

весовые коэффициенты 1, f_i^j, g_i^j и h_i^j (нормированны относительно правильных донесений), равно как и со ставляющие вектора P^j (p_i^j), должны устанавливатьс на основе боевого опыта квалифицированными офице рами.

Далее строятся сложные векторы-оценки: векто важности данной категории информации в секторе $z^j=P^jD^j=\sum_i p_i^j d_i^j$; вектор важности фактическо ситуации в данном секторе $w^j=P^jT^j$; относительна важность информации по данному сектору $v^j=z^j/w^j$ общая важность информации по фронту

$$v=\sum_j z^j/\sum_j w^j=z/w.$$

Описаны эксперименты по статистическому определе нию оценочных коэффициентов офицерами военно-учеб ных заведений. Получено хорошее совпадение оценок Однако оценки несколько различаются для категори офицеров различных родов войск. Работа является на чалом большого исследования в области эффективнос ти войсковой разведки.

И. А. Полетае

6811. Исследование операций и задачи планирования материального обеспечения войск («логистика»). Флад (Operations research and logistics. Flood Merrill M.), Naval Res. Logist. Quart., 1958, **5**, № 4 323—335 (англ.)

Приводится краткий обзор постановки характерны задач, решаемых методами математического моделиро вания: планирование бюджета, распределение продук ции, распределение рабочей силы по видам работ, пла нирование производства, хранение запасов и профилак тический ремонт оборудования. Последние два типа за дач решаются с привлечением статистических методов остальные — методами линейного программирования (нахождение условного экстремума линейной формы при ограничениях в виде линейных равенств или неравенств) Достоинством метода математических моделей является возможность применения готового математического аппарата. Использование быстродействующих матема тических машин при решении задач ценно в том отно шении, что решение сложной задачи может быть полу чено на машине в короткий срок и может быть свое временно использовано.

Обсуждаются различные варианты метода линейного программирования. Одна и та же модель пригодна для решения обширного класса конкретных задач. Библ 33 назв.

И. А. Полетаев

6812. Характер производства и экономичные партии. Каньисарес-Росас, Сан-Хуан-Рубьо (Módulos de fabricación y lotes económicos. Cañizares Rozas Francisco, San Juan Rubio Serafin), An. mec. y electr., 1958, **35**, № 6, 287—291 (исп.)

Определяется наиболее выгодный объем партий изде лий в условиях мелкосерийного производства.

6813. Исследование операций в статистических наблюдениях. Сайто, Асаи (Saito Kinichiro, Asai Akira), Опэрэсёндзу рисати, Operat. Res. Manag. Sci., 1956, 1, № 3, 133—136 (японск.)

6814. Исследование операций и структуры решений. Феррн-Боржиш (A investigação operacional e o dimensionamento das estruturas. Ferry Borges J.), Técnica, 1959, 34, № 293, 543—549 (порт.; рез. франц., англ.)

6815. Математические методы в исследовании процессов производства. Умэбаяси Мицухиса. Фудзи сэйтэцу гихо, Techn. Rept Fuji Iron and Steel Co., 1959, 8, № 2, 214—224 (японск.)

6816. Планирование производства и запаса в условиях неустойчивого рынка. Данё, Енсен (Production and inventory planning in a fluctuating market. Danö S., Jensen E. L.), Metrika, 1958, 1, № 1, 28—40 (англ.)

Постановку задачи и обозначения см. РЖМат, 1960, 5659. Для случая кусочно-линейной $F(x_t)$ приводится числовой пример, в котором рассматривается производство сигар. Для одного из обобщений также приведен числовой пример. Л. И. Горьков

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

6817. Определение оптимальной системы по произвольному критерию. Пугачев В. С., Автоматика и телемеханика, 1958, 19, № 6, 519—539 (рез. англ.)

Пусть входной сигнал имеет вид:

$$Z(t) = \sum_{h=1}^{N} U_h \varphi_h(t) + X(t),$$

а интересующий нас полезный сигнал равен

$$W(s) = \sum_{h=1}^{N} U_h \psi_h(s) + Y(s),$$

где φ_h и ψ_h — заданные функции, U_h — случайные величины, $[X(t), Y(s)]$ — 2-мерная нормально распределенная случайная функция, не зависящая от U_h, аргументы t и s — скалярные или векторные. Распределения всех случайных величин предполагаются известными. Строится оценка величины $W(s) : W^*(s) = AZ(t)$, где оператор A такой, что для некоторой заданной функции r величина $\mathbf{M}[r(W(s), W^*(s))]$ минимальна. Применяется метод канонических разложений функций $X(t)$ и $Y(s)$. Задача сводится к решению некоторых интегральных уравнений и разысканию функции $\chi_0 = \chi_0(s, \eta_0 \ldots \eta_N)$, при которой минимален интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} r\left(\sum_{h=1}^{N} u_h \omega_h(s) + \eta_0, \chi\right) \times$$

$$\times f(u_h) \exp\left\{\sum_{h=1}^{N} u_h \eta_h - \frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{N} a_{pq} u_p u_q\right\} du_1 \ldots du_N$$

при фиксированных s, $\eta_0, \ldots, \eta_N$, где $f(u_h)$ — плотность вероятности величины U_h, ω_h — известные функции, а a_{pq} — известные константы. Тот же метод применяется для анализа специального случая, когда r принадлежит некоторому частному классу функционалов от $W(s)$ и $W^*(s)$. Рассмотрены случаи, когда оптимальный оператор предполагается линейным и когда он может быть случайным. В качестве примеров строятся оптимальные операторы для экстраполяции функции $U_1 + U_2 s = W(s)$ по критерию минимума вероятности того, что ошибка превзойдет данную величину a в случае, когда U_1 и U_2 нормальны и по критерию минимума математического ожидания функции $r(\omega, \omega^*) = 1 - e^{-k^2(\omega-\omega^*)^2}$ в предположении, что величина U_1 распределена равномерно в интервале $[-a, a]$, а U_2 распределена нормально и не зависит от U_1. В обоих случаях корреляционная функция $K_X(t, u)$ помехи $X(t)$ предполагается имеющей вид $e^{-c|t-U|}$. Доказано, что если полезный сигнал и помехи распределены нормально, то для любой функции r, зависящей только от разности $W - W^*$, оптимальный оператор в классе всех возможных операторов, для которых существует этот критерий, является неоднородным линейным оператором. М. И. Фортус

6818. Об оптимальном детекторе с log I_0-характеристикой для обнаружения слабого сигнала при наличии шума. Флейшман Б. С., Радиотехника и электроника, АН СССР, 1957, 2, июнь, вып. 6, 726—734

Методы математической статистики прилагаются к решению задачи об обнаружении на фоне шума синусоидального сигнала $A\cos(\omega t + \varphi)$ со случайной фазой φ, равномерно распределенной на интервале $(0, 2\pi)$. Считается, что шум — гауссовский стационарный случайный процесс с нулевым средним и дисперсией σ^2. Задача состоит в выборе между гипотезами H_0 — нет сигнала ($A = 0$) и H_1 — сигнал присутствует ($A = A_1 \neq 0$) так, чтобы ошибки первого и второго рода α и β были минимальны. Утверждается, что эта задача сводится (после линейного детектирования приходящего сообщения) к различению двух гипотез о параметре A в случае, когда последовательные выборки x_k ($k = 1, \ldots, n$) исследуемого процесса независимы и имеют плотность распределения вида

$$W_A(R) = \begin{cases} \dfrac{R}{\sigma^2} I_0\left(\dfrac{AR}{\sigma^2}\right) \exp\left\{-\dfrac{A^2 + R^2}{2\sigma^2}\right\} & \text{при } R \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } R < 0, \end{cases}$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка. Решение проводится в случае, когда $A_1 \ll \sigma$; при этом находится функция распределения логарифма отношения правдоподобия, составленного для различения гипотез H_0 и H_1 (с заданным A_1), в который представлены выборки x_k с произвольным значением параметра A. Получены явные формулы для величин α и β. Рассмотрен важный для радиолокационных приложений частный случай $A \approx A_1$. Б. С. Цыбаков

6819. Об оптимальном обнаружении сигналов на фоне коррелированной гауссовой помехи. Срагович В. Г., Радиотехн. и электроника, 1959, 4, № 5, 745—754

Рассматривается n гауссовских двумерных векторов ξ_i, $i = 1, \ldots, n$, с нулевым средним значением, относительно которых имеются 2 взаимно исключающие гипотезы H_0 и H_1. Гипотеза $H_0 : \xi_i = \mathbf{n}_i$, где $\mathbf{n}_i = \{n_i', n_i''\}$, причем $Mn_i' n_j'' = 0$ для любых i и j, а $Mn_i' n_j' = Mn_i'' n_j'' = \rho_{ij}$, где ρ_{ij} известны. Гипотеза $H_1 : \xi_i = \mathbf{n}_i + \mathbf{s}_i$, где $\mathbf{s}_i = g_i U^i \mathbf{s}$; $\mathbf{s}$ — независящий от $\mathbf{n}_j$ двумерный нормальный вектор с независимыми компонентами; U — матрица поворота на известный угол φ; g_i — некоторые известные числа. Задача статистической проверки таких гипотез, как указывает автор, может возникнуть в радиолокации при обнаружении сигнала ($\mathbf{s}_i$) от движущегося объекта на фоне помех ($\mathbf{n}_i$). При этом проекции векторов истолковываются как составляющие соответствующих напряжений; вращение сигнального вектора происходит вследствие эффекта Допплера, а числа g_k описывают форму диаграммы направленности антенны. Автор строит для описанной задачи критерий Неймана—Пирсона, который выражается в терминах собственных чисел матрицы $R = \{\rho_{ij}\}$, элементов матрицы ортогонального преобразования, диагонализирующего R, и других параметров задачи. При этом вероятность ошибки 1-го рода F (вероятность ложной тревоги) и дополнение до 1 вероятности ошибки 2-го рода D (вероятность обнаружения сигнала) связаны

простым соотношением $D = F^{1/(1+r)}$, где $r > 0$ — некоторый параметр, характеризующий отношение интенсивностей сигнала и помехи. Для случая $n = 2$ рассмотрен пример, сопровождаемый несколькими графиками зависимости D от параметров задачи при фиксированной F.

Примечание референта. В работе имеются опечатки. В формулах (6) и (7) вместо ξ_l' и ξ_l'' надо читать x_l и y_l соответственно. В формуле на стр. 748 (8-я строка сверху) под знаком интеграла пропущена функция $e^{-\frac{s'^2+s''^2}{2q^2}}$. В формуле на стр. 749 (15-я и 16-я строка сверху) вместо $\alpha_k^2 - \beta_k^2$ следует читать $\alpha_k^2 + \beta_k^2$, а плюс во второй квадратной скобке следует заменить на минус. В. Ф. Писаренко

6820. **Нарастающая вероятность обнаружения сигнала радиолокационной станции. Седякин Н. М.,** Радиотехника, 1959, 14, № 5, 44—48

Решается элементарная задача для испытаний Бернулли с вероятностью успеха p: найти вероятность того, что в N испытаниях встретится по крайней мере одна серия успехов длины 2 или больше. Искомая вероятность равна

$$\sum_{n=2}^{N} \left(C_N^n - C_{N-n+1}^n\right) p^n (1-p)^{N-n}.$$

Как утверждает автор, такая задача возникает в радиолокации при нахождении вероятности обнаружения цели за N оборотов антенны радиолокатора.

Примечания референта: 1. В формуле (15а) суммирование надо производить не до $(N-1)/2$, а до $(N+1)/2$. 2. Рассматриваемая автором задача решена в книге В. Феллера „Введение в теорию вероятностей и ее приложения", Москва, 1952, (стр. 234 пример „а") для более общего случая серии успехов произвольной длины. В. Ф. Писаренко

6821. **Интегральные уравнения, биортонормальные разложения и шумы. Лейпник** (Integral equations, biorthonormal expansions, and noise. Leibnik Roy), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1959, 7, № 1, 6—30 (англ.)

Цель статьи — показать, что при исследовании нелинейных задач теории шумов может с успехом применяться теория разложений по собственным функциям интегральных операторов. В первых параграфах работы приводятся основные факты теории ортонормированных систем функций (при этом особенно выделяются „биортонормальные последовательности", т. е. двойные последовательности взаимно ортогональных и нормированных функций) и теории линейных интегральных уравнений. Остальная часть статьи содержит примеры приложений, а именно: 1) решение интегральных уравнений Дарлинга и Зигерта (РЖМат, 1957, 5749) приводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений; 2) обобщается метод Каца (Kac M., Trans. Amer. Math. Soc., 1949, 65, 1—13) для вычисления кратных интегралов со специальной структурой подинтегральной функции; 3) находятся собственные значения и собственные функции (выражающиеся через полиномы Эрмита и полиномы Лагерра) линейных интегральных операторов с ядрами

$$\exp[-a(x^2+y^2)+bxy], \quad -\infty < x, y < +\infty,$$

$$\exp[-a(x+y)]\, I_\alpha(b\sqrt{xy}), \quad 0 < x, y < +\infty;$$

4) изучается сходимость разложений двумерных плотностей, полученных Барреттом и Лампардом (РЖМат, 1956, 1561, примеры 1—3). Оказывается, что в двух первых случаях ряды сходятся во всех точках соответствующей области, в третьем же примере ряд расходится, но суммируем методом Абеля. Расходимость связана с тем, что функция распределения не имеет смешанной производной. Г. К. Энгелис

6822. **Сравнительный анализ двоичных кодов с коррекцией ошибок. Зотова Е. Н.,** Научн. докл. высш. школы. Радиотехн. и электроника, 1958, № 1, 37—43

Сравниваются коды Хемминга, Слепяна и простой код без коррекции ошибок. В части работы используется неверная формула для скорости передачи информации, содержащаяся в предыдущей работе (РЖМат, 1960, 2084). По-видимому, эта формула привела автора к неверному качественному выводу: „Следует помнить, что при заданной мощности передатчика за счет введения корректирующих кодов нельзя значительно увеличить помехоустойчивость системы, сохраняя скорость передачи неизменненной", который кажется референту противоречащим теореме Шеннона. Р. Л. Добрушин

6823. **Кодирование последовательности из двух независимых символов. Гармаш В. А., Кирилов Н. Е.,** Электросвязь, 1958, № 9, 3—6

Рассматривается способ бинарного кодирования, предложенный Шенноном (Теория передачи электрических сигналов при наличии помех. Сб. перев. под ред. Железнова. М., Изд-во ин. лит., 1953). Способ состоит в следующем. Последовательность, составленная с помощью двух независимых символов 0 и 1, разбивается на группы, начинающиеся символом 1 и далее состоящие из последовательности нулей до ближайшего символа 1. Среднее число символов в такой группе обозначено через k. Символ 1 кодируется некоторой фиксированной комбинацией, состоящей из m двоичных символов. Вместо последовательности нулей, входящих в группу, передается некоторое число, записанное в двоичной системе счисления.

Под эффективностью кодирования понимается выражение $R(m, p) = Hk/l$, где p — вероятность появления символа 0 в кодируемой последовательности, l — среднее число символов в закодированной последовательности, относящееся к одной группе, а H — энтропия кодируемой последовательности.

В работе находится аналитическое выражение для $R(m, p)$. Величина $R(m, p)$ протабулирована для ряда значений p и m. Показано, что кодирование по способу Шеннона имеет более высокую эффективность по сравнению со способом, предложенным Элайасом. Б. С. Цыбаков

6824. **Некоторые особенности серий в контроле качества. Мур** (Some properties of runs in quality control procedures. Moore P. G.), Biometrika, 1958, 45, № 1-2, 89—95 (англ.)

Автор считает, что в процессе производства изменение средних последовательных выборок происходит при двух обстоятельствах: а) когда имеется износ инструмента: б) когда имеется неполадка в какой-нибудь части машины. Эти обстоятельства приводят к ухудшению качества продукции. Для устранения такого рода недостатков производят наблюдения в сериях. Предлагается следующая основная схема контроля: если серия из T средних оказывается за некоторой границей, зависящей от T, при известным образом выбранной средней длине серии, то имеется ухудшение качества и нужно остановить работу машины для переналадки. Приводится таблица, поясняющая верхнюю и нижнюю контрольные границы для T=1, 2, 3, 4, и таблица средней длины серии. М. К. Камалов

6825. **Модель производства и непрерывный выборочный план. Савидж** (A production model and continuous sampling plan. Savage Richard I.), J. Amer. Statist. Assoc., 1959, 54, № 285, 231—247 (англ.)

Пусть $x(t)$ — случайная величина, принимающая значение 1, если по прошествии времени t после очередного ремонта качество продукции хорошее, и 0 — в противном случае. Предполагается, что $P[x(t)=1] = PR^{z(t)}$, где $0 < P \leqslant 1$, $0 < R < 1$ — известные параметры, а $z(t)$ — стационарный случайный процесс с независимыми

приращениями. Стоимость годной продукции за единицу времени равна 1, плохой продукции — 0. Через независимые случайные промежутки времени производятся мгновенные испытания качества продукции, причем разность между стоимостью испытания и ценой хорошей (плохой) продукции, произведенной в единицу времени, равна $c_1(c_0)$. При первом обнаружении брака делается ремонт, длительность которого равна $A_1 + A_2 z(s)$, а стоимость $B_1 + B_2 z(s)$, где A_1, A_2, B_1, B_2 — известные постоянные, s — момент обнаружения брака. За основной критерий оптимальности контрольного плана принята величина L — отношение м. о. дохода за цикл к м. о. длины цикла. В работе дается значение L и связанных с ней величин для дискретной и непрерывной разновидностей описанного выше производственного процесса. В двух численных примерах найден оптимальный план. Библ. 24 назв.

С. С. Кислицын

6826. **Ординарный выборочный план для коррелированных величин с односторонним правилом приемки. Сил** (A single sampling plan for correlated variables with a single-sided specification limit. Seal K. C.), J. Amer. Statist. Assoc., 1959, 54, № 285, 248—259 (англ.)

Характеристика y, подлежащая контролю, является случайной величиной, распределенной нормально. Нормальны и случайные величины $x_1, x_2, \ldots, x_k$, сильно зависящие от y. Наблюдение y дорого и поэтому производится только N совместных наблюдений $y, x_1, x_2, \ldots, x_k$. Отсюда можно с известной точностью вычислить корреляционную матрицу $y, x_1, x_2, \ldots, x_k$, чем оправдывается предположение, что эта матрица известна. Кроме того, она не меняется со временем. Изделие считается бракованным, если значение y превышает известную величину U_y. Описывается метод контроля, основанный на измерении $x_1, x_2, \ldots, x_k$ для n изделий, использовании первоначальных данных, корреляционной матрицы, и обеспечивающий бракозку этой партии с вероятностью α, если в ней имеется $100\,p_1\%$ негодных изделий. Далее описан план, при котором берется два контрольных уровня (α, p_1 и β, p_2), но n уже не произвольно. Приведен численный пример. В формулах 2.6, 2.7 имеются опечатки.

С. С. Кислицын

6827. **Модель случайного блуждания в среде для потока с автокорреляцией. Шейдеггер** (The random-walk model with autocorrelation of flow through porous media. Scheidegger A. E.), Canad. J. Phys., 1958, 36, № 6, 649—658 (англ.)

В системе координат, связанной с осредненным течением, движение жидкой частицы по направлению x идеализируется как дискретное случайное блуждание, в котором за время τ частица испытывает перемещения $\pm d$ с вероятностями $1/2$. Вероятность смещения νd за n шагов при этом равна $\psi(n, y) = \left(\frac{n}{\frac{n+\nu}{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$. При большом n функция $\psi(t, x)$, $t = n\tau$, $x = \nu d$, является приблизительно гауссовой и удовлетворяет уравнению диффузии с коэффициентом диффузии $D = d^2/2\tau$, так что дисперсия координаты x жидкой частицы равна $\overline{x^2} = 2Dt$. Другой подход к проблеме заключается в использовании лагранжевой корреляционной функции скорости частицы $R(t)$, причем $\overline{x^2} = \overline{v^2}\int_0^t (t-\tau)\,R(\tau)\,d\tau$. При больших t (по сравнению с лагранжевым масштабом времени L) эта формула сводится к предыдущей, если положить $D = \overline{v^2}L$. Показывается, что такое описание движения частицы вытекает из модели случайного блуждания с памятью о предыдущем направлении движения. Именно, если заданы вероятности сохранения и изменения направления движения за один шаг и их разность равна c, то функция $\psi(t, x)$, соответствующая большому числу шагов, удовлетворяет телеграфному уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \frac{1}{A}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \overline{v'^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{A} = \lim\frac{1-c}{\tau},$$

$$\overline{v'^2} = \lim\left(\frac{d}{\tau}\right)^2.$$

Постоянное значение A соответствует корреляционной функции $R(t) = \exp(-t/A)$. Выясняется, что для пористой среды параметры A и $D = A\overline{v'^2}$ следует определять формулами $A = \mu d/\beta\,\mathrm{grad}\,p$, $D = \beta d\,\mathrm{grad}\,p/\mu$, где β — некоторая геометрическая характеристика потока.

А. С. Монин

6828. **Принцип детального равновесия. Хейтлер** (Le principe du bilan détaillé. Heitler W.), Ann. Inst. Henri Poincaré, 1956, 15, № 2, 67—80 (франц.)

Доказаны следующие теоремы о связи между квантово-механическими вероятностями прямых и обратных процессов: 1) Сумма вероятностей перехода в системе двух сталкивающихся частиц из некоторого состояния A во все другие состояния этой системы B равна сумме вероятностей обратных процессов перехода из всех состояний B в состояние A, т. е. $\sum_B w_{AB} = \sum_B w_{BA}$ (для каждого из состояний системы). Доказательство этой теоремы основано только на допущении об унитарности матрицы рассеяния. Показано, что необходимым следствием этой теоремы является H-теорема Больцмана о монотонном возрастании энтропии для идеального газа, т. е. $\frac{\partial s}{\partial t} > 0$ (энтропия определяется как $S = -k\sum_n N_n l_n N_n$, где N_n — число частиц газа, находящихся в состоянии n). 2) Пусть $w_{p_0 m_0 | pm}$ — вероятность перехода системы двух сталкивающихся частиц, обладавших до столкновения импульсами $p_0 = (p_1^0, p_2^0)$ и проекциями моментов на соединяющую их линию $m_0 = (m_1^0, m_2^0)$ в состояние $p = (p_1, p_2)$, $m = (m_1, m_2)$. Тогда имеет место следующее равенство для средних вероятностей прямых и обратных процессов:

$$\sum_{m_0, m} w_{p_0, m_0 | p, m} = \overline{w}_{p_0|p} = \sum_{m, m_0} w_{pm|p_0 m_0} = \overline{w}_{p|p_0}.$$

Ю. С. Саясов

6829. **Об одном общем методе решения проблемы процентных ставок для различных форм страхования и определении встречающихся при этом величин. Гублер** (Über eine allgemeine Methode der Lösung des Zinsfussproblems für verschiedene Versicherungsformen und die Darstellung der darin auftretenden Momente. Gubler Hermann), Mitt. Verein. Schweiz. Versicherungsmathematiker, 1956, 56, № 1, 91—144 (нем.)

Используется впервые предложенный Цвинги (Zwinggi E., Experientia, 1949, Bd. 5; Skand. Aktuarietidskrift, 1950; Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, 1952, Bd. 1) новый подход к проблеме процентных ставок — важной задаче математики страхового дела. Автор приводит теорию нового метода, излагает понятие интеграла Шарфа, дающее возможность единой трактовки дискретного и непрерывного случаев. Основное содержание составляет применение нового метода к определению брутто-премии для смешанного страхования с повышающимся дивидендом и к определению нетто-капитала обеспечения для смешанного страхования. Решение является приближенным; ошибка приближения математически не оценивается, однако численные примеры, включающие и другие приближения, показывают очень хорошее согласие.

В заключение описываются приемы вычисления величин — временных моментов — играющих существенную роль в статье. Прилагаются таблицы. О. В. Шалаевский

6830. Анализ факторов, которые влияют на точность размеров деталей. Хигути, Одзава (Higuti Isao, Ozawa Masaru), Токэй сури кэнкюсё ихо, Proc. Inst. Statist. Math., 1958, **6**, № 1, 95—106 (японск., рез. англ.)

6831. Ошибки контролера, проистекающие из-за неточности универсальных измерительных приборов. Висневский (Błędy kontrolera wynikające z niedokładności pomiarow za pomocą uniwersalnych narzędzi mierniczych. Wiśniewski Klemens), Pomiary, automat., kontrola, 1959, **5**, № 1, 31—37 (польск.)

6832. Синхронизация релаксационного генератора случайным напряжением. Васильев А. М., Радиотехн. и электроника, 1959, **4**, № 6, 942—950

6833. Об использовании статистических методов анализа при нормировании труда в черной металлургии. Гейфман Р., Розин Б., Труд и заработн. плата, 1959, № 5, 3—11

6834. Уравнения связи интенсивности вертикального расчленения речных бассейнов Литовской ССР. Мингауда (LTSR upių baseinų vertikalinės skaidos intensyvumo ryšio lygtys. Mingauda L.), Vilniaus univ. Mokslo darbai, Уч. зап. Вильнюсск. ун-та, 1958, **19**, 121—132 (лит.; рез. русск.)

6835 К. Анализ корреляции и тренда. Креко, Парницкий, Пинтер, Тейсс (Korreláció és trendszámítás. Krekó B., Párniczky G., Pintér L., Theiss E.), Budapest, Közgazdasági és Jogi Könyvkiadó, 1958, 318 l., 44 Ft. (венг.)

Введение в методы регрессионного анализа и анализа статистических временных рядов для специалистов по экономике и социальным наукам. Среди шести глав 5-я имеет теоретический, остальные — более или менее практический характер. Ö. Eltetö

См. также: 6022, 6159, 6160, 6694, 6730, 6749, 7018.

ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы *С. П. Фиников, А. М. Васильев, Н. М. Остиану*

6736. Об интегральных многообразиях системы $x_{uv} = a_1x_u + a_2x_v + a_3x_w + ax$, $x_{uw} = Lx_{vw} + b_1x_u + b_2x_v + b_3x_w + bx$. Фава (Sulle varietà integrali del sistema $x_{uv} = a_1x_u + a_2x_v + a_3x_w + ax$, $x_{uw} = Lx_{vw} + b_1x_u + b_2x_v + b_3x_w + bx$. Fava Franco), Atti Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. fis. math. nat., 1955—1956, 81—116 (итал.)

6837. О топологической дифференциальной геометрии. Бляшке В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 201—204

6838. Основная теорема теории гиперповерхности в безразмерном евклидовом пространстве. Лопшиц А. М., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 77

6839. Новейшие успехи в теории точечных преобразований. Вилла (Progressi recenti nella teoria delle transformazioni puntuali. Villa Mario. Conf. Sem. mat. Univ. Bari, 1955 (1956), **10**, 19 p.) (итал.)

6840. Об одной задаче графической кинематики. Арала-Шавиш (Sobre um problema de cinemática gráfica. Arala Chaves M.), Gaz. mat., 1958, **19**, № 72-73, 25—27 (порт.)

Рассматривается построение центра ускорений фигуры, совершающей плоскопараллельное движение, и исследуются встречающиеся при этом частные случаи. С. Г. Кислицын

6841. О поле ускорений в движении жесткой плоской фигуры в своей плоскости. Майелларо (Sul campo delle accelerazioni nel moto di una figura rigida piana nel suo piano. Maiellaro Michele), Giorn. mat. Battaglini, 1957, **85**, № 2, 264—270 (итал.)

См. РЖМех, 1959, 1131.

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

6842. О теоретических основах геометрического анализа карьерных полей. Зарецкий Ю. К., Научн. докл. высш. школы. Горн. дело, 1959, № 1, 27—32

При проектировании и планировании горных работ возникает необходимость учитывать элементарное приращение объема карьера в зависимости от направления (или нескольких направлений) разработок. В связи с этим автор предлагает простой способ, в основе которого лежит следующее очевидное утверждение. При изменении объема тела за счет того, что точки некоторой части его поверхности получают единичное перемещение в заданном направлении, приращение объема тела равно площади проекции этой части поверхности на плоскость, перпендикулярную к данному направлению. Аналогично, вопрос об изменении площади плоской фигуры при перемещении части ее контура сводится к отысканию проекции этой части контура на перпендикуляр к направлению перемещения. Автор предлагает также графический метод определения моментов инерции и статических моментов плоских фигур. В. Л. Рвачев

6843. Общее тензорное решение неопределенного уравнения равновесия мембраны. Граифф (Soluzione tensoriale generale delle equazioni indefinite di equilibrio per una membrana. Graiff Franca), Atti Acc. cad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1959, **26**, № 2, 189—196 (итал.)

В двумерном римановом пространстве ищется симметричный тензор S_{ik}, дивергенция которого $S^{ik}_{\ \ k}$ тождественно равна нулю. Эта задача в некоторых частных случаях была решена Сторки (РЖ Мат, 1957, 4046) при помощи удачного выбора системы координат. В реферируемой статье используются тензорные методы, что позволяет несколько упростить результаты. Рассматриваются два случая: 1) якобиан от полной кривизны K и ее первого дифференциального инварианта $\Delta_1 K$ нигде не обращается в нуль; 2) упомянутый якобиан тождественно равен нулю. В обоих случаях общее решение выражается через произвольный скаляр и его производные (в первом случае — до 4-го порядка, во втором — до 3-го). Г. К. Энгели

6844. Алгебраическое исследование электромагнитного тензора, в случае существования индукции. Марио, Фам Мау Куан (Étude algébrique du tenseur électromagnétique en présence d'induction. Mario Louis, Pham Mau Quan), C. r. Acad. sci., 1958, **246**, № 21, 3018—3020 (франц.)

Рассматривается в 4-мерной трактовке тензор энергии-импульса $t_{\alpha\beta}$ электромагнитного поля в среде, характеризующейся электромагнитными параметрами ε и μ. Поля и индукции выражаются, как обычно, двумя тензорами $H_{\alpha\beta}$, $G_{\alpha\beta}$. Выделяется особый случай, когда $G_{\alpha\beta}H^{\alpha\beta} =$

$= G_{\alpha\beta} \overset{*}{H}{}^{\alpha\beta} = 0$ (звездочка обозначает дуальный тензор). Найдены собственные векторы и собственные значения тензора $t_{\alpha\beta}$ в общем случае и в указанном особом случае. Ф. И. Федоров

6845. Пятимерная оптика. Румер Ю. Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 120—122

6846 К. Курс кристаллографии. Книга 1. Геометрическая кристаллография. Ге (Cours de cristallographie. Livre 1. Cristallographie géométrique. Gay Robert. Paris, Gauthier-Villars, 1959, 255 p., ill., 2900 fr.—Multigr.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 20, 543 (франц.)

6847 П. Прибор для определения касательных к кривой (Appareil de détermination des tangentes à une courbe) [Le Matériel Électrique S. W.]. Франц. пат., № 1142590, 19.09.57

Дается изображение и описание прибора для определения значений тангенсов углов, образованных касательными к кривой в любой ее точке с осью абсцисс. Аппарат состоит из транспортира и зеркала, образующих прямой двугранный угол, ребро которого совпадает с основанием транспортира. Транспортир градуирован значениями тангенсов углов. Для избежания параллакса на каждой грани пластинки, являющейся зеркалом, начерчена прямая, перпендикулярная к основанию транспортира. Одна из этих прямых проходит через центр транспортира, а другая пересекается с прямой, находящейся на транспортире и перпендикулярной к зеркалу. При помощи этого прибора можно начертить кривую, являющуюся производной кривой для данной кривой, не зная уравнения последней; затем тем же методом вычертить кривую, являющуюся производной кривой для этой второй кривой и т. д. Н. В. Наумович

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6848. Краткий обзор исследований по геометрии треугольника. Обз. І. Гайдук Ю. М., Хованский А. Н., Матем. в школе, 1958, № 5, 50—58

Обзор исследований по геометрии треугольника, начиная с работы Л. Эйлера и до настоящего времени. Перечисляются результаты, полученные Эйлером, Фейербахом, Ленгли, Штейнером, Лемуаном, Гурмтаем, Помпейю, Морлеем, Лебегом. А. И. Фетисов

6849. Две зависимости в треугольнике. Метельский (Dwie zależności w trójkącie. Metelski Kazimierz), Matematyka, 1958, **11**, № 4-6, 3—4 (польск.)

Без помощи теоремы Пифагора доказывается теорема Карно о квадрате стороны, лежащей против острого или тупого угла треугольника, а также находится зависимость между отрезками, на которые ортоцентр делит высоты треугольника. В. Ф. Рогаченко

6850. Трисекция угла — пример задачи, связанной со многими разделами математики. Лео (Angle trisection — an example of «undepartmentalized» mathematics. Leo O. S. F.), Math. Teacher, 1959, **52**, № 5, 354—355 (англ.)

Приводится решение задачи о трисекции произвольного угла при помощи кривой $y = 3x - 4x^3$. Показывается, что при решении этой проблемы необходимо пользоваться алгеброй, геометрией, тригонометрией и аналитической геометрией. Дается чертеж и показывается, как выполняется трисекция угла в 60° и некоторых углов, кратных 60°. Н. В. Наумович

6851. Трисекция угла. Робусто (Trisecting an angle. Robusto C. Carl), Math. Teacher, 1959, **52**, № 5, 358—360 (англ.)

Подчеркивается, что четыре знаменитые задачи на построение (удвоение куба, квадратура круга, построение правильных многоугольников и трисекция угла) неразрешимы циркулем и линейкой при условии, что линейка используется только для проведения прямой через две данные точки. Если же линейка используется как другой инструмент, то область выполняемых ими построений значительно расширяется. В качестве иллюстрации приводится найденное Архимедом деление угла на три равные части, осуществляемое циркулем и линейкой с делениями. Далее приводится решение задачи о трисекции угла, выполняемое с помощью конхоиды Никомеда и улитки Паскаля. Н. В. Наумович

6852. Теорема Морлея о трисектрисах. Рис (Morley's trisector theorem. Rees C. E.), Math. Gaz., 1958, **42**, № 342, 315—316 (англ.)

Теорема. Внутренние трисектрисы углов произвольного треугольника, прилежащих к одной и той же стороне, попарно пересекаются в вершинах равностороннего треугольника.

Прямое доказательство (РЖМат, 1956, 3225) сложно. Предлагается косвенное доказательство, состоящее в построении на сторонах произвольного равностороннего треугольника треугольников с подобранными определенным образом углами, зависящими от углов данного треугольника. Таким образом, получаются три новые точки — вершины построенных треугольников. При каждой вершине на стороне построенного треугольника построена третья часть соответственного угла данного треугольника. Точка пересечения двух сторон таких углов лежит на одной прямой с двумя вершинами треугольников. Полученный треугольник подобен данному. С. И. Зетель

6853. Соединение двух прямых окружностями равных радиусов. Сельвини (Raccordo di due rettifili con curva e controcurva circolari d'ugual raggio. Selvini Attilio), Geom. ital., 1958, **13**, № 12, 9—13 (итал.)

Проблема соединения двух прямых, пересекающихся под углом $\beta = \angle T_1 V T_2$, окружностями одинакового радиуса с точками прикосновения T_1 и T_2 сводится обычно к отысканию общего радиуса R двух окружностей и последовательному определению углов $\alpha_1 = \angle T_1 O_1 T_0$, $\alpha_2 = \angle T_2 O_2 T_0$, где O_1, O_2 суть центры окружностей, а T_0 — точка их взаимного касания внутри угла β. При этом обычно получаются громоздкие формулы, содержащие радикалы. В работе дан более простой алгорифм вычисления α_1, α_2 и R без употребления радикалов. Совмещая вершину V угла β с началом декартовой прямоугольной системы координат и сторону VT_1 с осью OX, автор простыми вычислениями выводит основные формулы

$$\alpha_1 = \gamma - \varphi;\ \alpha_2 = \alpha_1 - \beta;\ R = \frac{bt_2}{2\sin\alpha_1 - \sin\beta},$$

причем

$$a = \frac{t_1}{t_2},\ b = \cos\beta - a,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{\sin\beta},$$

$$\sin\gamma = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cos\varphi\,\frac{1-a}{2},$$

а t_1, t_2 суть длины отрезков VT_1 и VT_2. Указана наиболее рациональная последовательность вычислений и дан расчет конкретного примера, решенного ранее по другим формулам. В. С. Малаховский

6854. Лекции по геометрии с упражнениями и задачами для учительских семинарий. Мирра (Lezioni di geometria con esercizi e problemi per gli istituti magistrali. Mirra Costante. Milano, L. Trevisini, 1958, 575 p., ill., 1600 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 5, 179 (итал.)

6855 К. Геометрия для старших классов средней школы. Ди-Ной (Geometria per le scuole medie superiori. Vol. 3. 2a ed. Di Noi Salvatore. Milano, Soc. ed. Dante Alighieri, 1958, IV, 175 p., ill., 650 L.), Bibliogr. naz. ital., 1958, **1**, № 6, 220 (итал.)

6856 К. Геометрия для 3-го класса. Ру, Мьеллу (Géométrie. Classe de 3-e. Programmes, du 31 juil. 1958. Roux Léon, Miellou Edmond. Grenoble, Didier et Richard 1958, 191 p., ill., 640 fr.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 24, 655 (франц.)

6857 К. Упражнения по геометрии. Каронне (Exercices de géométrie. 8-e livre. Les courbes usuelles. 6-e éd. Caronnet Théodore. Paris, Vuibert, 1955, 256 p., ill.), Bibliogr. France, 1959, **148**, № 33—35, 879 (франц.)

6858 К. Планиметрия (геометрия на плоскости). Цвергер, Клуг, Теллер, Николь (Planimetrie (ebene Geometrie). Zwerger M., Klug J. 25. völlig neu bearb. 7. Aufl. Teller Otto, Nikol Friedrich. München, Lindauer, 1959, 188 S., ill., 5.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 29, 2226 (нем.)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6859. Исследование развертки линии пересечения эллиптического конуса с плоскостью. Бутова Г. В., Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1959, вып. 37, 262—271

Указан способ построения развертки эллиптического конуса и линии пересечения этого конуса с плоскостью на развертке. Для построения угла развертки проводится сфера радиуса r с центром в вершине данного конуса и вычисляется длина кривой S, полученной от пересечения конуса со сферой. Угол развертки $\alpha = 360S/2\pi r$. Для построения на развертке произвольной точки M, принадлежащей линии пересечения конуса с плоскостью, вычисляется расстояние M от вершины конуса.

В. А. Мачевич

6860. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии в пространстве. Михайлович (Elementi vektorske algebre i analitičke geometrije u prostoru. Mihailović D. Beograd, NOLIT, 1958, 179 s., il.) (сербо-хорв.)

Университетский курс (для технических факультетов), содержащий рассмотрение следующих вопросов. Элементы векторной алгебры. Скаляры и векторы. Элементы вектора. Обозначения. Классификация векторов. Предмет векторной алгебры. Сложение векторов; определение; законы сложения векторов. Вычитание векторов. Умножение вектора на скаляр. Линейная комбинация векторов. Коллинеарные и компланарные векторы. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Правая и левая координатные системы. Радиус-вектор точки. Скалярное произведение двух векторов; определение, механическая интерпретация, свойства. Законы скалярного умножения. Векторное произведение двух векторов; вектор площади; определение векторного произведения двух векторов, свойства, механическая интерпретация. Законы векторного умножения. Аналитическое выражение векторного произведения. Смешанное произведение трех векторов; аналитическое выражение и свойства. Двойное векторное произведение. Полярные и аксиальные векторы. Взаимные системы векторов.

Элементы аналитической геометрии в пространстве. Определение положения точки. Полярно-цилиндрические координаты. Система сферических координат. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Радиус-вектор центра тяжести треугольника. Площадь треугольника. Общее уравнение плоскости. Различные виды уравнения плоскости. Расстояние точки от плоскости. Угол между двумя плоскостями. Уравнение пучка плоскостей. Точка пересечения трех плоскостей. Прямая линия. Уравнения кривой в пространстве. Прямая как пересечение двух плоскостей. Различные виды уравнений прямой. Угол между двумя прямыми. Условие пересечения двух прямых. Расстояние начала координат от прямой. Расстояние точки от прямой. Расстояние между двумя параллельными прямыми. Общий перпендикуляр двух прямых и кратчайшее расстояние между ними. Угол между прямой и плоскостью. Точка пересечения прямой и плоскости. Общее уравнение поверхности 2-го порядка. Исследование методом пересечения. Сфера, эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды. Поверхности вращения; векторное уравнение поверхности вращения. Цилиндрические, конические, коноидные поверхности.

В книге много содержательных примеров. Исследование ведется методами векторной алгебры. Автор не рассматривает свойств поверхностей 2-го порядка, ограничиваясь изучением их формы. А. С. Смогоржевский

6861. Арифметическая геометрия. Келер Э., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956. **4**. М., АН СССР, 1959, 14

6862 К. Оптика конических сечений. Дорфман А. Г. М., Физматгиз, 1959, 31 стр., илл., 40 к.

6863 К. Элементы аналитической геометрии с приложением финансовой математики. Каннароцци (Elementi di geometria analitica con un'appendice di matematica finanziaria. Per ist. tecn. agrar. per geometri e industr. Cannarozzo Salvatore. Roma, A. Signorelli, 1958, 383 p., ill.), Bibliogr. nella ital., 1958, **1**, № 7, 262 (итал.)

6864 К. Аналитическая геометрия. [Учебник для втузов]. Изд. 24-е, стереотипн. Привалов И. И. М., Физматгиз, 1959, 299 стр., илл., 6 р. 90 к.

ПРОЕКТИВНАЯ И НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

6865. Дискриминант полного четырехугольника. Штейн (Eine Diskriminante des vollständigen Vierecks. Stein Erwin Walter), Math. Nachr., 1957, **17**, № 3-6, 137—142 (нем.)

Рассматривается полный четырехугольник $ABCD$ с сторонами a, b, c, d, e, f. Если среди точек $A, B, C, \ldots$ не имеется (имеется) ни одной (одна), которая лежала бы внутри треугольника, образованного остальными тремя точками, то такой четырехугольник называется четырехугольником первого (второго) рода. Если же по крайней мере три вершины лежат на одной прямой, то говорят, что четырехугольник выродившийся.

Строится главный дискриминант $H = 56 F_A F_B F_C F_D = -a^2 c^2 (a^2 + c^2)(-a^2 - c^2 + b^2 + d^2 + e^2 + f^2) - b^2 d^2 \times (b^2 + d^2)(-b^2 - d^2 + a^2 + c^2 + e^2 + f^2) - e^2 f^2 (e^2 + f^2) \times (-e^2 - f^2 + a^2 + c^2 + b^2 + d^2) + a^2 b^2 e^2 (c^2 + d^2 + f^2) + a^2 d^2 f^2 (b^2 + c^2 + e^2) + c^2 d^2 e^2 (a^2 + b^2 + f^2) + b^2 c^2 f^2 \times (a^2 + d^2 + e^2) - (-a^4 c^4 - b^4 d^4 - e^4 f^4 + a^2 c^2 b^2 d^2 + a^2 c^2 e^2 f^2 + b^2 d^2 e^2 f^2)$, где F_A, F_B, F_C, F_D суть площади треугольников (DAB), (ABC), (BCD), (CDA). Главный дискриминант будет положительным, отрицательным или равным нулю, в зависимости от того, будет данный четырехугольник первого, второго рода или выродившимся. Затем рассматриваются частные случаи, приводящие к экстремальным значениям главного дискриминанта. П. Г. Колобов

6866. Плоская дважды параболическая геометрия. Ди-Ной (Geometria piana doppiamente parabolica. Di Noi S.), Period. mat., 1959, **37**, № 1, 18—36 (итал.)

Дается элементарно-геометрическое исследование плоской геометрии, в проективной интерпретации которой абсолютом оказывается некоторая прямая с фиксированной на ней точкой. Основные понятия определены автором в двух предыдущих работах (РЖМат, 1955, 925; 1957, 1709). В реферируемой работе формулируются постулаты указанной геометрии (без исследования их взаимной независимости и непротиворечивости) и приводится целый ряд первоначальных предложений (в-

многих случаях с доказательствами). При этом каждому предложению (или геометрическому образу) ставится в соответствие, двойственное ему, если уже оно само не является двойственным. Так, подобно тому, как прямая есть безграничная открытая совокупность точек, так пучок прямых есть безграничная открытая совокупность прямых. Для каждой точки A можно найти ∞^1 точек, каждая из которых не лежит с A ни на одной прямой (неколлинеарные точки). Совокупность таких точек автор называет виртуальной прямой. Подобно тому, как периметр треугольника может быть как угодно большим, как угодно большой может быть и сумма его углов. Кроме обычного подобия, сохраняющего отношение сходственных отрезков, существует двойственное подобие, сохраняющее отношение углов, а также двойное подобие, сохраняющее как отношение отрезков, так и отношение углов. Все линии, соединяющие две заданные точки, имеют одну и ту же длину, следовательно, прямая не есть кратчайшая. Рассматриваются различные виды движений — перенос, как произведение двух центральных симметрий, центры которых A и B коллинеарны; вращение, как произведение двух аксиальных симметрий, оси которых a и b пересекаются; виртуальный перенос, как произведение двух центральных симметрий с неколлинеарными центрами; симметрия относительно виртуальной прямой, как произведение осевой симметрии и центральной симметрии с центром на оси. Произвольное движение есть произведение ряда аксиальных симметрий на ряд центральных симметрий. В отличие от евклидовой геометрии одних осевых симметрий недостаточно для получениях всех движений. Та сторона треугольника, которая содержит точку, неколлинеарную противолежащей вершине, равна сумме двух других сторон. Не существует равносторонних треугольников (в упомянутом выше реф. 925 ошибка). Формулируются признаки равенства треугольников. В заключение рассматривается парабола, определенная как место точек P полуплоскости с границей t, расстояния которых от некоторой точки O на t пропорциональны углам, образуемым OP с t. Такая кривая имеет много общих черт с окружностью, в частности оказывается кривой постоянной кривизны. Н. И. Кованцов

6867. Изотопия поверхностей второго порядка в геометрии Лобачевского. Федорова Р. Н., Сакартвелос ССР Мецниереба та Академиис моамбе, 1958, 20, № 2, 137—142 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1958, 20, № 2, 137—142

6868. Изотопия поверхностей второго порядка в пространстве Лобачевского. I. Федорова Р. Н., Уч. зап. Ивановск. гос. пед. ин-та, 1958, 18, 157—178

Две фигуры F и F', лежащие в пространстве близости R, называются инфинитезимально изотопными, если существует эквиморфизм пространства R на себя, переводящий F в F'. Автор дает классификацию поверхностей второго порядка в пространстве Лобачевского H^3 с точки зрения инфинитезимальной изотопии. В 1-й части статьи изложена классификация первых трех топологических типов (см. ниже), полностью классификация описана в заметке автора (реф. 6867).

Автор насчитывает 43 различных метрических типа действительных невырожденных поверхностей второго порядка; этим дополняется метрическая классификация этих поверхностей, данная Кулиджем (Coolidge J. L., Trans. Amer. Math. Soc., 1903, 161—170; The elements of non-euclidean geometry, Oxford, 1909 и 1927), указавшим лишь 34 типа. Эти 43 типа распределяются в четыре топологических типа: 1) тип сферы, 2) тип клиффордовой поверхности (эквидистанта прямой), 3) тип гиперсферы (эквидистанта плоскости), 4) тип орисферы. Тип 1) образует также один инфинитезимальный тип, тип 2) распадается на три инфинитезимальных типа, тип 3) — на четыре. В. А. Ефремович

6869. Кривые 2-го порядка в плоскости Лобачевского, изображаемые на карте Клейна параболами. Трайнин Я. Л., Уч. зап. Новосиб. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 13, 89—94

Показывается, что кривую на плоскости Лобачевского, имеющую в неоднородных координатах Бельтрами уравнение $y = -\frac{\beta}{2}(x^2 - 1)$, можно определить как геометрическое место точек пересечения прямой, проходящей через точку $(0, \beta)$, с прямой, перпендикулярной к оси OX в середине отрезка, отсекаемого первой прямой на оси OX. Рассматриваются случаи, когда точка $(0, \beta)$ лежит внутри абсолюта, на абсолюте и вне абсолюта.

Примечание референта. Вывод уравнения рассмотренного геометрического места становится намного проще, если исключить параметр α из уравнения $y - \beta = -\frac{\beta}{\alpha}x$ при помощи соотношения $\alpha = \frac{2x}{1+x^2}$, которое непосредственно следует из формулы для косинуса угла параллельности удвоенного отрезка.

Л. Я. Березина

6870. О некоторых аналитических признаках расположения прямых в пространстве Лобачевского. Ястребов Ю. Н., Вакарчук Б. С., Тр. Ленингр. ин-та инж. водн. трансп., 1959, вып. 26, 274—280

Чтобы прямые гиперболического пространства

$$x^i = \bar{x}^i \operatorname{ch}\frac{u}{r} + \bar{A}^i \operatorname{sh}\frac{u}{r},\quad y^i = \bar{y}^i \operatorname{ch}\frac{v}{r} + \bar{B}^i \operatorname{sh}\frac{v}{r}$$

$$(i = 0, 1, 2, 3),$$

заданные в вейерштрассовых координатах, были сходящимися, необходимо и достаточно выполнение условий: $\bar{x}^i + \bar{A}^i = \lambda(\bar{y}^i + \bar{B}^i)$, либо $\bar{x}^i - \bar{A}^i = \mu(\bar{y}^i - \bar{B}^i)$.

Я. П. Бланк

6871. О случаях совпадения гиперболической величины угла в плоскости Лобачевского с его евклидовой величиной на карте Бельтрами. Мартыненко В. С., Укр. матем. ж., 1959, 11, № 1, 109—110

На карте Бельтрами плоскости Лобачевского (евклидов круг радиуса 1 с центром O) берется точка O^1, отличная от точки O, и лучи, исходящие из этой точки. Рассматривается случай, когда гиперболическая величина угла φ двух лучей совпадает с его евклидовой величиной. Изучается геометрическое место точек A, являющихся концами биссектрис углов этих лучей, имеющих длину, равную $\operatorname{tg}\alpha$. Это геометрическое место оказывается кривой 4-го порядка, обладающей центром симметрии и двумя парами осей симметрии, причем центр симметрии является четырехкратной точкой самопересечения. М. А. Джавадов

6872. О теории поверхностей в пространствах с распадающимся абсолютом. Хатипов А. Э.-А., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 80—82

6873. О перспективах конечных проективных плоскостей. Уагнер (On perspectivities of finite projective planes. Wagner A.), Math. Z., 1959, 71, № 2, 113—123 (англ.)

Пусть π — конечная проективная плоскость и Γ — группа ее коллинеаций. Если для каждой точки $C \in \pi$ в Γ существует $(C - l)$-коллинеация с $C \in l$, а для каждой прямой $l \in \pi$ в Γ существует $(C - l)$-коллинеация с $C \in l$, то π дезаргова. При выполнении тех же условий, но с $C \notin l$ имеет место один из следующих случаев: а) все преобразования из Γ оставляют на месте некоторую прямую h, π — веблен-веддербарнова со специальной прямой h; б) дуально а); в) нет ни точек, ни

прямых, остающихся на месте при всех преобразованиях из Г и π — дезаргова. Приводится пример недезаргоной плоскости, удовлетворяющий условиям последнего утверждения. Частные случаи приведенных теорем были получены Андре (РЖМат, 1956, 3256), Глисоном (РЖМат, 1957, 6200), Остромом (РЖМат, 1958, 709) и Хьюзом (РЖМат, 1959, 8434). Л. А. Скорняков

6874 Д. **Дифференциально-геометрические свойства некоторых кривых и поверхностей в пространстве Лобачевского.** Вакарчук Б. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Киевск. политехн. ин-т, 1959

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6875. **Графоаналитический метод точного вычисления прямоугольных координат.** Щепинский (Metoda wykreślno-analityczna dokładnego obliczania współrzędnych prostokątnych. Szczepiński Wojciech), Pomiary, automat., kontrola, 1959, **5**, № 1, 30—31 (польск.)

Излагается основанный на теории малых ошибок графоаналитический метод вычисления прямоугольных координат при измерении пластин точных механизмов. Этот метод позволяет значительно ускорить вычисления сравнительно с классическим аналитическим методом. В. Ф. Рогаченко

6876. **Об одном практическом приеме в центральной аксонометрии.** Рюйк О. Я., Палувер Н. В. Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1958, **А**, № 145, 14 стр., илл.

Дан простой прием построения перспективы объекта на основе аксонометрического метода. Для однозначного фиксирования точки зрения и положения координатного трехосника вершина его взята в картинной плоскости и в ней же задан остроугольный треугольник схода координатных осей. Этот прием дает возможность легко определить главную точку картины, перспективы координатных осей и перспективы прямых, ортогонально проектирующих точку пространства на координатные плоскости, и затем построить перспективу пространственной точки как центр гомотетии, определяемый треугольником схода осей и треугольником следов лучей, проектирующих точку ортогонально на координатные плоскости. Далее рассматривается построение перспективы точки для случая диметрии и изометрии. В конце работы для простоты построения перспективы предлагается отнести объект к равномасштабной косоугольной системе координат, у которой угол между U и V равен 60° и ось W перпендикулярна к плоскости UV. А. Р. Зенгин

6877. **Об одном случае прямоугольного аксонометрического проектирования.** Дешевой Г. М., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1959, вып. 50, 11—22

На примерах построения проекций точки, реконструкции ее координат из чертежа и решения элементарных задач показаны приемы прямоугольного, центрального и косоугольного (параллельного плоскости H) аксонометрического проектирования элементов на горизонтальную проектирующую картину, заданную следами в системе координатных плоскостей. Для реконструкции точки, помимо основной и вторичной (горизонтальной) проекций точки, необходимо иметь проекцию ее координаты на горизонтальный след картины. Обосновывается простота решения метрических задач в некоторых случаях. Наиболее интересен случай центрального проектирования. Л. Н. Лихачев

6878. **Обобщение теоремы Штаудта, полученное при помощи многомерной начертательной геометрии.** Наумович Н. В., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**, М., АН СССР, 1959, 77—78

6879. **Элементы графических вычислений. I.** Берни (Elementi di calcolo grafico. Berni Arminio) Riv. mecc., 1959, **10**, № 204, 19—21 (итал.)

6880. **Элементы графических вычислений. II.** Берни (Elementi di calcolo grafico. II. Berni Arminio), Riv. mecc., 1959, **10**, № 211, 13—16 (итал.)

Часть I см. реф. 6879. Излагаются практические приемы для построения отрезка $x = ma$, где a — данный отрезок, m — целое рациональное или иррациональное число. Рассматриваются частные случаи при $m = e$ (основание натуральных логарифмов), когда m слишком велико для вмещения графика на чертежном листе и когда m является произведением нескольких сомножителей. Г. И. Глейзер

6881. **Элементы графических вычислений. III.** Берни (Elementi di calcolo grafico. III. Berni Arminio), Riv. mecc., 1959, **10**, № 214, 19—22 (итал.)

Продолжается (реф. 6880) изложение разных геометрических способов построения формул, среди которых:

$$1)\ x^2 + ax - b^2 = 0, \quad 2)\ x^2 - ax + b^2 = 0,$$

$$3)\ x^2 = a(a - x),\ 4)\ x = \frac{a^2 + b^2}{a + b},\ 5)\ x = \sqrt{\frac{a^2 + c}{b}},$$

$$6)\ x = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2}}{d},\ 7)\ x = \sqrt{\sqrt{a^2 - \frac{cd}{b^2}}\sqrt{a^2 + 5b}}$$

Г. И. Глейзер

6882 К. **Тезисы докладов и сообщений на Совещании кафедр начертательной геометрии и черчения московских высших технических учебных заведений, с участием представителей кафедр периферийных втузов,** Москва, 1959, М-во высш. образования. Метод. упр. М., 1959, 51 стр.

6883 К. **Тени в ортогональных проекциях, аксонометрии и перспективе. Учебн. пособие для студ. строит. специальностей.** Лупанов Е. И., Клопотовский И. С. Ленингр. ин-т инж. ж.-д. трансп. Л., 1959, 103 стр., илл., 1 р. 50 к.

6884 К. **Начертательная геометрия.** Бубенников А. В. **Лекция 1. Основные методы проектирования геометрических форм на плоскости.** 48 стр., илл., 90 к. **Лекция 2. Точка и отрезки прямых линий в ортогональных проекциях.** 34 стр., илл., 65 к. **Лекция 3. Плоскость в ортогональных проекциях. Основные позиционные задачи,** 58 стр., илл., 1 р. М., Углетехиздат, 1959.

6885 К. **Некоторые вопросы теории перспективы и физической теории теней.** Тимрот Е. С., Краснеев Г. П. Куйбышев, Книгоиздат, 1959, 52 стр., илл., 2 р. 80 к.

6886 К. **Аксонометрические проекции. [Учебн. пособие для студ. техн. вузов УССР].** Дольский Е. Е., Горленко Б. С. Киев, Госстройиздат УССР, 1959, 189 стр., илл., 5 р. 20 к.

6887 К. **Начертательная геометрия.** Сиротин Д. Е. Минск, Редиздат Белорусск. политехн. ин-та, 1959, 227 стр., илл., 8 р.

6888 К. **Сборник задач по начертательной геометрии. [Для вузов]. 10 изд.** Рудаев А. К. М., Физматгиз, 1959, 344 стр., илл., 9 р. 45 к.

6889 К. **Сборник задач по начертательной геометрии с решениями типовых задач. [Для втузов]. 5 изд.** Арустамов Х. А. М., Машгиз, 1959, 376 стр., илл., 11 р. 10 к.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

6890. **Арифметические вопросы алгебраической геометрии.** Сегре Б., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, **4**, М., АН СССР, 1959, 149

6891. Особые характеры и куспидальные характеры полной алгебраической кривой. Спампинато (Carattere singolare e carattere cuspidale di una curva algebrica completa. Spampinato Nicolò. Rend. Accad. sci. fis. mat. Napoli, 1955 (1956), 22, 123—143) (итал.)

6892. Огибающая и конгруэнция касательных к ветвям двумерной плоской полости или трехмерной полости S_3. Спампинато (Inviluppo e congruenza delle tangenti ai rami di una falda bidimensionale piana o tridimensionale dell' S_3. Spampinato Nicolò. Rend. Accad. sci. fis. mat. Napoli, 1955 (1956), 22, 62—66) (итал.)

6893. Продолжение гиперповерхности комплексного S_4 в квадрипотенциальное поле. Спампинато (Prolungamento di una ipersuperficie dell' S_r complesso nel campo quadripotenziale. Spampinato Nicolò. Rend. Accad. sci. fis. mat. Napoli, 1955 (1956), 22, 67—74) (итал.)

6894. Об условиях рациональности для трипотенциальной поверхности. Спампинато (Sulle condizioni di razionalità per una superficie tripotenziale. Spampinato Nicolò. Rend. Accad. sci. fis. mat. Napoli, 1955 (1956), 22, 75—93) (итал.)

6895. Гиперэллиптические поверхности тридуального S_3 и их комплексные представления. Фадини (Le superficie iperellittiche dell'S_3 triduale e la loro rappresentazione complessa. Fadini Angelo. Rend. Accad. sci. fis. mat. Napoli, 1955(1956), 22, 154—160) (итал.)

6896. Представление в S_5 полной комплексной полости и соответствующей группы бирациональных преобразований. Спампинато (Rappresentazione in S_5 del piano complesso completo e relativo gruppo di trasformazioni birazionali. Spampinato Nicolò. Rend. Accad. sci. fis. mat. Napoli, 1955(1956), 22, 249—261) (итал.)

6897. Трехмерные полости S_5, определенные линейными или суперлинейными ветвями полной алгебраической кривой. Спампинато (Le falde tridimensionali dell' S_5 determinate dai rami lineari e superlineari di una curva algebrica completa. SpampinatoNicolò. Rend. Accad. sci. fis. mat. Napoli, 1955(1956), 22, 202—220) (итал.)

6898. О комплексном умножении. Симура (On complex multiplications. Shimura Goro), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 23—30 (англ.)

Абелевым многообразием (м.) с областью операторов R называется пара (A, i), состоящая из абелева м. A размерности n над полем k и изоморфизма i кольца R целых некоторого поля алгебраических чисел K степени $2n$ в кольцо эндоморфизмов м. A. Если $S \in R$, то через $g(S, A)$ обозначается множество тех $t \in A$, для которых $i(s)t = 0$ при $s \in S$; при этом, если из $i(r)t = 0$ следует $r \in S$, то t называется примитивным элементом в $g(S, A)$. Если (A, i), (A', i') — два абелевых м. с одной и той же областью операторов R, то гомоморфизм $\lambda : A \to A'$, обладающий тем свойством, что $\lambda i(r)x = i'(r)\lambda x$ при $r \in R$, $x \in A$, называется R-гомоморфизмом (A, i) в (A', i'). Если при этом P — идеал в R и для производящей точки x м. A над k поле $k(\lambda x)$ совпадает с композитом всех полей $k(i(s)x)$ при $s \notin P$, то λ называется P-умножением A в A' и A' — P-образом м. A. Пусть (A, i) определено над полем комплексных чисел, K^* — минимальное нормальное расширение поля рациональных чисел Q, содержащее K, G — группа Галуа поля K^*/Q и H — ее подгруппа, соответствующая полю K. Дифференциал δ_r отображения $i(r)$ определяет линейный эндоморфизм пространства инвариантных дифференциальных форм первой степени на A, и в G можно найти n элементов $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ таким образом, чтобы для любого r собственные значения δ_r были равны $r^{\sigma_1}, \ldots, r^{\sigma_n}$; тогда говорят, что м. A-типа $(K, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, причем если м. данного типа существует, то таковое существует и над некоторым алгебраическим полем конечной степени. Далее, через H_0 обозначается подгруппа группы G, состоящая из всех элементов σ, таких что $\bigcup_i H\sigma_i\sigma = \bigcup_j H\sigma_j$, K_0 — соответствующее подполе K^*, а $\tau_1, \ldots, \tau_s$ — такие элементы из G, что

$$\bigcup_1^n \sigma_j^{-1} H = \bigcup_1^s H_0\tau_l, \quad n[H:1] = s[H_0:1].$$

Теория редукции м. A по модулю простого идеала применима и к абелевым м., однако уместно подчинить рассматриваемые идеалы некоторым ограничениям (если они выполнены для P, говорят, что A не имеет дефекта в P; абелево м. не имеет дефекта относительно почти всех своих дивизоров), тогда редукция абелева м. с данной областью операторов приводит снова к абелеву м. с той же областью операторов.

Доказывается, что если (A, i) — абелево м. с областью операторов R, определенное над алгебраическим числовым полем k конечной степени и имеющее тип $(K, \sigma_1, \ldots, \sigma_n)$, $\widetilde{P}$ — простой идеал в K_0, P — его простой делитель в k, $NP = P$, причем P в K^* не разветвляется и A не имеет дефекта в P, и если обозначить через π отображение $\pi E = E^P$ м. $\overline{A}$, полученного из A редукцией по модулю P в $\overline{A}^P$, то $\overline{A}^P$ будет $\widetilde{P}^{\tau_1} \ldots \widetilde{P}^{\tau_s}$-образом м. $\overline{A}$, а π — $\widetilde{P}^{\tau_1} \ldots \widetilde{P}^{\tau_s}$-умножением $\overline{A}$ в $\overline{A}^P$. В тех же условиях k содержит поле классов K_1 над K_0 (соответствующее группе H_1 всех идеалов a из K_0, для которых $a^{\tau_1} \ldots a^{\tau_s}$ — главный идеал в K); если S — идеал в R и t — примитивный элемент $g(S, A)$, то $k(t)$ содержит поле классов K_S над K_0 (соответствующее группе H_S всех идеалов a в K_0, таких что $a^{\tau_1} \ldots a^{\tau_s}$ принадлежит лучу по mod S в K). Доказательства скицированы.

В. В. Морозов

6899. К теории комплексного умножения. Вейль (On the theory of complex multiplication. Weil André), Proc. Internat. Sympos. Algebr. Number Theory, 1955, Tokyo, 1956, 9—22 (англ.)

Изучая кольцо автоморфизмов абелева многообразия (м.) A, автор устанавливает, что каждому такому м. над полем характеристики нуль сопоставляется некоторое вполне вещественное поле k_0 степени n над полем Q рациональных чисел и CM-расширение последнего, т. е. система $(k, \{\varphi_\lambda\})$ вполне мнимого квадратичного расширения k поля k_0 и n изоморфизмов $\varphi_\lambda : k \to Q$, индуцирующих все изоморфизмы k_0 в Q. Записав это расширение как $k_0(\xi)$, он называет его примитивным, если его нельзя представить в виде $k_0(\xi_1)$, где ξ_1^2 лежит в собственном подполе поля k_0. Обратно, каждое CM-расширение вполне вещественного поля степени n определяет категорию взаимно изогеничных абелевых м. размерности n, которые будут простыми, если CM-расширение примитивно. В последнем случае кольцо эндоморфизмов м. A можно отождествить с подкольцом $\widetilde{R}$ кольца $\widetilde{O}$ целых поля k, и оказывается, что данному CM-расширению $(k, \{\varphi_\lambda\})$, кольцу эндоморфизмов $\widetilde{R}$ и рангу r соответствует не более конечного числа типов поляризованных абелевых м. с точностью до изоморфизмов над универсальной областью. Каждый такой тип однозначно характеризуется своим куммеровым м. V_0, заданным над полем модулей k_0 (описывая соответствующее построение, автор ссылается на более

общее построение в позднейшей статье (РЖМат, 1958, 1510)).

Формулируются основные задачи теории комплексного умножения для простых абелевых м.: 1) описание полей k_0 для заданных $(k, \{\varphi_\lambda\})$, $\widetilde{R}$ и r; 2) описание полей, порожденных над k_0 образами на V_0 точек конечного порядка на A для каждого типа; 3) определение дзета-функции абелева м. данного типа. Приводится решение проблем 1) и 2) для случая $\widetilde{R} = \widetilde{O}$.

В. В. Морозов

6900 К. Интегралы алгебраических функций и плоские алгебраические кривые. Хаузер, Бурау (Integrale algebraischer Funktionen und ebene algebraische Kurven. Hauser Wilhelm, Burau Werner, Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1958, 103 S., ill., 12 Taf.) (нем.)

Изложены общеизвестные факты классической теории плоских алгебраических кривых, в частности, кривых 3-го и 4-го порядка. Рассмотрено вычисление абелевых интегралов, связанных с алгебраическими кривыми, допускающими рациональное параметрическое представление.

В. Н. Скрыдлов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

6901. Одна элементарная проблема дифференциальной геометрии. Биран (Un problème élémentaire de géométrie différentielle. Biran Lutfi), Istanbul üniv. fen. fac. mecm., 1956, **A21**, № 3-4, 239—243 (франц.; рез. турецк.)

Когда точка x описывает пространственную кривую $[x]$, центр $y^{(2)}$ ее соприкасающейся сферы описывает пространственную кривую $[y^{(1)}]$. Пусть $y^{(n)}$ — центр соприкасающейся сферы кривой $[y^{(n-1)}]$, полученной $(n-1)$-кратным повторением предыдущего построения из исходной кривой. Доказывается следующая теорема: Если точка $y^{(n)}$ стремится при $n \to \infty$ к предельному положению y, то это положение будет одним и тем же для всех точек некоторой дуги кривой $[x]$, содержащей точку x. Эта теорема является обобщением соответствующего результата Чезаро о центрах кривизны последовательных эволют плоской кривой (Cesaro E., Lezioni di Geometria Intrinseca, Napoli, 1896, стр. 30—31).

М. А. Акивис

6902. Катящиеся многоугольники. Йейтс (Rolling polygons. Yates Robert C.), Amer. Math. Monthly, 1959, **66**, № 2, 130—135 (англ.)

Статья посвящена нахождению длин и площадей циклоиды, эпициклоид и гипоциклоид элементарными средствами. Кроме основ планиметрии и тригонометрии, использовано лишь понятие предела и теорема о пределе отношения $\frac{\sin x}{x}$. Правильный n-угольник катится без скольжения по прямой l. За один полный оборот n-угольника его вершина P описывает кривую линию L длины L_n, опирающуюся концами на прямую l и состоящую из $n-1$ дуг окружностей. Радиусы r_k $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ этих окружностей равны расстояниям от P до всех остальных вершин n-угольника. Каждая дуга соответствует центральному углу $\frac{2\pi}{n}$. Площадь B_n, ограниченная кривой L и прямой l, равна сумме площадей $n-1$ круговых секторов плюс сумма площадей $n-2$ треугольников, заключенных между секторами. Очевидно, последняя сумма равна площади n-угольника. Когда $n \to \infty$, n-угольник в пределе превращается в окружность, кривая L — в арку циклоиды, а величины L_n и B_n — соответственно в длину этой арки и в ограниченную ею площадь. Аналогичное решение задачи дано для нефроиды (nephroid — эпициклоида, состоящая из 2 арок) и астроиды.

А. М. Комиссаров

6903. Проблемы, связанные с кривыми Бертрана. Гёненч (Problemi in connessione colle curve di Bertrand. Gönenç Süeda), Istanbul üniv. fen. fac. mecm., 1955, **A20**, № 3-4, 141—147 (итал.; рез. турецк.)

Исследуется пара кривых и пара линейчатых поверхностей, вложенных в трехмерное гиперболическое пространство, сопровождающие триэдры которых в соответствующих точках инвариантно связаны.

В § 1 строятся канонические реперы кривой и линейчатой поверхности, Гиперболическое пространство интерпретируется внутри абсолюта проективного пространства P_3. Точка X гиперболического пространства представляется кватернионом $X = ix_0 + e_1x_1 + e_2x_2 + e_3x_3$, удовлетворяющим после нормировки соотношению $X\bar{X} = -1$, где $\bar{X}$ — сопряженный кватернион. Внешняя точка Y абсолюта нормируется так, чтобы $Y\bar{Y} = +1$. Модифицируя закон умножения в алгебре кватернионов $(i^2 = -1;\ e_j^2 = -1;\ i \cdot e_j = e_j \cdot i;\ e_j \cdot e_k = e_l = -e_k e_j)$, автор получает, что коэффициенты при базисных векторах i, e_j, e_k произведения $X\bar{Y}$ суть плюккеровы координаты прямой XY. В силу этого аналитическая прямая R задается формулой $R = X\bar{Y}$, причем $R + \bar{R} = 0$; $R\bar{R} = -1$ в силу вышеупомянутых нормировок. Возникает аналогия при изучении точечных и линейных многообразий. Для расстояния r между двумя точками X и X^* выведена формула $\frac{1}{2}(X\bar{X}^* + X^*\bar{X}) = -\operatorname{ch} r$. Дана формула $\frac{1}{2}(R\bar{R}^* + R^*\bar{R}) = -\cos(\theta + ir)$, определяющая угол θ и расстояние между прямыми R и R^*. Получены деривационные формулы канонического репера точечного однопараметрического многообразия

$$dX = X_1\sigma;\quad dX_1 = X\sigma + X_2\rho;\quad dX_2 = -X_1\rho + X_3\tau;$$
$$dX_3 = -X_2\tau,$$

где ρ/σ и τ/σ суть инварианты кривой, называемые соответственно, ее кривизной и кручением. В силу выбора репера достаточно рассмотреть аналитические прямые R_j тетраэдра, исходящие из точки X, так как противоположные ребра R_j^* связаны соотношениями $R_j = iR_j^*$. Для однопараметрического линейчатого многообразия, следовательно, можно ограничиться тремя деривационными формулами с комплексными коэффициентами. Рассматривается поверхность $R_1(t)$, образованная касательными к пространственной кривой $X(t)$. Для канонического репера этой поверхности как линейчатого однопараметрического многообразия выведены деривационные формулы $dR_1 = \rho R_2$; $dR_2 = -\rho R_1 + (\tau - i\sigma)R_3$; $dR_3 = -(\tau - i\sigma)R_2$.

В § 2 изучается пара линейчатых поверхностей с неизменной связью реперов. Оказывается, что имеется прямая, инвариантная относительно канонических триэдров обеих поверхностей и движение триэдров сводится к вращению вокруг этой прямой и сдвигу вдоль нее (геликоидальным движениям). Для пары поверхностей, образованных касательными к кривым, возникает линейная связь с постоянными коэффициентами между кривизнами и кручениями ребер возврата.

В § 3 для пары пространственных кривых с неизменной связью канонических триэдров получены свойства, аналогичные свойствам кривых Бертрана в евклидовом пространстве E_3.

В. С. Малаховский, В. И. Мошанов

6904. Последовательности Годо и ассоциированные последовательности Лапласа проективно-минимальной поверхности. Су Бу-цин (Godeaux sequences and associate Laplace sequences of a projective minimal surface. Su Buchin), Bull. cl. sci. Acad. roy. Belgique, 1957, **43**, № 8, 569—576 (англ.)

В проективном пространстве S_3 рассматриваются проективно-минимальная поверхность S, ее преобразование Демулена — поверхность S^* и последовательности Годо поверхностей S и S^*:

$$(\mathrm{L})\ U_{(n)}, \ldots, U_{(1)}, U, V, V_{(1)}, \ldots, V_{(n)}, \ldots$$

$$(\hat{\mathrm{L}})\ \hat{U}_{(n)}, \ldots, \hat{U}_{(1)}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{V}_{(1)}, \ldots, \hat{V}_{(n)}, \ldots$$

С помощью этих двух последовательностей (L) и ($\hat{\mathrm{L}}$) строятся две прямолинейные конгруэнции (W). Изучаются свойства последовательностей Лапласа (W) и ($\overline{W}$), являющихся образами в проективном пространстве S_5 этих двух конгруэнций W. Н. В. Лактанова

6905. Геометрия линейчатой винтовой поверхности. Куншттеттер (Geometria prostokreślnej powierzchni śrubowej. Kunstetter Stanisław), Mechanik, 1957, **30**, № 12, 531—532 (польск.)

Преобразованием системы декартовых координат уравнения винтовой поверхности приводятся к виду, удобному для определения ее сечений, важных для практических приложений. В. Ф. Рогаченко

6906. О замкнутых поверхностях Вейнгартена. Фосс (Über geschlossene Weingartensche Flächen. Voss K.), Math. Ann., 1959, **138**, № 1, 42—54 (нем.)

В трехмерном евклидовом пространстве поверхность с главными кривизнами k_1, k_2 является поверхностью Вейнгартена, если средняя кривизна $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ и гауссова кривизна $K = k_1 k_2$ зависимы между собой. Ставится вопрос, какие имеются аналитические замкнутые поверхности W. Автор ссылается на работы: Cohn-Vossen S., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl., 1927, 125—134; Hopf H., Math. Nachr., 1951, **4**, 232—249.

Рассматривается на поверхности поле, вообще говоря, непрерывное, ортогональных пар касательных линейных элементов. Пусть o — изолированная особая точка поля. При обходе o и возвращении в первоначальное положение прямоугольный крест линейных элементов совершает поворот на угол $\delta\alpha = k\frac{\pi}{2}$. Индекс j особенности o определяется $j = \frac{1}{2\pi}\delta\alpha = \frac{1}{4}k$. Для замкнутой ориентированной поверхности рода g справедлива формула

$$\sum_j = 2(1-g). \qquad (1)$$

С каждой поверхностью можно связать поле направлений кривизны. Особенности такого поля — точки, где $H^2 - K = 0$, т. е. точки округления. Следуя Хопфу, автор рассматривает аналитический кусок F поверхности, содержащий только одну омбилическую точку, на котором существует предел

$$\lim \left| \frac{H - H_o}{\sqrt{H^2 - K}} \right| = \lambda \qquad (2)$$

при стремлении к омбилической точке. Автор называет точку округления эллиптической, параболической, гиперболической соответственно значениям $\lambda < 1$; $\lambda = 1$; $\lambda > 1$. Совместим начало координат с точкой округления o аналитического куска F и примем за плоскость xy касательную плоскость к F в ее точке o. Пусть $H_o = c$. Возьмем сферу кривизны $z = \zeta(x, y)$, касательную к F в начале o и радиуса $1/c$. Уравнение поверхности F можно записать: $z = \zeta(x, y) + f(x, y)$; в общем случае $f = f^{(n+2)} + \ldots + f^{(\nu+2)} + \ldots$, $\nu > n$, где $f^{(n+2)} = A(x, y)$, $f^{(\nu+2)} = B(x, y)$. Сначала автор изучает поверхности W в первом приближении:

$$H - c = \frac{1}{2}(k_1 - c + k_2 - c) = H^{(n)} + \ldots, \quad H^{(n)} = \frac{1}{2}(A_{xx} + A_{yy}),$$

$$H^2 = K = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right) = T^{(2n)} + \ldots, \quad T^{(2n)} = \left(\frac{A_{xx} - A_{yy}}{2}\right)^2 + A_{xy}^2,$$

$$D = (k_1 - c)(k_2 - c) = D^{(2n)} + \ldots, \quad D^{(2n)} = A_{xx}A_{yy} - A_{xy}^2,$$

где значки x, y внизу означают производные. В комплексных параметрах $w = x + iy$, $\bar{w} = x - iy$, $H^{(n)} = 2A_{w\bar{w}}$, $T^{(2n)} = |2A_{ww}|^2$. Для аналитической поверхности существование предела (2) равносильно выполнению равенства $H^{(n)^2} = \lambda^2 T^{(2n)}$, откуда $|A_{w\bar{w}}| = \lambda |A_{ww}|$.

Применяя к $A_{w\bar{w}}$ и A_{ww} алгебраическую лемму Хопфа, автор приходит к выводу, что предел (2) осуществляется, если F своим членом A совпадает с поверхностью постоянной H, или с трубчатой поверхностью, или с поверхностью вращения. Изучение поверхностей W в повышенном приближении и вспомогательные результаты позволяют доказать для аналитического куска F поверхности W, не состоящего из одних омбилических точек теоремы 2 и 3 автора:

Теорема 2: Пусть o — точка округления на F параболического типа. Через o проходит правильная линия $\Gamma t(u; v) = 0$, $(t_u, t_v) \neq (0, 0)$, вся состоящая из точек округления, и это все точки округления в окрестности o. Пара направлений кривизны приближается к Γ непрерывно, и в пределе одно направление становится касательным к Γ, а другое нормальным.

Теорема 3: Пусть o — омбилическая точка на F гиперболического типа. Тогда нормаль в o служит осью вращения F.

Из теорем 2 и 3 в сочетании с формулой (1) следует теорема 1 автора: единственные аналитические замкнутые поверхности W ($g = 0$) суть поверхности вращения. Автор применяет еще теоремы 2 и 3 к поверхностям более высокого рода. К. Н. Тихоцкий

6907. Об определении поверхности заданием ее 2-й и 3-й квадратичных форм. Рускол Д. Е., Уч. зап. Калининградск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 5, 3—10

Известно, что поверхность в трехмерном евклидовом пространстве E_3 определяется с точностью до движения как своими первым и вторым фундаментальными тензорами $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, удовлетворяющими условиям

$$\overset{1}{K} = \frac{b}{a}, \quad \overset{1}{\triangle}_{[\gamma} b_{\alpha\beta]} = 0, \qquad (1)$$

так и вторым и третьим фундаментальными тензорами $b_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}$, удовлетворяющими условиям

$$\overset{3}{K} = 1, \quad \overset{3}{\triangle}_{[\gamma} b_{\alpha\beta]} = 0. \qquad (2)$$

Здесь через $\overset{1}{K}$ и $\overset{3}{K}$ обозначены гауссовы кривизны первого и третьего фундаментальных тензоров, через $\overset{1}{\triangle}_\gamma$ и $\overset{3}{\triangle}_\gamma$ — символы ковариантного дифференцирования по этим тензорам, через a и b — дискриминанты тензоров $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$, а квадратные скобки обозначают аллернирование (Катан В. Ф., Теория поверхностей, М., 1948).

Отсюда вытекает эквивалентность условий (1) и (2) в том случае, если три тензора $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ и $c_{\alpha\beta}$ удовлетворяют соотношению

$$c_{\alpha\beta} = \widetilde{a}^{\gamma\delta} b_{\gamma\alpha} b_{\delta\beta}, \qquad (3)$$

где $\widetilde{a}^{\gamma\delta}$ — тензор, взаимный тензору $a_{\alpha\beta}$, связывающему эти три тензора на поверхности в E_3.

В настоящей работе эквивалентность условий (1) и (2) для трех тензоров, связанных соотношением (3), доказывается непосредственно аналитически.

М. А. Акивис

6908. Определение поверхности одними лишь абсолютными инвариантами. Рускол Д., Уч. зап. Калининградск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 5, 125—128

Тензорным методом доказывается, что поверхность в трехмерном евклидовом пространстве определяется с точностью до движения пятью своими абсолютными инвариантами K, H, $\Delta(K, K)$, $\Delta(K, H)$, $\Delta(H, H)$ (Здесь K и H — соответственно полная и средняя кривизна поверхности, а Δ — первый дифференциальный оператор Бельтрами). Тем самым улучшается результат Ли и Шеффера, определявших поверхность при помощи ее шести инвариантов (Scheffers J., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Leipzig, 1913).

М. А. Акивис

6909. Определение поверхности по первому тензору и средней кривизне. Рускол Д., Уч. зап. Калининградск. гос. пед. ин-та, 1958, вып. 5, 118—124

Дается новое решение задачи, указанной в заглавии работы.

М. А. Акивис

6910. Две конгруэнции с общими инвариантами F и F'. Карапетян С. Е., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 2, 55—59

Автор рассматривает две конгруэнции (A_1A_2) и $(\overline{A}_1\overline{A}_2)$, между лучами которых установлено взаимное однозначное соответствие. Находит необходимое и достаточное условия того, чтобы указанные конгруэнции имели равные инварианты соответствующих фокальных поверхностей (РЖМат, 1960, 2255). Доказывается, что к любой конгруэнции можно с произволом шести функций одного аргумента присоединить другую конгруэнцию так, чтобы их соответствующие фокальные поверхности имели равные инварианты. Далее, рассматривается случай, когда конгруэнции (A_1A_2) и $(\overline{A}_1\overline{A}_2)$ составляют пару T. В этом случае получаются два особых случая конфигурации Бианки (РЖМат, 1958, 4175 К). Наконец, находятся условия, при которых конгруэнции (A_1A_2) и $(\overline{A}_1\overline{A}_2)$, образующие пару θ, имеют равные фокальные инварианты.

Г. Н. Макеев

6911. Некоторые замечания, относящиеся к конгруэнциям W. Годо (Alcune osservazioni sulle congruenze W. Godeaux Lucien), Rend. Seminar. mat. Univ. e Politecn. Torino, 1953—1954, 13, 39—46 (итал.)

Пусть (x) — поверхность, отнесенная к своим асимптотическим линиям (u, v). Касательные к асимптотическим линиям отображаются на квадрику Клейна Q в S_5 в точки U и V соответственно. Автор рассматривает последовательность Лапласа L, которой принадлежат точки U и V. Эта последовательность автополярна относительно квадрики Q. Если последовательность L в направлении v оканчивается в точке U_n (случай Лапласа), то на поверхности U_{n-1}, касательные к кривой v в точках кривой u образуют конус с вершиной U_n. Когда v меняется, U_n описывает кривую (U_n), зависящую только от v. Рассматривается общий случай, когда (U_n) не лежит в некоторой гиперплоскости. Показано, что в этом случае, если последовательность L в направлении v оканчивается в точке U_n, то в направлении u она оканчивается в точке V_{n+2} (случай Гурса). Если $n=0$, то последовательность L оканчивается в точке U. Это соответствует случаю, когда поверхность (x) — линейчатая, линии u — ее прямолинейные образующие. В направлении u последовательность L оканчивается в этом случае в точке V. Развертывающаяся поверхность (V_1) пересекает квадрику Q в образах флекнодальных касательных поверхности (x). Если $n=1$, то линии u поверхности (x) принадлежат линейным комплексам. Если $n=2$, то полярная гиперплоскость точки U_2 относительно Q — $VV_1V_2V_3V_4$ — не меняется при изменении u. Эта гиперплоскость имеет в точке V касание 5-го порядка с кривой u, лежащей на (V), следовательно эта кривая принадлежит гиперплоскости. Кривая u есть на (V) образ линейчатой поверхности, описанной касательными к кривым v в точках кривой u. Эта линейчатая поверхность названа асимптотической линейчатой поверхностью (а. л. п.) вдоль асимптотической u. В случае $n=2$ эта поверхность принадлежит линейному комплексу.

Рассматривается конгруэнция W, для которой (x) — фокальная поверхность. Пусть $(\overline{x})$ — ее вторая фокальная поверхность. Она также отнесена к линиям (u, v). Строится последовательность $\overline{L}$, аналогичная L. Показано, что если $n=0$, то (x) линейчатая поверхность, образующими которой являются линии u, а а. л. п. вдоль линий u поверхности $(\overline{x})$ принадлежат линейным комплексам; если $n=1$, то а. л. п. вдоль линий u поверхности (x) принадлежат линейным комплексам и а. л. п. вдоль линий u поверхности $(\overline{x})$ также принадлежат линейным комплексам.

Пусть F_0 — линейчатая поверхность, описанная прямолинейными образующими, являющимися линиями u, F_1 — поверхность, асимптотические линии u которой принадлежат линейным комплексам, F_2 — поверхность, у которой а. л. п. вдоль линий u принадлежат линейным комплексам. Такие поверхности рассматривались Сегре (C. Segre), Фубини и Терračини. Автор показывает, что если поверхность F_1 является фокальной поверхностью некоторой конгруэнции W, то второй фокальной поверхностью будет, в общем случае, F_2 (и, как исключение, F_0 или F_1). Отмечается, что исследование поверхности F_2 представляет интерес.

Г. Ф. Лаптев

6912. О теореме Добринера. Гион (Sur un théorème de Dobriner. Guion A.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1956, 25, № 6, 400—404 (франц.)

Известна теорема Добринера: Когда линии кривизны у семейства поверхностей с полной постоянной кривизной плоские, то плоскости этих линий проходят через одну прямую; линии же кривизны другого семейства лежат на сферах, центры которых находятся на этой прямой. Эта теорема распространяется на поверхности, полная и средняя кривизны которых связаны линейным соотношением с постоянными коэффициентами.

Н. В. Лактанова

6913. Линейные комплексы развертывающихся поверхностей конгруэнции. Карапетян С. Е., Тр. 3-го Всес. матем. съезда, 1956, 4. М., АН СССР, 1959, 76—77

6914. Дуально-конформное преобразование комплекса прямых. Барабошич Н. М., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1959, № 3, 22—29

Рассматривается преобразование комплекса прямых $E_1 = l_1 + \varepsilon \overline{l}_1 \to \hat{E}_1$ ($\varepsilon^2 = 0$) в метрическом пространстве, для которого $d\hat{E}_1^2 = \Lambda^2 dE_1^2$ ($\Lambda = \lambda + \varepsilon\overline{\lambda}$). При подходящем согласовании в выборе сопровождающих ортогональных трехгранников у двух соответственных комплексов такое преобразование может быть определено равенствами $\Omega_2^1 = \Lambda\Omega_1^2$, $\hat{\Omega}_1^3 = \Lambda\Omega_1^3$, где Ω_1^2 Ω_1^3 — координаты вектора d_{E_1}. Указанное преобразование существует с произволом в одну функцию трех аргументов.

Доказывается, что сумма расстояний фокусов любой конгруэнции комплекса от вершины тетраэдра, а также сумма углов, которые образуют фокальные плоскости этой конгруэнции с координатной плоскостью (l_1, l_2) являются инвариантами преобразования. При $\bar{\lambda} = 0$ имеют преобразование K комплексов, рассмотренное К. Н. Тихоцким (Матем. сб., 1945, 16 : 1). При $\lambda = \text{const}$ (в этом случае необходимо $\lambda = 1$) поверхности Каталана преобразуются в поверхности Каталана и наоборот. Коноиды сохраняются только при $\lambda = 1$, $\bar{\lambda} = 0$. В тексте много опечаток. Н. И. Кованцов

ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

6915. О продолжении уравнений второго порядка с одной неизвестной функцией двух независимых переменных и о преобразовании таких уравнений. Хаймович (Despre prelungirea ecuaţiilor de ord. II cu o funcţie necunoscută de două variabile independente şi despre transformările acestor ecuaţii. Haimovici M.), An. ştiinţ. Univ. Iaşi. Sec. I, 1955, **1**, № 1-2, 69—136 (рум.; рез. русск., франц.)

Известно, что интегрирование одного уравнения в частных производных вида

$$F(x_1, x_2, z, p_1, p_2, p_{11}, p_{12}, p_{22}) = 0, \qquad p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad p_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}, \ldots \tag{1}$$

можно свести к интегрированию системы пфаффовых уравнений с восемью переменными x_i, z, p_i, p_{ij},

$$\theta_0 = dz - p_i dx_i = 0, \quad \theta_i = dp_i - p_{ij} dx_j = 0 \quad (i, j = 1, 2), \tag{S_1}$$

связанными соотношениями (1).

Автор называет первым полным продолжением системы (1) систему, образованную уравнениями

$$F = 0, \quad F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i + \frac{\partial F}{\partial p_j} p_{ji} + \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} p_{jki} = 0. \tag{2}$$

С этой системой можно связать систему Пфаффа

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_i = 0, \quad \theta_{ij} = dp_{ij} - p_{ijk} dx_k = 0, \tag{S_2}$$

которая вместе с уравнением $F = 0$ образует систему, эквивалентную системе (2). Система (S_2), (1) называется также первым полным продолжением системы (S_1). Уравнения (S_2) связаны соотношениями

$$\frac{\partial F}{\partial z}\theta_0 + \frac{\partial F}{\partial p_i}\theta_i + \frac{\partial F}{\partial p_{ij}}\theta_{ij} = 0,$$

следовательно, (S_2) содержит только на 2 уравнения больше, чем система (S_1). С другой стороны, можно исключить две переменных p_{ijk} при помощи уравнения

$$F_i = \frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial z} p_i + \frac{\partial F}{\partial p_j} p_{ij} + \frac{\partial F}{\partial p_{jk}} p_{jki} = 0,$$

так что можно полагать, что первое полное продолжение системы (S_1) образовано уравнениями (S_1) и уравнениями $\theta_{1i} = 0$ $(i = 1, 2)$, в которые входят неизвестные системы (S_1) и еще два новых неизвестных.

Автор строит системы $(S_3), \ldots, (S_a), \ldots$, которые он называет полными продолжениями порядка $3, \ldots, a, \ldots$, системы (S_1), обладающие свойством, что (S_a) образована уравнениями (S_{a-1}) и еще двумя другими уравнениями, содержащими переменные системы (S_{a-1}) и еще две новые переменные. Все эти системы присоединены к уравнению (1). Система (S_a) — класса $2a + 5$ и содержит $2a + 1$ уравнений; ее производная система — (S_{a-1}). Автор доказывает теорему: Если система Пфаффа

$$\theta_1 = 0, \ldots, \theta_{2a+1} = 0, \tag{S_a}$$

обладает следующими свойствами: 1) S_a — класса $2a + 5$; 2) ее последовательные производные системы получаются из (S_a) устранением двух, четырех, ..., уравнений; 3) производные системы — класса $2a + 3$, $2a + 1, \ldots, 7, 5$, — то такая система S_a ассоциирована с уравнением вида (1) и является продолжением порядка a системы (S_1), присоединенной к этому уравнению.

Автор определяет также частичные продолжения системы и дает необходимые и достаточные условия того, чтобы система Пфаффа была частичным продолжением системы Пфаффа, ассоциированной с некоторым уравнением Пфаффа. Пользуясь этими понятиями, автор определяет эквивалентность уравнения в частных производных вида (1). Пусть $F = 0$, $G = 0$ — два уравнения такого вида и пусть (S), (T) — две системы Пфаффа, представляющие эти два уравнения, следовательно, (S), (T) являются продолжениями систем (S_1), ассоциированных с $F = 0$ и $G = 0$. Эти два уравнения эквивалентны, если можно найти семейство соотношений $\Phi_\alpha = 0$ между переменными систем (S) и (T), которым удовлетворяли бы все первые интегралы системы (S), если только переменные (T) заменяются функциями, дающими первые интегралы (T); справедливо и предложение, которое получается, если поменять местами (S) и (T). Два эквивалентных уравнения $F = 0$, $G = 0$ называются одно преобразованием второго при посредстве соотношений $\Phi_\alpha = 0$. Автор классифицирует преобразования $\Phi_\alpha = 0$ по их числу и по порядку входящих в них переменных и дает каноническую форму таких соотношений. C. Teleman

6916. Прямолинейные конгруэнции в E_n. Швец (Congruences de droites dans E_n. Švec Alois), Чехосл. матем. ж., 1958, 8, № 4, 552—562 (франц.; рез. русск.)

Прямолинейной конгруэнцией с евклидовой связностью автор называет такой объект, в котором каждой точке (u, v) двумерной области значений параметров Ω ставится в соответствие трехмерное евклидово пространство $E_3(u, v)$ — локальное евклидово пространство — в котором фиксирована прямая, и для двух локальных пространств $E_3(u_1, v_1)$ и $E_3(u_2, v_2)$ определено отображение S, если задана линия γ, соединяющая в области Ω соответствующие точки (u_1, v_1) и (u_2, v_2). Каждой прямолинейной конгруэнции в E_n-двупараметрическому семейству лучей, которое можно двумя способами разложить на семейства развертывающихся поверхностей, можно поставить в соответствие конгруэнцию с евклидовой связностью. На прямолинейной конгруэнции с евклидовой связностью естественным образом определяются фокальные поверхности. Они представляют собой двумерные многообразия евклидовой связности без кручения. Изучение соответствия между фокальными поверхностями конгруэнции с евклидовой связностью позволяет определить ряд классов таких конгруэнций и конгруэнций в E_n, аналогичных конгруэнциям W, B, Г и т. д. обычной теории конгруэнций. Автор отмечает, что развитая им теория является непосредственным обобщением теории конгруэнций в E_3 в том виде, как она изложена в книге С. П. Фиников „Теория конгруэнций" (М., 1950 г.). М. А. Акивис

6917. Теория гиперповерхностей обобщенного евклидова пространства. Бахрах С. М., Научн. докл. высш. школы. Физ.-матем. н., 1958, № 3, 14—17

Обобщенным евклидовым пространством H_n автор называет аффинное пространство A_n, в котором задана несимметрическая билинейная функция $\varphi(xy) \equiv xy$, удов-

летворяющая условию: $\varphi(xx) > 0$ для любого $x \neq 0$ (РЖМат). Симметрическая часть функции $\varphi(xy)$ определяет в H_n так называемую индуцированную евклидову метрику. Гиперповерхность $z = z(u^1, \ldots, u^{n-1})$ в H_n оснащается единичным вектором p, ортогональным в этой индуцированной метрике к касательной плоскости гиперповерхности (т. е. $z_i p + p z_i = 0$). В этом случае деривационные формулы и условия их интегрируемости совпадают с соответствующими формулами и условиями в индуцированном евклидовом пространстве R_n. Отличие по сравнению с теорией гиперповерхностей в R_n состоит в том, что в H_n тензоры $g_{ij} = z_i z_j$ (метрический) и $b_{ij} = \frac{1}{2}(z_{ij}p + p z_{ij})$ (второй основной) не определяют еще гиперповерхность с точностью до движения (т. е. до такого точечного аффинного преобразования в H_n, при котором соответствующее векторное преобразование B удовлетворяет условию: $xy = BxBy$). Для этого нужно ввести еще тензор $\varphi_i = z_{ip} = -pz_i$ (основной ковектор), который должен вместе с тензорами g_{ij} и b_{ij} удовлетворять определенным алгебраическим и дифференциальным условиям.

Ю. Г. Лумисте

6918. Комплексно-аналитическое расслоение вещественных гиперповерхностей в C^n. Зоммер (Komplex-analytische Blätterung reeller Hyperflächen im C_n. Sommer Friedrich), Math. Ann., 1959, 137, № 5, 392—411 (нем.)

С комплексным n-мерным пространством C^n всех упорядоченных систем n комплексных чисел $(z_1, \ldots, z_n)$, где $z_k = x_k + iy_k$, сопоставляется вещественное $2n$-мерное пространство R^{2n}, точками которого являются упорядоченные системы $2n$ чисел $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$. Семейству комплексно-аналитических m-мерных поверхностей в C^n, зависящему от q вещественных параметров, сопоставляется $2m + q$-мерная поверхность в R^{2n}, однако обратное может и не иметь места, т. е. не всякой $2m + q$-мерной поверхности в R^{2n} соответствует семейство m-мерных комплексно-аналитических поверхностей в C^n, зависящее от q параметров. Рассматривается гиперповерхность H в пространстве R^{2n}; автор находит достаточные условия того, что гиперповерхность H может быть представлена как $2k - 1$ вещественно-параметрическое семейство $n - k$-мерных комплексно-аналитических поверхностей в C^n. Однако может случиться, что при выполнении этих условий гиперповерхность H фактически представляется $2s - 1$ вещественно-параметрическим семейством $n - s$-мерных комплексно-аналитических поверхностей в C^n $(s < k)$; в конце работы приведен конкретный пример такого случая для C^3. При некоторых дополнительных ограничениях на гиперповерхность H (т. е. для гиперповерхностей специального положения) достаточные условия являются также и необходимыми.

При доказательствах используются результаты автора, опубликованные в предыдущей статье (РЖМат, 1960, 298).

А. Е. Либер

6919. О ковариантных производных векторов. Моор (Über die kovariante Ableitung der Vektoren. Moór Arthur), Acta scient. math., 1958, 19, № 3-4, 237—246 (франц.)

К обычным условиям для ковариантной производной векторов, которые исходят от референта, автор добавляет новые и достигает таким образом более явной формы такой производной. Автор особенно подчеркивает, что эти производные должны зависеть от объектов второго класса с формулой преобразования

$$\Lambda^{\beta}_{\alpha\gamma} = \Lambda^{j}_{ik} A^{i}_{\alpha} A^{k}_{\gamma} A^{\beta}_{j} + A^{\beta}_{\nu} A^{\nu}_{\alpha\gamma},$$

где

$$A^{i}_{\alpha} = \frac{\partial \xi^{i}}{\partial \xi^{\alpha}}, \quad A^{\beta}_{j} = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial \xi^{j}}, \quad A^{\nu}_{\alpha\gamma} = \frac{\partial^2 \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\alpha} \partial \xi^{\gamma}}.$$

Существенным среди добавочных условий является постулат, чтобы определяемая ковариантная производная от всех переменных (т. е. от компонент векторного поля, от первых производных этих компонент и от компонент вспомогательного объекта) зависят непрерывно. Все эти условия еще недостаточны, чтобы вывести однозначную классическую формулу для ковариантной производной. Следует подчеркнуть, что имеется существенная разница между случаем ковариантного дифференцирования поля контравариантных векторов и случаем ковариантного дифференцирования поля ковариантных векторов.

В ряде теорем автор дает наиболее общую форму для обеих производных $D_k v^i$ и $D_k w_j$ в общем случае не симметричного объекта Λ^{j}_{ik}. При добавочных требованиях линейности автор получает точную (но еще не однозначную) формулу, в которую входят в виде параметров произвольные константы, также как произвольные алгебраические комитанты, кососимметрической части S^{j}_{ik} объекта Λ^{j}_{ik}, которые сами должны быть того же типа, что и S.

S. Gołąb

6920. О линейных геометрических дифференциальных объектах первого класса с одной компонентой. Кучма (On linear differential geometric objects of the first class with one component. Kuczma Marek), Publs math., 1959, 6, № 1-2, 72—78 (англ.)

Автор рассматривает однокомпонентные геометрические дифференциальные объекты первого класса с законом преобразования

$$x' = f(A^{\alpha'}_{\alpha})\, x + g(A^{\alpha'}_{\alpha}).$$

Очевидно, скалярные функции f и g от матриц n-го порядка должны удовлетворять условиям:

$$f(BA) = f(A) f(B), \quad g(BA) = g(A) f(B) + g(B). \quad (1)$$

Доказывается теорема: Функции f, g, удовлетворяющие системе (1) для неособенных матриц A, B, должны быть или вида

$$f(X) \equiv 1, \quad g(X) = \ln |\varphi(\Delta)|, \quad \Delta = \mathrm{Det}(X), \quad (2)$$

или же вида

$$f(X) = \varphi(\Delta), \quad g(X) = c[\varphi(\Delta) - 1], \quad (3)$$

где c — произвольная константа, $\varphi(u)$ — некоторая функция, удовлетворяющая уравнению $\varphi(u \cdot v) = \varphi(u) \cdot \varphi(v)$. Если допускаются также и особенные матрицы, то функции f, g могут иметь только вид (3). Доказательство чисто алгебраическое. Как следствие этой теоремы получается, что все линейные однокомпонентные геометрические дифференциальные объекты первого класса будут или типа $x' = x + \ln |\varphi(\Delta)|$, или же типа $x' = \varphi(\Delta)\, x + c[\varphi(\Delta) - 1]$.

Следуя Нёйенхейсу, автор называет объект y эквивалентным объекту x, если существует обратимая функция $\psi(x)$ такая, что $y = \psi(x)$ во всех системах координат. Объект, эквивалентный линейному, автор называет квазилинейным. Доказывается теорема: Всякий квазилинейный однокомпонентный геометрический дифференциальный объект первого класса эквивалентен объекту с законом преобразования: $x' = \varphi(A)\, x$.

Примечание референта. Впервые все однокомпонентные геометрические дифференциальные объекты первого класса нашел Ю. Е. Пензов (Докл. АН СССР, 1946, 54, 567—570), на работы которого в реферируемой статье нет ссылок.

А. Е. Либер

6921. Метрическая дифференциальная геометрия, основанная на понятии p-мерной площади. Бартель (Über metrische Differentialgeometrie, begründet auf dem Begriff eines p-dimensionalen Areals. Barthel Woldemar), Math. Ann., 1959, **137**, № 1, 42—63 (нем.)

В касательном пространстве n-мерного дифференцируемого многообразия с натуральным базисом e_i рассматривается совокупность p векторов $X_\mu = X^i_\mu e_i$ и определяемый ими простой p-вектор

$$X_1 \wedge \ldots \wedge X_p = \sum_{j_1 < \ldots < j_p} p!\, X_1^{[j_1} \ldots X_p^{j_p]}\, e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_p}.$$

Пусть $X^J = p!\, X_1^{[j_1} \ldots X_p^{j_p]}$ — сокращенное обозначение для грассмановых координат. Если функция $f(x, X^J)$ положительная и однородная первого измерения относительно X^J, то она определяет площадь p-мерной поверхности $x^i = x^i(u^\alpha)$

$$A = \int f(x(u^\alpha),\ X^J(u^\alpha))\, du^1 \ldots du^p,$$

где $X^J(u^\alpha)$ — касательный p-вектор поверхности. Определяется ковариантный фундаментальный p-тензор

$$g_{IK}(x, X^J) = \partial^2_{IK}\left(\frac{1}{2} f^2\right)$$

и предполагается наличие обратного контравариантного p-тензора g^{IK}. Контравариантному простому p-вектору X^I ставится в соответствие простой ковариантный p-вектор

$$X_I = f \partial_I f = g_{IK}(x, X^J)\, X^K.$$

Далее вводится инвариантный дифференциал поля p-тензоров

$$DT^I(x, X^J) = dT^I + T^K\left(\gamma^I_{Kh}(x, X^J)\, dx^h + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{f} Q^I_{KH}(x, X^J)\, dX^H\right),$$

подчиняющийся требованиям: 1) $Dg_{IK}(x, X^J) = 0$, 2) $a_{[IK]H} = 0$, 3) при параллельном перенесении простота p-вектора сохраняется.

Рассмотрим две плотности

$$e_{I\overline{I}} = n!\, \delta^{[1}_{i_1} \ldots \delta^{n]}_{i_n} \quad \text{и} \quad E^{I\overline{I}} = n!\, \delta^{i_1}_{[1} \ldots \delta^{i_n}_{n]}$$

веса (-1) и $(+1)$, где через $\overline{I}$ обозначен сложный индекс $[i_{p+1} \ldots i_n]$, дополнительный к индексу I. Тогда, положив $n - p = \overline{p}$, устанавливаем соответствие между простыми p-векторами и $\overline{p}$-векторными плотностями:

$$X_{\overline{I}} = e_{I\overline{I}} X^I, \quad X^{\overline{I}} = E^{I\overline{I}} X_I,$$

а также определяем два фундаментальных $\overline{p}$-тензора $g^{\overline{I}\,\overline{K}}$, $g_{\overline{I}\,\overline{K}}$. $X^{\overline{I}}$ называется трансверсалью к простому p-вектору X^I, а X^I — нормалью к $X^{\overline{I}}$. Инвариантный дифференциал $\overline{p}$-векторных плотностей индуцируется естественным образом

$$DT_{\overline{I}} = e_{I\overline{I}}\, DT^{\overline{I}}.$$

Если дополнить эти построения заданием объема

$$V = \int F(x)\, dx^1 \ldots dx^n,$$

то можно установить соответствие между $\overline{p}$-векторами $Y^{\overline{I}}$ и p-векторами X^I, нормальными к $Y^{\overline{I}}$, и определить дуальную метрическую функцию

$$\overline{f}(x,\ Y^{\overline{J}}) = F(x)\, e_{I\overline{I}} Y^{\overline{I}} \frac{X^I}{f(x, X)} = f(x,\ X^J).$$

Для $\overline{p}$-мерной поверхности $y(v^{\overline{\alpha}}) = y(v^{p+1}, \ldots, v^n)$ определяется дуальная площадь

$$\overline{A} = \int \overline{f}\ (y, Y^{\overline{J}})\, dv^{p+1} \ldots dv^n.$$

Используя указанные построения, автор дает геометрическую интерпретацию первой вариации площади A и дуальной площади $\overline{A}$. В конце статьи указывается на возможность специального выбора коэффициентов инвариантного дифференциала. Л. Е. Евтушик

6922. О локальной реализации пространства со связностью. Татибана, Сугаку, 1955, **7**, № 1, 9—15 (японск.)

Галвани (Galvani, J. math. pures et appl., 1946, **25**, 209—239) рассматривал погружение пространства со связностью и кручением в плоское пространство. В случае пространства аффинной связности оно реализуется с помощью многообразия биплоскостных элементов. Используя этот метод, автор доказал следующие теоремы: 1) Если n-мерное пространство проективной связности P_n рассматривается как аналитическое многообразие биплоскостных элементов, то оно может быть локально реализовано в $(n^r + n - 1)$-мерном проективном пространстве и общее решение зависит от $n^3 + n^2 - 2$ произвольных функций n аргументов; 2) P_n без кривизны может быть локально реализовано в $(n-1)$-мерном проективном пространстве и общее решение зависит от $n-1$ произвольной функции n аргументов. Дано новое доказательство теоремы А. Е. Либера (Докл., АН СССР, 1947, **55**, 295—297). Su Buchin

6923. Частично проективные пространства (пространства Кагана). Врэнчану Г. (в подл. Врынчеану Г.), Тр. 3-го Всес. мат. съезда, 1956. 4. М., АН СССР, 1959, 204—208

6924. Дифференциальная геометрия пространств Финслера. Рунд (The differential Geometry of Finsler spaces. Rund Hanno. Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer, 1959, XIII, 283 S., 59.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 25, 1944 (англ.)

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

6925. Необходимые и достаточные условия того, чтобы многообразие было пространством Эйнштейна. Аве (Conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une variété soit un espace d'Einstein. Avez André), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 8, 1113—1115 (франц.)

Рассматривается вопрос о необходимых и достаточных условиях того, чтобы риманово многообразие V_n, рассматриваемое в заданном классе функций C^k, было пространством Эйнштейна. Получаемый критерий носит локальный характер и предполагает замкнутость V_n. Доказывается теорема: V_n класса C^1 является пространством Эйнштейна тогда и только тогда, когда подстановка $\varphi_\alpha \to \varphi_{\alpha,\lambda}{}^\lambda$ являются эндоморфизмом полного векторного пространства (о понятии эндоморфизма в применении к тензорам V_n см. РЖМат, 1957, 5151 К). Эта теорема и ее следствия вытекают из леммы: Если $A_{\alpha\beta}$ — симметрический тензор класса C^1, то подстановка $\varphi_\alpha \to A_{\alpha\beta}\varphi^\beta$ является эндоморфизмом полного векторного пространства тогда и только тогда, когда $A_{\alpha\beta} = k g_{\alpha\beta}$ и $k = \text{const}$.

Результаты, полученные в работе, не зависят от сигнатуры метрики пространства. А. З. Петров

6926. Алгебраическое изучение одного типа тензора кривизны. Случай 3 Петрова. Бель (Étude algébrique d'un certain type de tenseurs de courbure. Le cas 3 de Petrow. Bel Louis), C. r. Acad. sci., 1958, **247**, № 23, 2096—2099 (франц.)

Исходя из доказанной референтом теоремы о том, что в смысле алгебраической структуры тензора кривизны существует три и только три типа пространств Эйнштейна, и используя канонические формы для компонент тензора кривизны в неголономном ортрепере, также полученные референтом, автор исследует 3-й тип многообразий Эйнштейна в случае свободного пространства ($R_{\alpha\beta}=0$) и сигнатуры метрики типа $(---+)$. Автор исходит из идеи, высказанной Лихнеровичем, о том, что для наличия гравитационной радиации особый интерес представляют те пространства Эйнштейна, которые допускают изотропное векторное поле $l^\alpha(x)$, удовлетворяющее условиям: $R_{\alpha\beta\gamma\delta}\,l^\alpha\,l^\gamma = {}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta}\,l^\alpha\,l^\gamma = 0$, где ${}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\,\eta_{\alpha\beta\sigma\tau}R^{\sigma\tau}{}_{\gamma\delta}$ и $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — дискриминантный тензор пространства. Проверяя эти условия в неголономном ортрепере, где имеют место канонические формы для $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и ${}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ (РЖМат, 1956, 4866), автор показывает, что для пространств первого типа они могут иметь место только в случае, если они плоские (гравитация отсутствует), для второго типа тогда, когда стационарные кривизны пространства равны нулю (специальный случай пространств типа 2), и для третьего типа — всегда. Таким образом гравитационная радиация в указанном смысле может иметь место только для пространств второго специального типа и для пространств третьего типа. Вводя в рассмотрение тензор $T_{\beta\gamma\mu\nu} = Ag_{\beta\gamma}g_{\mu\nu} - R^{\alpha\lambda}_{\beta\mu}R_{\alpha\gamma\lambda\nu} - R^{\alpha\lambda}_{\beta\nu}R_{\alpha\gamma\lambda\nu}$ (РЖМат, 1959, 10442), приводящий к обобщению тензора Максвелла для гравитационного поля, и исходя из того, что для него имеет место закон сохранения $T^\beta_{\gamma\mu\nu,\,\beta}=0$, автор доказывает теорему: для пространств 3-го типа траектории векторного поля $l^\alpha(x)$ являются изотропно-геодезическими:

$$l^\beta\,l_{\nu,\,\beta} = al_\nu,\quad l^\alpha\,l_\alpha = 0.$$

Примечание референта. Теорема, доказанная автором, допускает следующее усиление: для пространств третьего типа, кроме поля $l^\alpha(x)$, существуют еще поля $h^\alpha(x)$, $k^\alpha(x)$, $r^\alpha(x)$ такие, что $R_{\alpha\beta\gamma\delta}h^\beta h^\delta = {}^*R_{\alpha\beta\gamma\delta}k^\beta k^\delta = 0$ и $l^\alpha h_\alpha = l^\alpha k_\alpha = r^\alpha r_\alpha = h^\alpha k_\alpha = h^\alpha r_\alpha = k^\alpha r_\alpha = l^\alpha l_\alpha = 0$, $h^\alpha h_\alpha = k^\alpha k_\alpha = -1$, $l^\alpha r_\alpha = 1$. Исходя из неголономного ортрепера, легко выразить тензор кривизны пространства через эти четыре векторные поля. А. З. Петров

6927. О гидродинамике в теории Жордана—Тири. Валле (Sur l'hydrodynamique en théorie de Jordan—Thiry. Vallée Robert), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 12, 1779—1781 (франц.)

Рассматривается 5-мерная единая теория Жордана — Тири в том случае, когда имеет место случай идеальной жидкости и поэтому тензор энергии-импульса имеет вид $rv_\alpha v_\beta - q\gamma_{\alpha\beta}$, где $\gamma_{\alpha,\,\beta}$ — метрический тензор, r и q — скаляры, а v_α — ковариантные компоненты единичного вектора ($v^\alpha v_\alpha = \pm 1$), касательного к 5-мерным линиям тока жидкости. Предполагается, что $r=\varphi(q)$. В таком V_5 существует однопараметрическая группа изометрий, при преобразованиях которой остаются инвариантными скаляры r, q и $\Phi = \exp\varepsilon\int_{q_0}^{q}\frac{du}{\varphi(u)}$. Так как уравнения поля будут иметь вид $S_{\alpha\beta} = rv_\alpha v_\beta - q\gamma_{\alpha\beta}$, где $S_{\alpha\beta}$ — тензор Эйнштейна, то из закона сохранения для $S_{\alpha\beta}$ следует, что $D_\alpha(rv^\alpha) = rv^\alpha\partial_\alpha\log\Phi$ и $v^\alpha D_\alpha v^\beta = (\varepsilon\gamma^\alpha_\beta - v^\alpha v_\beta)\,\partial_\alpha\log\Phi$, где D_α — символ ковариантного дифференцирования в V_5. Линии тока, определяемые последним уравнением, будут экстремалями интеграла $\int_{P_0}^{P_1}\Phi\,d\sigma$.

Автор изучает другие инвариантные величины и показывает, что при $\Phi=1$ получим схему „чистой" материи, а также рассматривает случай „чистой" материи в 4-мерной теории общего релятивизма. А. З. Петров

6928. О движении сингулярностей поля в ковариантных теориях поля. Янкевич (Über die Bewegung der Feldsingularitäten in kovarianten Feldtheorien. Jankiewicz C.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 12, 771—774 (нем.; рез. русск.)

Автор, исходя из идеи Эйнштейна — Инфельда, рассматривающих материю как сингулярность поля, получает уравнения движения как решение вариационной задачи

$$D[\psi_k]\,S=0,\ \text{где}\ S=\int\Phi(\psi_A,\ \psi_{IA},\ \partial_\alpha\psi_{IA},\ \ldots)\,(dx)$$

и Φ — геометрический комитант веса $+1$. Задавая функцию действия в форме

$$S=\int\Big[\int\sum_{i=1}^{N}\delta(x-\xi_i)\,\Phi(\xi_i^\mu,\ \psi_{IA}\ldots)\,ds_i + \Phi^I(\psi_{IA},\ldots)\Big](dx),$$

где ξ_i^μ записывают движение сингулярностей, а $\delta(x-\xi_i)$ являются модифицированными Инфельдом и Плебанским четырехмерными δ-функциями Дирака, автор показывает, что уравнения движения, как уравнения Лагранжа-Эйлера указанной вариационной задачи, следуют из уравнений поля. А. З. Петров

6929. Новое выражение для гравитационных волн Эйнштейна. Ньюман, Килмистер (A new expression for Einstein's law of gravitation. Newman D. J., Kilmister C. W.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1959, **55**, № 1, 139—141 (англ.)

Оставаясь в рамках римановой геометрии, но исследуя тот случай, когда метрический тензор области мультипликативный с символической структурой: $2g_{\mu\nu} = E_\mu E_\nu + E_\nu E_\mu$, которая вводится в работах Флинта (Flint H. T., Proc. Roy. Soc. 1935, **A 150**, 421), К. Никольского (Nikolsky K., Proc. Roy. Soc. 1935, **A 150**, 411) и Шрёдингера (Schrödinger E., Sitzungsber. Preuss. Acad. Wiss, 1932, 105), авторы предлагают новое доказательство теоремы, имеющей для рассматриваемой теории основное значение: условие $\overset{\nu\sigma}{E^\vee}E_{\mu,\,[\nu\sigma]}=0$ или $\overset{\nu\sigma}{E^\vee}\partial^2_{[\nu\sigma]}\bar{A}=0$ для любого вектора $\bar{A}$, эквивалентны уравнению $R_{\alpha\beta}=0$. Здесь, по определению, $E_{\underset{\vee}{\mu,\,\nu}}$ определяется структурой: $2E_{\underset{\vee}{\mu\nu}} = E_\mu E_\nu - E_\nu E_\mu$. Доказательство основывается на рассмотрении неголономного ортрепера $\{h_{i\,\alpha}\}$, относительно которого $E_i = h_{i\alpha}E_\alpha$. А. З. Петров

6930. Основные уравнения релятивистской механики материальной точки с переменной массой. Калицин (Grundgleichungen der relativistischen Mechanik eines

materiellen Punktes mit veränderlicher Masse. Kalitzin Nikola St.), Докл. Болг. АН, 1958, **11**, № 3, 185—188 (нем.; рез. русск.)

Автор рассматривает релятивистское обобщение основного уравнения Мещерского для материальной точки с переменной массой для пространства Минковского. Если через x_i ($i = 1, 2, 3$) обозначить координаты физического пространства R_3, а x_4 положить равным ict, где t — время, то пространство Минковского, для которого ведется рассмотрение, обозначим R_4, а вектор 4 — скорости в R_4 через $u_i \equiv \frac{dx_i}{ds}$. Автор получает следующее уравнение для определения силы, имеющее основное значение

$$\bar{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right) + \frac{\left(\frac{dm}{dt}\right)c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \bar{F}\bar{v} - \left(\frac{dE}{dt}\right)}{av - c^2}\bar{a},$$

где обозначения имеют приводимый ниже смысл. В предположении, что дефект массы равен нулю, автор приходит к следующей системе дифференциальных уравнений, описывающих поведение точки: $c(1 + a_i u_i) \times dm = -dp_i u_i$ или

$$\bar{F}\bar{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) - \frac{dm}{dt}\left(c^2\sqrt{1-v^2/c^2} + \frac{\bar{a}\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right),$$

где $\bar{F}$ — вектор силы в R_3: $\bar{F} = c(f_1 f_2 f_3)\sqrt{1-v^2/c^2}$,

$$f_i = \frac{dp_i}{ds} = \frac{d}{ds}(cmu_i) + \frac{c(dm/ds) + \left(\frac{dp_j}{ds}\right)u_j}{a_j u_j}a_i,$$

$$d\bar{p} = \bar{F}\cdot dt,$$

m — переменная масса, a_i — вектор скорости в R_4, а $\mathbf{v}$ — вектор скорости в R_3. Рассматривая случай „чистой ракеты", определяемый условиями $dp_i = 0$, т. е. $\bar{F} = 0$, $\frac{dE}{dt} = 0$, автор получает уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\bar{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) + \frac{\left(\frac{dm}{dt}\right)c^2\sqrt{1-v^2/c^2}}{\bar{u}\,\bar{v} - c^2}\bar{a} = 0,$$

которые описывают движение ракеты в пространстве, свободном от гравитации. Автор получает точные выражения для вектора **a** и первый интеграл основного уравнения, обобщающий известный интеграл Цангера для аналогичной задачи. А. З. Петров

6931. Траектория одной пробной частицы без спина в гравитационном поле одной массы, наделенной спином. Коста-де-Борегар (De la trajectoire d'une particule d'épreuve sans spin dans le champ gravitationnel d'une masse douée de spin. Costa de Beauregard Olivier), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 1, 67—70 (франц.)

В релятивистской динамике материальной точки без спина с постоянной массой m_0 и антисимметрическим тензором второго ранга F^{ij} закон движения ковариантным образом можно определить (Compt. rend,, 1945, **221**, 743) соотношениями: $p'^i \equiv m_0 V'^i = F^{ij}V_j$; $V_j \equiv x'_j$; $V_i V^i = -c^2$. Определяя величину F^{ij}/m_0 как „абсолютный" эффект силы, свойственной единичной массе, и вводя понятие „релятивистского" эффекта мгновенного вращения $\Omega^{ij} \equiv G'^{ij}$ в лоренцевом пространстве, где Ω^{uv} ($u, v = 1, 2, 3$) интерпретируется как „перемена скоростей", обобщающая обычную инерцию, а Ω^{uv} как „специальная угловая скорость", обобщающая эффект Кориолиса, автор рассматривает релятивистское выражение принципа Д'Аламбера. Рассматривается гипотеза эффекта гравитационного спина, определяемого $G'^{ij} = F^{ij}/m_0$, который таким образом отождествляется с полем вращения в лоренцовом пространстве. Постулируется, что в этом случае закон движения пробной частицы имеет вид: $v'^i = (G'^{ij})v_j$. Используя результат Тонла (Tonnelat M. A., La théorie du champ unifié d'Einstein et quelques de ses développements. Paris, Gauthier — Villars, 1955, 156), автор формулирует предложение: в приближении квази-Минковского антисимметрические части фундаментального тензора $\varphi_{ij} \equiv g_{ij}$ и $f^{ij} = g^{ij}$ связываются между собой при помощи тензора Минковского: $f^{ij} \simeq \eta^{ik}\eta^{jl}\varphi_{kl}$, $\varphi_{ij} \simeq \eta_{ik} \times \times \eta_{jl} f^{kl}$. Отсюда, используя гипотезу гравитационного спина, получаются основные соотношения $U^i = (\delta^{ij} + G^{ij})V_j$; $V_i = (\delta_{ij} - G_{ij})U^j$; $(\delta^{ij} + G^{ij})(\delta_{jk} - G_{jk}) = \delta^i_k$, где $U^i = V^i + W^i$, а $W^i = G^{ij}V_j$. А. З. Петров

6932. Обобщенные конформные преобразования спиноров и спинорных уравнений. Букдал (On extended conformal transformations of spinors and spinor equations. Buchdahl H. A.), Nuovo cimento, 1959, **11**, № 4, 496—506 (англ.; рез. итал.)

Предполагая, что спиноры в римановом пространстве задаются по методу Инфельда и Ван-дер-Вардена (Infeld L., Van der Waerden B. L., Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1933, 380), изучается вопрос об инвариантности дифференциальных уравнений для спиноров по отношению к конформным преобразованиям $g_{kl} = e^{2q}g_{kl}$, где $k, l = 1, 2, 3, 4$ и q — произвольная функция от 4 координат. Допускается, что при конформном преобразовании спинор ζ, содержащий r индексов с точкой и s без точки, переходит в $e^{vq}\zeta$, где v — действительное число, метрический спинор $\gamma_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2$) и базисный вектор-спинор $\sigma^{k\dot{\mu}\nu}$ переходят соответственно в $e^{-q}\gamma_{\mu\nu}$ и $\sigma^{k\dot{\mu}\nu}$, а также, что имеют место конформно инвариантные соотношения

$$\gamma_{\dot{\mu}\dot{\alpha}}\,\gamma_{\nu\beta}\,\sigma^{k\dot{\mu}\nu}\,\sigma^{l\dot{\alpha}\beta} = g^{kl},\ \sigma^{k\dot{\mu}\nu}\ ;_l = 0,\quad \gamma_{\alpha\beta;l} = 0.$$

При этих условиях доказывается, что если релятивистские уравнения для частицы со спином $S = \frac{1}{2}(r+s)$ и массой покоя $\varkappa$, являющиеся обобщением уравнений Дирака, конформно инвариантны, то $\varkappa$ не может быть конформным инвариантом. Если же $\varkappa$ — конформный ковариант, т. е. преобразуется в $e^{Cq}\varkappa$, то уравнения будут конформно инвариантны только в том случае, если они инвариантны по отношению к отражениям, S — половина нечетного целого числа, и дополнительные условия, согласно которым имеются лишь частицы со спином S, а не смесь частиц со спином $\leqslant S$, должны накладываться после конформного преобразования. Наконец, если дополнительные условия также считаются конформно инвариантными, то оказываются возможными лишь уравнения Дирака с $S = 1/2$, и конформный вес C у $\varkappa$ равен -1. Г. А. Зайцев

6933. Квадратичные лагранжианы и общий релятивизм. Хигс (Quadratic lagrangians and general relativity. Higgs P. W.), Nuovo cimento, 1959, 11, № 6, 816—820 (англ.; рез. итал.)

Рассматриваются уравнения поля, изученные Стефенсоном (РЖФиз, 1959, 2500), который получил их методом Галаткина, рассматривая вариационные задачи для интегралов действия, сконструированных из трех квадратичных лагранжианов, определяемых тензором кривизны; рассматриваются независимые вариации метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и симметрической аффинной связности $\Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}$. При этом возникают три случая:

1) интеграл действия $I_A = \int d^4x R^2 \sqrt{-g}$ и отвечающие ему уравнения $R\left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}\right) = 0$,

$(Rg^{\alpha\beta}\sqrt{-g})_{;\alpha} = 0$;

2) $I_B = \int d^4x R_{\lambda\rho} R^{\lambda\rho} \sqrt{-g}$ с уравнениями

$$(R_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + R_{\rho\mu}R_{\sigma\nu})\, g^{\rho\sigma} - \frac{1}{2} R_{\rho\sigma}R^{\rho\sigma} g_{\mu\nu} = 0,$$

$$(R^{\alpha\beta}\sqrt{-g});\ \mu = 0;$$

3) $I_C = \int d^4x R^{\varkappa}_{\lambda\mu\nu} R^{\lambda\mu\nu}_{\varkappa} \sqrt{-g}$ с уравнениями

$$-R_{\mu\rho\sigma\tau}R^{\rho\sigma\tau}_{\nu} + R^{\sigma}_{\mu\sigma\tau}R^{\sigma\tau}_{\sigma\nu} + 2R^{\tau}_{\sigma\rho\mu}R^{\sigma\rho}_{\nu\tau} -$$

$$-\frac{1}{2} R_{\sigma\rho\sigma\tau}R^{\sigma\rho\sigma\tau} g_{\mu\nu} = 0,\quad (R^{\alpha\beta}_{\mu}\sqrt{-g})_{;\beta} = 0.$$

Здесь предполагается, что $R^{\varkappa}_{\lambda\mu\nu} = -\Gamma^{\varkappa}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\varkappa}_{\lambda\nu,\mu} + \Gamma^{\varkappa}_{\sigma\mu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\nu} - \Gamma^{\varkappa}_{\sigma\nu}\Gamma^{\sigma}_{\lambda\mu}$, $R_{\lambda\mu} = R^{\nu}_{\lambda\mu\nu}$; запятые обозначают обычное дифференцирование, а точки с запятой — ковариантное относительно коэффициентов $\Gamma^{\varkappa}_{\alpha\beta}$.

Доказывается, что в случае 1) и 2) уравнения поля могут быть преобразованы к известным уравнениям Эйнштейна общего релятивизма с космологической константой. В третьем случае такое приведение невозможно. А. З. Петров

6934. Релятивизм в стационарном сферическом или эллиптическом пространстве. Кронсбейн (Relativity in a stationary spherical or elliptic space. Kronsbein John), Phys. Rev., 1958, 112, № 4, 1384—1391 (англ.)

Рассматриваются основные факты теории относительности в стационарных сферических или эллиптических пространствах; это рассмотрение продолжает опубликованную ранее работу, в которой рассматривались стационарные пространства Эйнштейна (РЖФиз, 1959, 7311). Координаты специализированы так, что X^i ($i = 1, 2, 3$) представляют трехмерное пространство X^i, а $X^4 = ct$ — время. Прямые эллиптического пространства X^i будут представлять собой в плоском пространстве все окружности, которые проходят через диаметрально противоположные точки фиксированной сферы $\sum_R$ радиуса R. Это позволяет геодезические линии связать с параллелями Клиффорда правой или левой ориентации. Каждому стационарному пространству можно сопоставить пространство Эйнштейна, соответственно, правой или левой ориентации, так что при этом изучение пространства Эйнштейна приобретает особый интерес. Со стационарными эллиптическими пространствами можно связать группу движений Лоренца. Так, если через λR обозначить эллиптическое расстояние вдоль одной из диаметральных окружностей и фиксировать некоторое направление (l, m, n) в трехмерном пространстве, то λl, λm, λn образуют серию величин, связанных лоренцовой группой преобразований:

$$R\lambda' = \frac{R\lambda - R\omega t}{(1 - R^2\omega^2/c^2)^{1/2}},\quad ct' = \frac{ct - R^2\omega\lambda/c}{(1 - R^2\omega^2/c^2)^{1/2}}.$$

Простая геометрия исследуемых пространств позволяет автору, в указанной выше системе отнесения, определить контравариантные компоненты скорости некоторой частицы в виде $RV^i = \gamma_\omega R\dot{X}^i = R\frac{dX^i}{dt}$, где $\gamma_\omega = (1 - R^2\omega^2/c^2)^{-1/2}$, $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$ и, исходя отсюда, найти 4-вектор момента энергии и полную энергию частицы. Доказывается теорема о том, что линейная комбинация вращений или псевдовращений может быть истолкована как движение вдоль геодезической стационарного пространства. Записывая уравнения поля и учитывая простой вид метрики, автор дает истолкование тензора энергии-импульса. А. З. Петров

6935. Строгое решение единой теории Эйнштейна для специального поля симметрии. Рао (Rigorous solution of Einstein's unified theory for a special type of symmetry. Rao J. R.), Acta phys. austriaca, 1959, 12, № 3, 251—261 (англ.)

Автор рассматривает строгое решение уравнений поля единой теории Эйнштейна $\Gamma^s_{\underset{\sim}{is}} = 0$, $R_{\underset{\sim}{ik}} = 0$, $R_{\underset{\sim}{ik},l} + R_{\underset{\sim}{kl},i} + R_{\underset{\sim}{li},k} = 0$, где $R_{ik} = \Gamma^s_{ik,s} - \frac{1}{2}(\Gamma^s_{\underset{\sim}{is},k} + \Gamma^s_{\underset{\sim}{sk},i}) - \Gamma^s_{il}\Gamma^l_{sk} + \Gamma^s_{ik}\Gamma^l_{st}$ и коэффициенты связности выражаются через несимметрической тензор второй валентности g_{ik} при помощи уравнений: $g_{ik,a} - g_{sk}\Gamma^s_{ak} - g_{is}\Gamma^s_{ak} = 0$ ($\vee$ — символ альтернирования, „—“ — симметрирования). Решение ищется при некоторых условиях на симметрию пространства, которая выражается в том, что тензор g_{ij} в специальной системе координат можно задать в виде

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & l \\ 0 & G & K & 0 \\ 0 & -K & G & 0 \\ -l & 0 & 0 & H \end{pmatrix},$$

где l, G, K, H — некоторые функции от x'. Вычисляя коэффициенты связности и компоненты тензора Риччи и интегрируя систему уравнений поля, после довольно громоздких выкладок автор приходит к следующим выражениям для g_{ij}: $G = M^{\frac{4}{a^2+3}}\cos N$, $K = M^{\frac{4}{a^2+3}}\sin N$, $l = \frac{ef}{b} M^{\frac{a^2-5}{a^2+3}}$, $H = \frac{f^2}{b} M^{\frac{2(a^2-1)}{a^2+3}}\{1 - e^2 M^{-\frac{8}{a^2+3}}\}$, где $M = \frac{a^2+3}{4}(\sqrt{b}\,x' + c)$, $N = \frac{4a}{a^2+3}\log(\sqrt{b}\,x' + c) + d$, а входящие в эти решения величины a, b, c, d, e постоянные. В частности, при $a = d = 0$ отсюда получается строгое решение указанной системы уравнений поля, полученное ранее Бандьопадхьяй (Bandyopadhyay G., Indian J. Phys., 1951, 25, № 5).

6936. Методы квантования в пятимерной единой теории. Дро-Венсан (Une méthode de quantification en théorie unitaire pentadimensionnelle. Droz-Vincent Philippe), C. r. Acad. sci., 1959, 248, № 12, 1790—1792 (франц.)

Обобщая метод квантования гравитационного поля, развитый Лихнеровичем (РЖМат, 1953, 8487) и пред-

полагающий наличие евклидова формализма, автор рассматривает пятимерное многообразие V_5 с метрикой $d\eta^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$ и сигнатурой $(----+)$ и отвечающее ему пространство Минковского, в котором $\eta_{\mu\nu} = 0$, если $\mu \neq \nu$, $\eta_{\mu\nu} = -1$, если $\mu \neq 4$ и $\eta_{44} = 1$. Строится тензор $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$, обладающий алгебраическими свойствами тензора кривизны $H_{(\alpha\beta)\lambda\mu} = H_{\alpha\beta(\lambda\mu)} = 0$, $H_{\alpha\beta\lambda\mu} = H_{\lambda\mu\alpha\beta}$ и удовлетворяющий еще условию „цилиндричности" $\partial_0 H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$, и серия условий, которые, если воспользоваться символикой $Sa_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv a_{\alpha\beta\gamma\delta} + a_{\beta\gamma\alpha\delta} + a_{\gamma\alpha\beta\delta}$, можно записать в виде $SH_{\alpha\beta\lambda\mu} = S\partial_\rho H_{\alpha\beta\nu\mu} = \partial^\varkappa H_{\alpha\beta\lambda\mu} = \Box H_{\alpha\beta\lambda\mu} = 0$.

Пользуясь преобразованием Фурье в пространстве импульсов, автор определяет этот тензор в виде

$$H_{\alpha\rho\lambda\mu} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{C^+} (K_{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{k}) e^{ikx} + K_{\alpha\beta\lambda\mu}(\mathbf{K}) e^{-ikx})\, d\Omega,$$

где $d\Omega = \frac{dk' \wedge dk^2 \wedge dk^3}{k^4}$, а $K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ определяется из условий, которым удовлетворяют $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$. После этого задача решается при помощи обычных формальных методов. Тензор $H_{\alpha\beta\lambda\mu}$ получает интерпретацию в гравитационном и электромагнитном полях. А. З. Петров

6937. Основные принципы единой теории поля второго рода. II. Главатый (Basic principles of the unified field theory of the second king, II. Hlavatý V.), J. Math. and Mech., 1958, 7, № 6, 833—866 (англ.)

Статья представляет собой продолжение цикла статей на ту же тему (РЖМат, 1959, 10434) и посвящается изучению необходимых условий существования решения системы уравнений (α) $\partial_\omega g_{\lambda\mu} - \Gamma^\alpha_{\lambda\omega} g_{\alpha\mu} - \Gamma^\alpha_{\omega\mu} g_{\lambda\alpha} = 0$, когда связность $\Gamma^\nu_{\lambda\omega}$ обладает кручением, с тензором кручения $S^\nu_{\lambda\mu} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^\nu_{[\lambda\mu]}$ и вектором кручения $S_\lambda \overset{\text{def}}{=} S^\alpha_{\lambda\alpha}$ при условии Эйнштейна $S_\lambda = 0$. Обозначая ковариантное дифференцирование относительно связности $\Gamma^\nu_{\lambda\omega}$ символом D_ω, автор доказывает (в III гл.) теоремы: 1) система (α) эквивалентна системе уравнений $D_\omega g_{\lambda\mu} = 2S^\alpha_{\omega\rho} g_{\lambda\alpha}$, которая в свою очередь сводится к двум системам уравнений (β) $D_\omega h_{\lambda\mu} = 2S^\alpha_{\omega(\mu} g_{\lambda)\alpha}$ и (γ) $D_\omega k_{\lambda\mu} = 2S^\alpha_{\omega[\mu} g_{\lambda]\alpha}$, где тензоры $h_{\alpha\beta}$ и $k_{\alpha\beta}$, алгебраическому изучению которых посвящены некоторые статьи указанного выше цикла, должны удовлетворять условиям: $D_{(\omega} h_{\lambda\mu)} = 0$, $D_\lambda h_{\omega\mu} + 2D_{(\omega} k_{\mu)\lambda} = 0$; 2) если (α) допускает некоторое решение $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, то оно допускает и связность $\Gamma'^\nu_{\lambda\mu} = \Gamma^\nu_{\lambda\mu} + T^\nu_{\lambda\mu}$, где $T^\nu_{\lambda\mu}$ — произвольный тензор, удовлетворяющий условиям $T^\varkappa_{\lambda\omega} g_{\alpha\mu} + T^\varkappa_{\omega\mu} g_{\lambda\alpha} = 0$. Вводя в рассмотрение тензорные поля $U^\nu_{\lambda\mu} \overset{\text{def}}{=} \Gamma^\nu_{(\lambda\mu)} - \Lambda^\nu_{\lambda\mu}$, где $\Lambda^\nu_{\lambda\mu}$ — присоединенная связность, изученная в предшествующей статье указанного цикла, $K_{\omega\mu\lambda} \overset{\text{def}}{=} 2k_{(\omega\lambda,\mu)}$, связанные с $h_{\lambda\mu}$ и $k_{\lambda\mu}$, автор записывает дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти тензоры и доказывает ряд теорем о существовании решений указанных уравнений. Главы IV и V посвящены анализу условий существования связности $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$, удовлетворяющей условиям задачи; эти условия выражаются в виде целого ряда теорем, определяющих различные алгебраические и дифференциальные соотношения между введенными выше и некоторыми другими тензорными полями; даже простое перечисление этих теорем (общее число их равно пятидесяти) затруднительно в реферате. А. З. Петров

6938 Д. Математическое исследование шестимерной единой теории поля. Ренади (Étude mathématique d'une théorie hexadimensionnelle du champ unifié. Renaudie Josette. — Thèse doct. sci. math., Fac. sci. Univ. Paris, 1956. Paris, Gauthier—Villars, 1957, 72 p.) (франц.)

В работе, представляющей собой докторскую диссертацию, исследуется один из вариантов единой теории поля, основывающийся на рассмотрении 6-мерного риманова многообразия. Учитывая аналогичные работы Клейна, Яно—Огане и Подолянского, автор накладывает на V_6 следующие условия: 1) V_6 — риманово многообразие с метрикой гиперболического типа с сигнатурой вида $(------+)$; 2) оно допускает двучленную абелеву группу изометрий, причем два вектора Киллинга этой группы ориентированы в аффинном пространстве, нормальном к V_4, гиперболического типа. Таким образом, если метрика V_6 будет $d\sigma^2 = \gamma_{\lambda\mu}(x^\nu) dx^\lambda dx^\mu$, то два вектора Киллинга $\xi(x)$ и $\eta'(x)$ определяют бесконечно малую изометрию $\overset{*}{x}{}^\lambda = x^\lambda + \xi^\lambda(x)\delta a + \eta'^\lambda(x)\delta b$, где a и b — параметры, не зависящие от x^λ, причем

$$\xi_\alpha \xi^\alpha < 0,\ \eta'_\alpha \eta'^\alpha < 0,\ \nabla_\mu \xi_\lambda + \nabla_\lambda \xi_\mu = \nabla_\mu \eta'_\lambda + \nabla_\lambda \eta'_\mu = 0$$

или, другими словами, $\underset{\xi}{L}\gamma_{\mu\lambda} = \underset{\eta'}{L}\gamma_{\mu\lambda} = 0$, если воспользоваться производными Ли. Так как группа абелева, то $\underset{\xi}{L}\eta' = 0$. В первой главе, пользуясь наличием абелевой группы изометрий, автор специализирует систему координат и вычисляет тензор кривизны и тензор Риччи V_6, и находит зависимость между последними из этих тензоров и тензорами подпространств V_5 и V_4, и затем вычисляет тензор Эйнштейна относительно неголономного ортрепера. В гл. II вводятся на рассмотрение частицы с максимальным спином I. Используя матрицы Дирака σ_l $(l = 1, \ldots, 4)$ и матрицы Неймана γ_l $(l = 0, 1, \ldots, 4)$, где $\gamma_l = i\varkappa_4 \sigma_l$ $(l = 1, 2, 3)$, $\gamma_4 = \alpha_4$ и $\gamma_0 = I$ — единичная 4-мерная матрица, автор строит волновые функции ψ_{lk} для неголономного ортрепера и выражает через них симметрический тензор энергии-импульса поля $M_{lj} = \frac{m_0 c^2}{2} \psi^* \left(a^{(1)}_l a^{(2)}_j + a^{(1)}_j a^{(2)}_l\right)\psi$, где m_0 — собственная масса частицы, ψ^* — матрица, сопряженная ψ, а матрицы $a^{(1)}_i$ и $a^{(2)}_i$ выражаются через матрицы Дирака $\left[a^{(1)}_r\right]_{lk,\,lm} = (\alpha_r)_{il}\delta_{km}$, $\left[a^{(2)}_r\right]_{lk,\,lm} = {}^r(\alpha_r)_{km}\delta_{il}$, δ_{lj} — символы Кронекера; при этом должны выполняться соотношения $a^{(1)}_r \psi_{lk} = (\alpha_r)_{il}\psi_{ik}$, $a^{(2)}_r \psi_{lk} = (\alpha_r)_{km}\psi_{lm}$. После этого записывается выражение для вектора плотности потока и уравнения поля в различных возможных выражениях (гл. III). В гл. IV, используя общую постановку вопроса и результаты Лихнеровича, дается теория проблемы Коши для полученных уравнений поля, которая, как обычно, приводится к исследованию двух проблем: 1) определение начальных данных Коши и 2) интегрирование во времени. В гл. V исследуется вопрос о траекториях заряженных частиц в едином поле, причем, в частности, исследуется случай идеальной жидкости. Гл. VI и VII посвящены опреде-

лению и выделению в V_6 мезонного поля и его взаимодействия с электромагнитным и гравитационным полями.
А. З. Петров

ГЛОБАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

6939. Аналитическое фактор-многообразие по группе аналитических гомеоморфизмов. Бейли (On the quotient of an analytic manifold by a group of analytic homeomorphisms. Baily W. L.), Proc. Nat. Acad., Sci. USA, 1954, **40**, № 9, 804—808 (англ.)

Пусть D — комплексное аналитическое многообразие размерности n; G — собственно разрывная группа аналитических гомеоморфизмов D на себя. Рассмотрим на D расслоенное многообразие F с комплексным векторным слоем размерности единица, в котором действует мультипликативная группа комплексных чисел (комплексное расслоенное многообразие). Обозначим через π каноническую проекцию и через $F \to D$ группу аналитических расслоенных гомеоморфизмов F на себя. Пусть h — один из гомеоморфизмов G в G^* такой, что $\pi h(g) = g$, для $g \in G$ и что, если точка $\pi(b)$ неподвижна для $b \in F$ и $g \in G$, то точка b будет неподвижной для $h(g)$; (F, h) называется G-расслоенным комплексным многообразием. Главному расслоенному пространству, присоединенному к (F, h), ставится в соответствие некоторое действительное главное G-расслоенное пространство, заменяя координатные функции F и функцию, определяющую $h(g)$ в окрестности каждой точки D квадратами их модулей; такое пространство обладает сечением $C^{\infty}_{\mathfrak{F}}$ инвариантным относительно группы $|h|^2(G)$. Расслоенное многообразие (F, h) называется положительным, если $\psi = i\partial\bar{\partial}\log\mathfrak{F}$ положительно определенная.

Теорема: Если 1) D/G — компактна и если 2) на D существует положительное комплексное G-расслоенное многообразие, то D/G — алгебраическое многообразие, погруженное в проективное пространство. Точнее: существует регулярное отображение Φ многообразия D в проективное пространство достаточно большой размерности такое, что а) Φ может быть разложено на $D \to D/G$ и $\Psi: D/G \to \Phi(D)$, где Ψ — гомеоморфизм; б) Φ — локально бирегулярно вне множества неподвижных точек элементов G, отличных от тождественного; в) $\Phi(D)$ — локально неприводимое проективное алгебраическое многообразие;, г) размерность множества особых точек $\Phi(D)$ меньше или равна $n-2$.

Этот результат частично обобщает отображение, которое получил Кодаира (РЖМат, 1956, 6823) когда предполагалось, что элементы G не имеют неподвижных точек. Когда D — ограниченная область евклидова пространства, требование 2) всегда выполнено и теорема вновь дает результат, полученный Картаном (H. Cartan). Схема доказательства существенно совпадает со схемой Кодаиры (РЖМат, 1956, 6823), но, так как D/G, вообще говоря, имеет особенности, теорию гармонических интегралов пришлось приспосабливать к данному случаю.
P. Dolbeault

Перевод из Math. Revs, 1955, **16**, № 9, 953.

6940. Основы единой теории. Основные интерпретации в расслоенном пространстве. Ленуар (Principe d'une théorie unitaire. Interprétation basée sur l'emploi d'un espace fibré. Lenoir Marcel), C. r. Acad. sci., 1959, **248**, № 13, 1944—1946 (франц.)

Рассматривая дифференцируемое многообразие V_n и главное расслоенное пространство $E(V_n)$, отвечающее реперам R_x и линейным связностям V_n, и используя теорию Лихнеровича, автор вводит еще расслоенное многообразие $\bar{E}(V_n)$, отвечающее аффинным реперам $S_U(R_x, \bar{\xi}_x)$ (РЖМат, 1957, 5150 К), и изучает матрицы ω, определяющие аффинные связности для $\bar{E}(V_n)$. Эти результаты прилагаются к единой теории поля при $n = 4$. Если задан некоторый фундаментальный тензор $g^{\alpha\beta}$, преобразующийся по закону $g^{\alpha'\beta'} = g^{\alpha\beta} B^{\alpha'}_{\alpha} B^{\beta'}_{\beta}$, то его компоненты g^{00}, g^{0i}, g^{i0}, g^{ij} образуют соответственно один скаляр, два вектора и один тензор относительно $E(V_n)$. Показывается, что преобразование матриц ω и преобразование фундаментального тензора определяют одну группу, что и предопределяет возможность интерпретации единой теории в расслоенном пространстве. Так, интеграл действия $I = \int R_{\alpha j} G^{\alpha j}\, d\tau$, где $G^{\alpha j} = \sqrt{-g}\, g^{\alpha j}$ и $g = \det |g_{\alpha\beta}|$, является инвариантом такой группы. Применяя к этому интегралу вариационный принцип, автор получает уравнения поля, которые, в частности, будут уравнением Эйнштейна—Шрёдингера или уравнением Тоннла, или уравнениями Боннора. А. З. Петров

6941. Геодезическая неустойчивость. Грин (Geodesic instability. Green L. W.), Proc. Amer. Math. Soc., 1956, **7**, № 3, 438—448 (англ.)

Автор обобщает результаты, полученные им для двумерного случая (РЖМат, 1955, 5277). Пусть M — полное односвязное n-мерное риманово многообразие класса C^r $(r \geqslant 4)$. Геодезическим лучом g в M называется гомеоморфный, локально изометричный образ в M полупрямой $0 \leqslant s < \infty$; через $g(s)$ обозначается точка g, соответствующая числу s. Геодезические лучи g, h называются расходящимися, если $g(s)\,h \to \infty$ и $h(s)\,g \to \infty$ при $s \to \infty$, где $g(s)\,h$ — расстояние в смысле метрики M от $g(s)$ до множества h. Геодезические лучи, исходящие из точки $P \in M$, называются равномерно расходящимися, если, каковы бы ни были лучи h, g_i $(i = 1, 2, \ldots)$, исходящие из P, и последовательность $s_i \to \infty$, из $\overline{\lim_{i\to\infty}} h(s_i)\,g_i < \infty$ следует $\lim_{i\to\infty} g_i = h$. Из равномерной расходимости лучей в P следует расходимость любых двух лучей, исходящих из P; обратное верно при $n = 2$, но, как предполагает автор, не верно при $n > 2$. Если $P \in M$, γ — бивектор в точке P, то $K(P, \gamma)$ обозначает кривизну M в точке P в двумерном направлении γ. Точка P называется полюсом M, если P не имеет сопряженных точек ни на одной геодезической, содержащей P. Основной результат работы, относящийся к римановой геометрии:

Теорема 1. Если для всех $Q \in M$ и всех $\gamma K(Q, \gamma) \geqslant -A^2$ $(A > 0)$ и P — внутренняя точка множества полюсов M, то геодезические лучи, исходящие из P, равномерно расходятся.

Пусть M удовлетворяет всем предыдущим условиям и, кроме того, ни одна геодезическая M не содержит двух взаимно сопряженных точек. Тогда заключение теоремы 1 справедливо для любой точки $P \in M$. В тех же предположениях доказываются теоремы 2, 3, 4, первая из которых, как отмечает автор, представляет частный случай одной теоремы Буземана (РЖМат, 1955, 4680). Пусть на M действует собственно разрывная абелева группа изометрий G, $R = M/G$ — пространство, полученное из M отождествлением точек, конгруэнтных относительно G.

Теорема 2. Если R компактно, то через каждую точку R проходит замкнутая геодезическая, гомотопический класс которой соответствует произвольной образующей G.

Вектор e в точке $P \in R$ называется периодическим, если e касается в точке P некоторой замкнутой геодезической R.

Теорема 3. В обозначениях теоремы 2, множество периодических векторов в любой точке $P \in R$ плотно во множестве всех векторов в P.

Пусть M есть единичный шар U^n евклидова пространства с метрикой

$$ds^2 = 4f^2(x)\frac{\sum dx_i^2}{\left(1-\sum x_i^2\right)^2}, \qquad (1)$$

где $f(x)$ принадлежит классу C^1 и $0 < a \leqslant f(x) \leqslant b < \infty$ при $x \in U^n$. Пусть на U^n действует собственно разрывная фуксова группа G, относительно которой инвариантны как метрика (1), так и гиперболическая метрика, получаемая из (1) при $f(x) \equiv 1$. Геодезический поток на $R_1 = M/G$ называется топологически транзитивным, если на R_1 существует геодезическая, касательные к которой всюду плотны в пространстве всех линейных элементов R_1.

Теорема 4. Если 1) группа G — первого рода (перестает быть собственно разрывной в каждой точке границы U^n), 2) $K(P, \gamma) \geqslant -A^2$ для всех P, γ на R_1, 3) ни одна геодезическая R_1 не содержит пары сопряженных точек, то геодезический поток на R_1 топологически транзитивен.

Последняя теорема обобщает результат Салениуса (Salenius T., Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1948, **47**, 1—52). Доказательства основаны на двух леммах о решениях уравнений Якоби, представляющих самостоятельный интерес. $K(x)$ удовлетворяет условию (C), если $K(x)$ непрерывна, $K(x) \geqslant -A^2$ на $(-\infty, \infty)$ и каждое нетривиальное решение уравнения

$$y''(x) + K(x)\,y(x) = 0 \qquad (2)$$

имеет не более одного нуля. Для всего класса C существует такое число $x_0 > 0$, не зависящее от частного вида $K(x)$, что для решения $y(x)$ уравнения (2), $y(0) = 0$, $y'(0) > 0$, при $x \geqslant x_0$ выполняется неравенство $\left|\frac{y'(x)}{y(x)}\right| \leqslant 2A$. Если $K_i(x)$ и $K(x)$ удовлетворяют условию (C), $\lim\limits_{i\to\infty} K_i(x) = K(x)$ равномерно на каждом конечном интервале, $y(x)$ удовлетворяет уравнению (K_i), $y_i(0)$, $y_i'(0) = 1$, то не существует такого постоянного R и последовательности $x_i \to \infty$, что $y_i(x_i) \leqslant R$ $(i = 1, 2\ldots)$.

А. И. Фет

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

6942. О геометрической задаче Шермана Штейна. Форт (A geometric problem of Sherman Stein. Fort M. K., Jr), Pacif. J. Math., 1956, **6**, № 4, 607—609 (англ.)

Доказывается теорема: Если $I \subset R_2$ — жорданова дуга, не обязательно спрямляемая, и H — несчетное множество вращений вокруг некоторой точки, причем для каждого $R \in H$ существует сдвиг T такой, что $(TRI) \cap I$ имеет невырожденную компоненту, то I содержит дугу окружности. Теорема является ответом на вопрос, поставленный Штейном (Stein Sh. K., Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, 455). Р. С. Гутер

6943. Отделимость, «между» и конгруэнтность в плоскостях над неупорядоченными полями. Остром (Separation, betweenness, and congruence in planes over non-ordered fields. Ostrom T. G.), Arch. Math., 1959, **10**, № 2-3, 200—205 (англ.)

Для введения указанных в заглавии понятий используются внутренние и внешние области невырожденного конического сечения в смысле Квиста (Qvist B., Ann. Acad. Sci. Fennicae, 1952, **AI**, 134). Л. А. Скорняков

6944. Геометрия симплекса в E_n. III. Фидлер (Geometrie simplexu v E_n. Část III. Fiedler Miroslav), Časop. pěstov. mat., 1956, **81**, № 2, 182—223 (чеш.; рез. русск., англ.)

Часть I, II, см. РЖМат, 1956, 3312, 8333.

Рассматривается прямоугольный n-симплекс определенного типа, $(n-1)$-мерные грани которого можно занумеровать номерами $1, 2, \ldots, n+1$ так, что внутренние углы φ_{12} (между гранями 1 и 2), φ_{23}, $\varphi_{34}, \ldots, \varphi_{n,n+1}$ являются острыми, все же остальные внутренние углы между этими гранями — прямые. Доказывается, что необходимым и достаточным условием для того, чтобы n-симплекс был прямоугольным симплексом этого типа является существование отличных друг от друга чисел $c_1, c_2, \ldots, c_{n+1}$ таких, что квадраты длин ребер e_{ij} удовлетворяют соотношениям $e_{ij} = |c_i - c_j|$ $(i \neq j, i, j = 1, 2, \ldots, n+1)$. Отсюда непосредственно следует, что каждая m-мерная грань $(1 < m \leqslant n-1)$ является в свою очередь прямоугольным симплексом этого типа. В частности, каждая двумерная грань будет прямоугольным треугольником. Справедливо, однако, и обратное утверждение. Центр описанного $(n-1)$-шара лежит в центре единственного самого длинного ребра. В E_n, содержащем этот n-симплекс, существует прямоугольный параллелепипед, среди вершин которого встречаются все вершины n-симплекса.

В дальнейших теоремах исследуются некоторые свойства ортоцентрических симплексов и ортоцентрических систем $n+2$ точек в E_n (т. е. $n+1$ вершин ортоцентрического n-симплекса и точки пересечения его высот).

Вводится понятие равносторонней n-гиперболы как рациональной алгебраической кривой n-й степени в E_n, имеющей n взаимно перпендикулярных асимптотических направлений. Две такие n-гиперболы в E_n называются для краткости независимыми, если обе системы их n асимптотических направлений независимы в следующем смысле: ни в одном k-мерном (несобственном) линейном пространстве $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, определенном $k+1$ асимптотическими направлениями одной n-гиперболы, не лежит больше, чем k асимптотических направлений другой.

Если система $n+2$ точек в E_n обладает тем свойством, что существуют две независимые равносторонние n-гиперболы, проходящие обе через все точки системы, то эта система является ортоцентрической. Всякая рациональная алгебраическая кривая степени n, проходящая через $n+2$ точки ортоцентрической системы в E_n, является равносторонней n-гиперболой. Для ортоцентрического n-симплекса, точки пересечения высот которого не лежат ни в одной из гиперплоскостей симметрии ребер, существует точно одна равносторонняя n-гипербола, проходящая через вершины и через центр тяжести.

Сформулировано одно характеристическое свойство ортоцентрических симплексов, для которых точка пересечения высот является внутренней точкой (так называемых положительно ортоцентрических симплексов). Симплекс является положительно ортоцентрическим тогда и только тогда, когда существует такая внутренняя его точка P, что для каждой самосопряженной точки S (поскольку она отлична от P) того взаимно обратного преобразования по отношению к симплексу (т. е. преобразования, имеющего в барицентрических координатах вид $x_i' = \frac{c_i}{x_i}$ для действительных $c_i \neq 0$), при котором центр тяжести и точка P соответствуют друг другу, справедливо утверждение, что прямая PS перпендикулярна к гармонической поляре точки S относительно симплекса. P будет тогда точкой пересечения высот симплекса.

В дальнейших теоремах исследуется другой класс симплексов, для которых существуют действительные числа α, β и ненулевые действительные числа $t_1, \ldots, t_{n+1}$ так, что квадраты длин ребер e_{ij} n-симплекса можно выразить в виде

$$e_{ij} = \alpha (t_i^2 + t_j^2) + 2t_i t_j, \quad i \neq j. \qquad (*)$$

В этот класс симплексов можно при специальном выборе отношения $\alpha : \beta$ включить ряд типов симплексов, имеющих определенное простое свойство, получающееся путем обобщения какого-либо свойства треугольника, а именно для того, чтобы для n-симплекса с вершинами $O_1, \ldots, O_{n+1}$ существовала точка $P \neq O$ так, что все углы между (неориентированными) прямыми PO_i, PO_j для $i \neq j$ равны между собой (таким образом P является обобщенной точкой Торричелли в треугольнике), необходимо и достаточно, чтобы симплекс был типа (*) для $\alpha = n\beta$.

Для того чтобы точки касания $P_1, \ldots, P_{n+1}$ $(n-1)$-шара вписанного (в более широком смысле слова) в n-симплекс с вершинами $O_1, \ldots, O_{n+1}$ (P_i лежат в грани, противолежащей O_i), обладали тем свойством, что прямые $O_i P_i$ проходят через одну и ту же точку Q, необходимо и достаточно, чтобы n-симплекс был типа (*) для $\alpha = (n-1)\beta$. Точка Q является, таким образом, обобщенной точкой Жергонна в треугольнике.

Далее показано, что необходимое условие для того, чтобы для n-симплекса существовал $(n-1)$-шар, касающийся всех его (если нужно, продолженных) ребер, имеет вид: n-симплекс принадлежит типу (*) для $\alpha = \beta$. Тогда существует точка R (другое обобщение жергоновой точки треугольника), которая лежит во всех гиперплоскостях, соединяющих точки касания $(n-1)$-шара в каком-либо ребре с $(n-2)$-мерной гранью, противолежащей этому ребру. В указанный класс можно включить и изодинамические симплексы — это те симплексы типа (*), для которых $\alpha = 0$. К симплексам типа (*) можно отнести еще другие типы специальных симплексов, например, положительно ортоцентрические симплексы для $\beta = 0$ и т. п. Дана геометрическая характеристика n-симплексов указанного типа. Из резюме автора

ВЫПУКЛЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

6945. Д. Оман. Решение задачи Банга о покрытии выпуклых фигур. Я г л о м И. М., Матем. просвещение, вып. 4, 1959, 239—241

6946. Дополнительная заметка об объеме целых многогранников. Р и в (A further note on the volume of lattice polyhedra. R e e v e J. E.), J. London Math. Soc., 1959, **34**, № 1, 57—62 (англ.)

Пусть L — фундаментальная решетка в E_3, а L_n — решетка, получаемая из L с помощью сжатия в n раз (n — любое натуральное число). Непустое множество Π пространства E_3 назовем L-многогранником, если оно допускает конечное покрытие трехмерными прямолинейными симплексами, вершины которых принадлежат L. Доказывается:

Т е о р е м а 1. Для каждой точки P определим

$$m(\Pi, P) = \lim_{r \to 0} \frac{A(\Pi, P, r)}{4\pi r^2},$$

где $A(\Pi, P, r)$ — площадь части сферы радиуса r с центром P, общей как сфере, так и многограннику Π. Тогда, если $V(\Pi)$ — объем Π, то

$$(n-1)\,n\,(n+1)\,V(\Pi) = \sum_{P \in L_n} m(\Pi, P) - n \sum_{P \in L} m(\Pi, P).$$

Непустое множество ρ пространства E_3 назовем L-поверхностью, если оно допускает конечное покрытие двумерными симплексами, вершины которых принадлежат L. Доказывается:

Т е о р е м а 2. Для каждой точки P определим

$$m(\rho, P) = \lim_{r \to 0} \frac{A(\rho, P, r)}{\pi r^2},$$

где $A(\rho, P, r)$ — площадь части шара радиуса r с центром P, общей как шару, так и L-поверхности ρ. Тогда

$$\sum_{P \in L_n} m(\rho, P) - n^2 \sum_{P \in L} m(\rho, P) = 0.$$

В. Ф. Рогаченко

6947. Правильные выпуклые многогранники. Г л е й х г е в и х т (Wielościany foremne wypukłe. G l e i c h g e w i c h t B o l e s ł a w), Matematyka, 1958, **11**, № 6, 23—35 (польск.)

Популярное изложение теории правильных выпуклых многогранников в трехмерном евклидовом пространстве. В частности, доказывается, что существует пять и только пять видов таких многогранников. В. Ф. Рогаченко

6948. О расположении точек на сфере. Ф е й е ш-Т о т (Über eine Punktverteilung auf der Kugel. F e j e s-T ó t h L.), Acta math. Acad. scient. hung., 1959, **10**, № 1-2, 13—19 (нем.; рез. русск.)

Рассматривается вопрос о таком расположении точек на сфере, при котором сумма S их расстояний друг от друга будет наибольшей. После подсчета суммы расстояний друг от друга вершин вписанного в шар додекаэдра и исследования случая, когда все точки лежат на окружности одного большого круга, автор приходит к предположению, что и в общем случае для четного числа точек $S_k \leqslant \pi k^2$, причем максимум достигается, когда центр сферы является центром симметрии системы точек. В случае нечетного числа возникает предположение, что $S_{k+1} \leqslant \pi k(k+1)$, причем максимум будет достигаться при распадении системы точек на центрально-симметрическую подсистему и расположенную на окружности одного большого круга нормально разделенную подсистему (так что полуокружности, выделенные при помощи одной точки этой подсистемы, содержат одинаковое число точек). Автору удается доказать справедливость этих утверждений для $n \leqslant 6$, а для $n > 6$ получить следующую оценку верхней S_n границы S_n:

$$S_n < \frac{3n(n-1)}{10}\pi, \qquad (1)$$

$$\frac{\pi}{4} < \overline{\lim} \frac{S_n}{n^2} < \frac{3\pi}{10}. \qquad (2)$$

Вторая часть статьи посвящена рассмотрению аналогичной задачи для эллиптической плоскости. Существенное различие между обеими задачами состоит в том, что в то время как на сфере на наибольшем расстоянии (π соответственно $\pi/2$) могут одновременно находиться две точки, в эллиптической плоскости это может иметь место для трех точек — вершин триортогонального треугольника в связи с чем формулы для значений E_n — максимальной суммы расстояний n точек друг от друга — будут различны для систем с числом точек, имеющим различные вычеты по mod 3. Так, предполагается, что

$$E_{3k} = 3k^2 \frac{\pi}{2}, \; E_{3k+1} = (3k+2)\,k\pi/2,$$

$$E_{3k+2} = (3k+1)\,(k+1)\,\pi/2, \qquad (3)$$

причем в экстремальной точечной системе либо каждая точка находится на расстоянии $\pi/2$ по меньшей мере от двух точек, либо все точки лежат на одной прямой или ее полюсе. Справедливость этого доказывается для $n \leqslant 6$. Для $n > 6$ устанавливается, что

$$E_n \leqslant \frac{n(n-1)}{5}\pi \qquad (4)$$

и

$$\pi/6 \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{E_n}{n^2} \leqslant \pi/5.$$

А. Г. Школьник

6949. Упрощение элементарно-геометрического доказательства Шварца без аксиомы параллельности. Сас (Ein elementargeometrischer Beweis von H. A. Schwarz vereinfacht und unabhängig vom Parallelenaxiom geführt. Szász Paul), Acta math. Acad. sci. hung., 1957, 8 № 1-2, 217—222 (нем.)

Упрощается доказательство Шварца (Schwarz H. A., Gesammelte mathematische Abhandlungen. II. Berlin, 1890, 344—345) следующей теоремы Фаньяно. Среди всех прямолинейных треугольников, вписанных в остроугольный прямолинейный треугольник, имеет минимальный периметр тот, стороны которого соединяют основание высот данного треугольника. А. А. Бовди

6950. Непрерывное отображение, определяемое выпуклой кривой. Добавление. Стейн (A continuous mapping defined by a convex curve (addendum). Stein Sherman K.), Math. Z., 1959, 70, № 5, 465 (англ.) См. РЖМат, 1959, 11562.

6951. О преобразовании изометричных поверхностей. Погорелов А. В., Докл. АН СССР, 1958, 122, № 1, 20—21

Дается способ сопоставления каждой паре изометричных поверхностей пространства постоянной кривизны $K \neq 0$ пары изометричных поверхностей евклидова пространства и обратно каждой паре изометричных поверхностей евклидова пространства — пары изометричных поверхностей пространства постоянной кривизны. При указанном сопоставлении двух пар изометричных поверхностей сохраняется их конгруэнтность. Автор этим дает новый подход к проблеме однозначной определенности выпуклых поверхностей в пространствах постоянной кривизны. М. А. Джавадов

См. также: 6081, 6248, 6249, 6268, 6309, 6393, 6403, 6530.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Редактор *В. К. Саульев*

6952. Принципы численного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и методы оценки получающейся при этом погрешности. Буковин (Prinzipien bei der numerischen Lösung, von Anfangswertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen und Methoden zur Abschätzung des Fehlers. Bukovics E.), Österr. Ingr-Arch., 1958, 12, № 1-2, 66—82 (нем.)

Автор видит цель своей статьи в том, чтобы помочь читателю ориентироваться в многочисленных новых работах, посвященных численному решению обыкновенных дифференциальных уравнений, оценке получающейся при этом погрешности и устойчивости используемых разностных схем. Статья содержит обзор некоторых идей и неполные литературные указания. В. С. Рябенький

6953. Формулы для численного интегрирования дифференциальных уравнений первой степени, выведенные при помощи разностей. Коциу (Formule pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale de ordinul intîi, deduse cu ajutorul diferenţelor. Coţiu A.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Cluj. Cluj, 1959, 49—59 (рум.; рез. русск., франц.)

Для численного решения уравнения $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ автор выводит следующие две формулы:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left[f(x_i, y_i) + 4f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i)\right) + f\left(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)\right)\right], \qquad (1)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{8}\left[f(x_i, y_i) + 3f\left(x_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{h}{3}f(x_i, y_i)\right) + 3f\left(x_i + \frac{2h}{3}, y_i + \frac{2h}{3}f(x_i, y_i)\right) + f\left(x_i + h, y_i + hf(x_i, y_i)\right)\right] \qquad (2)$$

и их обобщение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6(1-n^2)}[(1-3n^2)k_1 + 2k_2 + 2k_3 + (1-3n^2)k_4],$$

где $k_1 = f(x_i, y_i)$, $k_2 = f\left(x_i + \frac{1-n}{2}h, y_i + \frac{1-n}{2}hk_1\right)$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1+n}{2}h, y_i + \frac{1+n}{2}hk_1\right),$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_1).$$

Эти формулы получены путем замены производных $y^{(k)}(x)$ $(k \geqslant 2)$ в разложении

$$y(x_i + h) = y(x_i) + \frac{h}{1!}y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + \ldots$$

соответствующими разностными отношениями от $y'(x)$. Для формул (1) и (2) устанавливаются рекуррентные и прямые оценки погрешности. Отмечается, что формула (2) точнее формулы (1). В. К. Саульев

6954. Действие граничных условий и размера шага на точность конечноразностных решений двуточечных граничных задач. Боруэйн, Митчелл (The effect of boundary conditions and mesh size on the accuracy of finite difference solutions of twopoint boundary problems. Borwein David, Mitchell Andrew R.), Z. angew. Math. und Phys., 1959, 10, № 3, 221—232 (англ.; рез. нем.)

Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + j\frac{dy}{dx} + ky = g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant L$$

(j и k — постоянны), заменяется системой разностных уравнений

$$ay_{r+2} + by_{r+1} + cy_r = f_r \quad (r = 0, 1, \ldots, N-1), \qquad (1)$$

где

$$a = 1 + \frac{jh}{2}, \quad b = kh^2 - 2, \quad c = 1 - \frac{jh}{2},$$

$$f_r = h^2 g((r+1)h), \quad y_r = y(rh).$$

Значения шага h, для которых система разностных уравнений, вообще говоря, не имеет решения, авторы называют критическими. Выписывая явные выражения

решения системы (1) с соответствующими граничными условиями, авторы для критических значений шагов выводят соотношения, зависящие от коэффициентов уравнений (1) и граничных условий.

Приводится явное выражение для погрешности ε_r, удовлетворяющей системе $a\varepsilon_{r+2} + b\varepsilon_{r+1} + c\varepsilon_r = R_r$. Если $L/(N+1)$ близко к критическому значению шага h, то в выражении численной погрешности некоторые коэффициенты по модулю большие, а некоторые относительно малые. Авторы отмечают, что в этих случаях для решения системы разностных уравнений итерационные (релаксационные) методы предпочтительнее, чем прямые, так как они позволяют уменьшать в первую очередь члены, соответствующие большим невязкам. В качестве иллюстрации приведен анализ трех числовых примеров с $N=3$. В. К. Саульев

6955. Критерий устойчивости для численного интегрирования. Уилф (A stability criterion for numerical integration. Wilf Herbert S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 3, 363—365 (англ.)

Пусть для численного интегрирования уравнения

$$y' = f(x, y)$$

применяется многоточечная формула

$$y_1 = a_0 y_0 + a_{-1} y_{-1} + \ldots$$
$$\ldots + a_{-p} y_{-p} + h\left[b_1 y_1' + b_0 y_0' + \ldots + b_{-p} y_{-p}'\right]. \quad (1)$$

Устанавливается следующее необходимое и достаточное условие для устойчивости разностной схемы (1): формула интегрирования (1) устойчива, если и только если матрица

$$A_{r,s} = \sum_{l=0}^{\min(r,s)} \{C_{p+l+1-r} C_{p+l+1-s} - C_{r-l} C_{s-l}\},$$
$$(r, s = 0, 1, \ldots, p),$$

где

$$a_1 = -1, \quad \frac{1}{L} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}, \quad \lambda = -\frac{h}{L},$$
$$C_\delta = \lambda b_{\delta-p} - a_{\delta-p}, \quad (\delta = 0, 1, \ldots, p+1),$$

положительно определена. При доказательстве предполагается, что L — постоянная в соответствующей области. М. А. Алексидзе

6956. Заметка о численном решении некоторых линейных граничных задач. Кол (A note on numerical solution of certain linear boundary value problems. Cole R. W.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, **5**, № 3, 258—260 (англ.)

Пусть задана система m обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(t)\,x(t) + y(t) \quad (1)$$

(в векторной записи), а также m граничных условий.

Предлагается следующий метод решения. Промежуток $[a, b]$ разбивается точками t_i на части длиною h_i (вообще говоря, неравные). Для фиксированного i пишем

$$x_{i+1} = x_i + h_i x_i' + \ldots + (r!)^{-1} h_i^r x_i^{(r)}. \quad (2)$$

Производные $x_i^{(p)}$ решения в точке t_i линейно выражаем с помощью (1) через x_i. Подстановка в (2) дает

$$x_{i+1} = J_i x_i + f_i, \quad (3)$$

где матрица J_i и вектор f_i выражаются через значения матрицы G и вектора y и их производных в точке t_i. Если $t_0 = a$ и $t_n = b$, то формулы (3) приводят к соотношению

$$x_n = J_{n-1} J_{n-2} \ldots J_0 x_0 + J_{n-1} J_{n-2} \ldots J_1 f_0 + J_{n-1} J_{n-2} \ldots$$
$$\ldots J_2 f_1 + \ldots + J_{n-1} f_{n-2} + f_{n-1}. \quad (4)$$

Это есть система m линейных алгебраических уравнений относительно $2m$ неизвестных составляющих векторов x_0 и x_n. Добавляя к этим уравнениям m граничных условий, находим x_0. После этого равенства (3) определяют x_i. Для случая постоянных G и y и равномерного разбиения промежутка доказана сходимость.

Указанный метод был запрограммирован для машины ИБМ-701 и часто употреблялся. Его достоинства: применяются стандартные операции над матрицами; порядок матриц не зависит от числа точек деления; шаг можно брать переменным. М. К. Гавурин

6957. Численный метод для решения краевых задач и его применение к некоторым задачам теории упругости. Хайдин (Један поступак за нумеричко решавање граничних задатака и његова примена на неке проблеме теорије еластичности. Хајдин Никола), Зб. Грађевинског фак. Ун-т Београду, 1958, № 4, 1—57 (сербо-хорв.; рез. англ., нем.)

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)} + b_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + b_1(x)\,y' + b_0(x)\,y = f(x)$$

с заданными краевыми условиями в точках $x=0$ и $x=l$ записывается в виде $y^{(n)}(x) = \eta(x)$, где $\eta(x) = f(x) - f_{n-1}\,y^{n-1} \ldots - f_0$, откуда следует

$$y(x) + \int_0^l a(x, \xi)\,\eta(\xi)\,d\xi + y_0(x), \quad (2)$$

где $a(x, \xi)$ — функция Грина, а $y_0(x)$ — зависящий от краевых условий известный полином степени $s \leqslant n-1$. Из соответствующей линейной комбинации производных $y^{(m)}(x) = \int_0^l a^{(m)}(x, \xi)\,\eta(\xi)\,d\xi + y_0^{(m)}(x)$ легко получается интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\eta(x) + \int_0^l g(x, \xi)\,\eta(\xi)\,d\xi + f^*(x), \quad (3)$$

где

$$g(x, \xi) = f_{n-1}\,a^{(n-1)}(x, \xi) + \ldots + b_0 a(x, \xi),$$
$$f^*(x) = f(x) - f_{n-1}\,y_0^{(n-1)} - \ldots - f_0 y_0.$$

Интегральное уравнение (3) решается численно. Из полученных значений $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\mu$ по формуле (2) получаются приближенные значения искомого решения данного уравнения (1). Метод обобщается на двумерные уравнения с частными производными эллиптического типа. В этом случае данное уравнение с частными производными на прямых, параллельных осям координат, сводится к системе обыкновенных дифференциальных соотношений, к которым и применяется описанный выше метод. Приведены многочисленные числовые примеры из области теории упругости. Показывается, что обычный метод конечных разностей при той же сетке дает значительно более грубый результат. В. К. Саульев

6958. Конечноразностный аналог функции Грина в трехмерном случае. Люстерник Л. А., Вычислит. математика, сб. 1, 1957, 3—22

Рассматривается оператор Лапласа в трехмерном пространстве

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_3^2} \quad (1)$$

и его разностные аналоги вида $\Delta_h u(\xi) =$

$$= \frac{2}{M h^2}\left\{\left[\sum_{k_1, k_2, k_3} c_{k_1 k_2 k_3}\,u(\xi_1 + k_1 h,\ \xi_2 + k_2 h,\ \xi_3 + k_3 h)\right] - u(\xi_l)\right\}.$$

Коэффициенты $c_{k_1k_2k_3}$ обладают следующими свойствами: а) лишь конечное число коэффициентов $c_{k_1k_2k_3}$ отлично от нуля, б) $c_{k_1k_2k_3} \geqslant 0$, в) $c_{-k_1,-k_2,-k_3} = c_{k_1k_2k_3}$, г) $\sum_{k_1k_2k_3} c_{k_1k_2k_3} = 1$, д) величина $\sum_{k_1k_2k_3} c_{k_1k_2k_3} \cdot k_i k_j$ равна нулю, если $i \neq j$, и равна M, если $i = j$.

Выписывается в явном виде через собственные функции и собственные значения оператора Δ_h периодическая с периодом $2/h$ по каждому переменному r_1, r_2, r_3 сеточная функция $\varphi_h(B) = \varphi_h(r_1h, r_2h, r_3h)$, удовлетворяющая в точках $B(r_1h, r_2h, r_3h)$ куба $-\frac{1}{h} < r_l < \frac{1}{h}$ уравнению $\Delta_h\varphi_h(B) = \begin{cases} 0, & \text{если } B \text{ не лежит в начале координат,} \\ 1/h^3, & \text{если } B \text{ совпадает с началом координат.} \end{cases}$

Функция $\varphi_h(B) \equiv g_h(A, B)$ играет роль разностного аналога функции Грина для уравнения Лапласа, если начало координат помещено в точку A. Доказывается, что $\varphi_h(B)$ имеет „особенность“, похожую на особенность функции Грина $\frac{1}{4\pi r}$ для уравнения Лапласа, именно доказано равенство

$$\varphi_h(B) \equiv \varphi_h(r_1h, r_2h, r_3h) = \frac{1}{4\pi r} + O(1) + O\left(\frac{h^{2/5}}{r}\right) + O\left(\frac{h^{4/5}}{r^2}\right),$$

где

$$r = h\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2}, \quad \frac{1}{h^2} \geqslant r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \geqslant 1.$$

Далее строится разностный аналог функции Грина для уравнения Лапласа, рассматриваемого в ограниченной области Q пространства (ξ_1, ξ_2, ξ_3) при нулевых значениях решения на границе Q. Устанавливается, что при $h \to 0$ разностный аналог функции Грина равномерно сходится к функции Грина в области Q вне любой фиксированной окрестности той точки, где функция Грина имеет особенность. Отмечается, что аналогичные результаты имеют место также при $n > 3$. В. С. Рябенький

6959. Об оценке погрешности метода сеток для задач Дирихле и Неймана. Лебедев В. И., Докл. АН СССР, 1959, 128, № 4, 665—667

Автор предложил (РЖМат, 1960, 4528, 4529) для решения задачи Неймана воспользоваться следующим методом: решить задачу Дирихле для сопряженной функции и затем с помощью соотношений Коши—Римана находить искомое решение задачи Неймана, граничное условие которой в случае непрямоугольной области удовлетворяется в слабом смысле.

В реферируемой статье автор дает необходимые для оценки погрешности разностного решения задачи Неймана указанным выше методом, оценки первых разностных отношений погрешности для задачи Дирихле в случае применения во внутренних точках сетки простейшей сетчатой аппроксимации оператора Лапласа, а в приграничных узлах либо квадратичной интерполяции, либо замены вторых производных разделенными разностями по значениям функции в данном узле и в ближайших узлах, лежащих на границе или удаленных на расстояние h от данного. М. А. Алексидзе

6960. О численном решении 2-групповых уравнений диффузии многозонных реакторов с помощью электронных цифровых вычислительных машин. Рембзер, Фишер (Über die numerische Lösung der 2—Gruppen— Diffusionsgleichnungen für Mehrschichtenreaktoren mit Hilfe elektronischer Digital—Rechenmaschinen. Rembser Josef, Fischer Erhard), Atomkern—Energie, 1959, 4, № 5, 186—189 (нем., рез. англ.)

Задача состоит в нахождении наименьшего (оно положительно) собственного значения ν и соответствующего ему решения Φ_1, Φ_2 следующей системы уравнений:

$$D_1\Delta\Phi_1 - \sum\nolimits_1 \Phi_1 + \nu\sum\nolimits_{f_2} \Phi_2 = 0$$

$$D_2\Delta\Phi_2 - \sum\nolimits_2 \Phi_2 + p\sum\nolimits_1 \Phi_1 = 0 \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right), \quad (1)$$

где известные коэффициенты $D_1, \sum_1, \sum_{f_2}, D_2, \sum_2, p\sum_1$ кусочно-постоянные. В точках разрыва этих коэффициентов (на границе раздела двух разных зон) заданы обычные условия сшивки решения (непрерывность Φ_i и $D_i\frac{\partial\Phi_i}{\partial r}$, $i = 1, 2$), а в центре $(r = 0)$ и на границе $(r = R)$ реактора заданы граничные условия

$$\frac{\partial\Phi_i(0)}{\partial r} = \Phi_i(R) = 0 \quad (i = 1, 2). \qquad (2)$$

Задача (1), (2) решается на вычислительной машине ИБМ-650 двумя способами. Первый способ, как его авторы назвали, аналитический, сводится к нахождению наименьшего корня ν соответствующего детерминанта. Этот корень вычислен методом табулирования значений детерминанта вблизи предполагаемого значения ν.

В качестве второго способа был применен обычный метод конечных разностей с последующим нахождением ν и Φ_i $(i = 1, 2)$ при помощи итераций. При этом уже четвертая итерация дает ν с четырьмя верными знаками, а время, затрачиваемое машиной на одну итерацию при трех зонах и 60 интервалах по оси r, составляет 8 мин.

В. К. Саульев

6961. Решение задачи о несовершенной скважине методом прямых. Алихашкин Я. И., Вычислит. математика, сб. I, 1957, 136—152

Для решения задачи о расчете установившегося режима притока жидкости (воды, нефти) к „несовершенной скважине“ автор использует следующую математическую постановку вопроса:

В прямоугольнике $r_0 \leqslant r \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant h$ найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0, \qquad (1)$$

удовлетворяющее граничным условиям:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0,\ z=h} = 0,$$

$$\Phi(r, z)|_{r=r_0} = 0, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant z \leqslant b,$$

$$\left.\frac{\partial\Phi(r, z)}{\partial r}\right|_{r=r_0} = 0, \quad \text{если} \quad b < z \leqslant h,$$

$$\Phi(r, z)|_{r=R} = 1.$$

Для численного решения этой задачи в уравнении (1) производная по z заменяется разностным отношением, а производные по r сохраняются („метод прямых“). Решение получающейся системы обыкновенных дифференциальных уравнений выписывается через функции Бесселя, для чего приходится решать систему линейных алгебраических уравнений. Результаты расчетов для некоторых значений параметров r_0, R, b и h приведены в виде таблиц и графиков. Доказательство сходимости

процесса численного решения при стремлении шага по z к нулю не проводится. В. С. Рябенький

6962. О степени сходимости дискретных аппроксимаций для решений проблемы Дирихле. Лаасонен (On the degree of convergence of discrete approximations for the solutions of the Dirichlet problem. Laasonen Pentti. Suomalais. tiedeakat. toimituks. 1957, Sar. A1, № 246, 19 pp., ill.) (англ.)

Исследуется ошибка приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоском случае, полученного путем простейшей (5-точечной) разностной аппроксимации. При этом граница области предполагается составленной из конечного числа аналитических или кусочно-аналитических дуг так что каждая граничная точка есть либо внутренняя точка аналитической дуги, либо угловая точка, где две примыкающие аналитические дуги образуют угол $\alpha_\nu\pi$, $0<\alpha_\nu\leqslant 2$. Предполагается, что граничная функция f во внутренних точках границы имеет непрерывные производные до 5-го порядка относительно длины дуги s, а в окрестности угловых точек $\frac{d^n f}{ds^n}=O(|s-s_\nu|^{-n})$ $(n=0,1,2,\ldots,5)$, где s_ν обозначает значение s, относящееся к угловой точке.

В основу исследования положен мажорантный метод С. А. Гершгорина, видоизмененный соответствующим образом в связи с наличием разрывов в граничных условиях. Получены следующие оценки для разности δ_h между приближенным и точным решениями задачи:

$$\delta_h=\begin{cases}O(h), & \alpha<1,\\ o(h^{1/\alpha-\varepsilon}), & \varepsilon>0,\quad \alpha\geqslant 1,\end{cases}$$

в случае простого сноса граничных значений (с ошибкой $O(h)$),

$$\delta_h=\begin{cases}O(h^2), & \alpha<1/2,\\ o(h^{1/\alpha-\varepsilon}), & \varepsilon>0,\quad \alpha\geqslant\frac{1}{2},\end{cases}$$

в случае сноса по Коллатцу (когда ошибка $O(h^2)$), α — наибольшее из чисел α_ν. В случае, когда все углы выпуклы и граничные значения непрерывны в угловых точках, доказано, что $\delta_h=O(h)$ в случае простого сноса граничных значений и $\delta_h=O(h^2)$ в случае сноса по Коллатцу. Г. И. Бирюк

6963. Об ошибке дискретной аппроксимации в случае задачи Дирихле с областью, имеющей углы. Лаасонен (On the truncation error of discrete approximations to the solutions of Dirichlet problems in a domain with corners. Laasonen Pentti), J. Assoc. Comput Machinery, 1958, 5, № 1, 32—38 (англ.)

В другой работе (реф. 6962) автор для величины k, входящей в выражение погрешности $u-u_n=O(h^k)$, возникающей при решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа с кусочно-аналитической границей и непрерывной граничной функцией, простейшим методом сеток с линейной интерполяцией граничных значений, получил оценку

$$k\geqslant\min\left(2,\frac{2}{\alpha}\right),\qquad 0<\alpha<1,\qquad (1)$$

где $\alpha\pi$ — величина наибольшего угла данной границы. В реферируемой работе автор экспериментальным путем подтверждает справедливость оценки (1) для случая $\alpha\geqslant 1$ (невыпуклые области). В. К. Саульев

6964. О «наилучшем» 9-точечном разностном аналоге уравнения Лапласа на прямоугольной сетке. Гринспан (On «best» nine-point Laplace difference analogues on rectangular grids. Greenspan D.), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, 12, № 1, 111—116 (англ.)

Для уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ выводится 9-точечный разностный аналог вида

$$-20u_0+2\frac{5-p^2}{1+p^2}(u_1+u_3)+$$

$$+2\frac{5p^2-1}{1+p^2}(u_2+u_4)+u_5+u_6+u_7+u_8=0,\qquad (1)$$

где $p=h/d$, h, d — размеры прямоугольной сетки в направлениях x и y соответственно. Методом, изложенным в работе автора (РЖМат, 1958, 3279), доказывается следующая теорема: Если $p\neq 1$, тогда уравнение (1) является допустимым аналогом 5-го порядка, и не существует допустимого аналога 6-го порядка. Д. Ф. Давиденко

6965. О численном решении проблемы Дирихле. Гринспан (On the numerical solution of Dirichlet problems. Greenspan Donald), Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1959, 12, № 1, 117—123 (англ.)

Для решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа $u_{xx}+u_{yy}=0$ строится 5-точечное разностное уравнение вида

$$-2u_0+\frac{1}{1+p^2}(u_1+u_3)+\frac{p^2}{1+p^2}(u_2+u_4)=0,\qquad (1)$$

где $p=h/d$, h, d — размеры прямоугольной сетки в направлениях x и y соответственно.

Пользуясь известными результатами С. А. Гершгорина, автор доказывает единственность решения системы разностных уравнений, полученных на основании (1); получает оценку погрешности приближенного решения

$$|u_h-u|<\frac{M_4r^2(h^2+d^2)}{48}+M_1(h+d),$$

где r — радиус некоторой фиксированной окружности, содержащей рассматриваемую область, а также устанавливает сходимость численного решения к аналитическому, когда $h^2+d^2\to 0$. Д. Ф. Давиденко

6966. О численном решении n-мерной граничной задачи, связанной с уравнением Пуассона. Гринспан (On the numerical solution of n-dimensional boundary-value problems associated with Poisson's equation. Greenspan Donald), J. Franklin Inst., 1958, 266, № 5, 365—371 (англ.)

В n-мерной области G, ограниченной гиперповерхностью S, рассматривается задача Дирихле для уравнения Пуассона

$$\sum_{i=1}^n\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}=f(x_1,\ldots,x_n),\qquad u|_S=g(x_1,\ldots,x_n),$$

в предположении, что g определена и непрерывна на S и $f\in C^2$ в G.

Для решения этой задачи методом сеток приводится разностное уравнение в случае неравномерной сетки:

$$-2u(x_1,\ldots,x_n)+$$

$$+\frac{1}{\sum_{j=1}^n B_j}\sum_{j=1}^n\{B_j[u(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j+h_j,x_{j+1},\ldots,x_n)+$$

$$+u(x_1,\ldots,x_{j-1},x_j-h_j,x_{j+1},\ldots,x_n)]\}-$$

$$-\frac{\prod_{j=1}^n h_j^2}{\sum_{j=1}^n B_j}f(x_1,\ldots,x_n)=0,\qquad (1)$$

где

$$B_1 = \prod_{j=2}^{n} h_j^2, \quad B_n = \prod_{j=1}^{n-1} h_j^2, B_l = h_1^2 \ldots h_{j-1}^2 h_{j+1}^2 \ldots h_n^2,$$
$$j = 2, 3, \ldots, n-1.$$

Доказывается единственность решения системы разностных уравнений, полученных при помощи (1); выводится оценка погрешности приближенного решения

$$|u_h - u| < \frac{M_4 r^2}{48} \sum_{j=1}^{n} h_j^2 + M_1 \sum_{j=1}^{n} h_j,$$

где r — радиус n-мерной сферы, содержащей G, и доказывается сходимость численного решения к аналитическому, когда $\sum_{j=1}^{n} h_j^2 \to 0$.

При доказательстве указанных положений используются известные результаты С. А. Гершгорина.

Д. Ф. Давиденко

6967. О девятиточечном методе численного нахождения функции потока Стокса. Гринспан (On a nine point method for the numerical evaluation of the Stokes stream function. Greenspan Donald), Portug. math., 1958, 17, № 3-4, 97—106 (англ.)

На квадратной сетке с шагом h выводится девятиточечное сеточное уравнение

$$20(-96+4p^2+p^4)u_{ij} - 2(-192+44p^2+9p^4) \times$$
$$\times (u_{i+1,j}+u_{i-1,j}) + 2(192-96p+28p^2-18p^3+5p^4-2p^5) \times$$
$$\times u_{i,j+1} + 2(192+96p+28p^2+18p^3+5p^4+2p^5)u_{i,j-1} -$$
$$-(-96+48p+4p^2-6p^3+p^4)(u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}) -$$
$$-(-96-48p+4p^2+6p^3+p^4)(u_{i-1,j-1}+u_{i+1,j-1}) = 0, \quad (1)$$

где $p = h/y_j$, $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$, аппроксимирующее уравнение Стокса

$$U_{xx} + U_{yy} + \frac{1}{y} U_y = 0 \quad (2)$$

с погрешностью $O(h^4)$.

Для случая задачи Дирихле, соответствующей уравнению (2), при предположении $y \neq 0$ и $|h/y| < 1$, обычным путем (метод Гершгорина) устанавливается единственность решения системы сеточных уравнений (1) и оценивается погрешность

$$|U_{i,j} - u_{ij}| \leqslant \frac{h^4 r^2}{4} \left(\frac{10 M_5}{3\bar{y}} + 68 M_6 \right) + 2hM_1,$$

где M_l — максимум во всей области производных от U i-го порядка, $\bar{y} = \inf |y|$, а r — радиус круга, содержащего в себе данную область.

В. К. Саульев

6968. Замечание о разностном уравнении, аппроксимирующем уравнение Лапласа. Гринспан (Note on difference equation approximations of Laplace's equation. Greenspan Donald), J. Franklin Inst., 1959, 268, № 1, 46—52 (англ.)

Автор показывает, что не существует другого девятиточечного разностного уравнения, аппроксимирующего уравнение Лапласа с погрешностью $O(h^4+d^4)$, кроме уравнения

$$-20u_0 + 2\frac{5-p^2}{1+p^2}(u_1+u_3) + 2\frac{5p^2-1}{1+p^2}(u_2+u_4) +$$
$$+ (u_5+u_6+u_7+u_8) = 0,$$

где $p = (h/d) \neq 1$ (h и d — шаги прямоугольной сетки соответственно в направлении осей x и y).

В. К. Саульев

6969. p-циклические матрицы: обобщение схемы последовательной верхней релаксации Янга—Франкела. Варга (p-cyclic matrices: a generalization of the Yound—Frankel successive overrelaxation scheme. Varga Richard S.), Pacif. J. Math., 1959, 9, № 2, 617—628 (англ.)

Все основные результаты работы Янга (РЖМат, 1955, 1953) обобщаются на случай p-циклических матриц. Квадратная матрица называется p-циклической ($p \geqslant 2$), если она после некоторой перестановки строк и столбцов принимает вид следующей клеточной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & L_1 \\ L_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & L_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & & L_p & 0 \end{pmatrix},$$

где нулевые матрицы, стоящие на главной диагонали, являются квадратными. Результаты Янга получаются при $p = 2$. Например, соотношение Янга $\bar{\mu}^2 \omega_b^2 = 4(\omega_b - 1)$, устанавливающее зависимость между оптимальным (наилучшим) множителем ω_b с максимальным модулем собственных значений $\bar{\mu}$ матрицы, соответствующей итерационному процессу Якоби, обобщается следующим образом:

$$\bar{\mu}^p \omega_b^p = p^p (p-1)^{1-p} (\omega_b - 1).$$

Отмечается, что система простейших сеточных уравнений, аппроксимирующая на шестиугольной сетке задачу Дирихле, обладает 3-циклической матрицей и, следовательно, к ней можно применить обобщенный метод последовательной верхней релаксации. Более подробно рассматривается метод переменных направлений (РЖМат, 1.5., 3.3.). В частности, если в этом методе использовать l неотрицательных параметров циклически, то он эквивалентен итерационному методу Зейделя, примененному к $2l$-циклической матрице.

В. К. Саульев

6970. О «двулинейных» итерационных методах для решения разностного уравнения Лапласа и бигармонического разностного уравнения. Партер (On «Two-Line» iterative methods for the Laplace and biharmonic difference equations. Parter Seymour V.), Numer. Math., 1959, 1, № 4, 240—252 (англ.)

Запишем систему простейших сеточных уравнений Лапласа

$$u_{i,j} = \theta_x (u_{i-1,j} + u_{i+1,j}) + \theta_y (u_{i,j-1} + u_{i,j+1}),$$
$$\theta_x \equiv \frac{\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad \theta_y \equiv \frac{\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)}, \quad \theta_x + \theta_y = \frac{1}{2},$$

на „прямоугольнике" $1 \leqslant i \leqslant p-1$, $1 \leqslant j \leqslant q-1$, $(q-1)$ — четное, в матричном виде

$$MX = Y, \quad (1)$$

где

$$X = (X_k), \; k = 1, 2, \ldots, q-1, \; X_k = (u_{k,j}),$$
$$j = 1, 2, \ldots, p-1,$$
$$M = \{ \ldots, -\theta_y E, L, -\theta_y E, \ldots \},$$
$$L = E - \theta_x T_{p-1},$$

T_{p-1} — якобиева матрица, главная диагональ которой состоит из нулей, а две другие диагонали состоят из единиц. Вводя преобразование $X = P_{q-1}\xi$, где P_{q-1} — диагональная клеточная матрица $(P, P, \ldots, P)$ порядка $\frac{1}{2}(q-1)$,

$$P=\begin{pmatrix} E & E \\ -E & E \end{pmatrix},$$

автор представляет систему (1) в виде

$$L_4\xi=\eta.$$

Здесь

$$L_4=\{\ldots, R_0,\ L_0,\ R_0^T,\ldots\},$$

$$L_0=\begin{pmatrix} L+\theta_y E & 0 \\ 0 & L-\theta_y E \end{pmatrix};$$

при этом матрица L_0 легко обращаема.

Автор показывает, что скорость сходимости следующих трех „двулинейных" итерационных методов

$$L_0V_l^{n+1}=-\left(R_0^T V_{l+1}^n+R_0V_{l-1}^n\right)+\eta_l, \quad (2)$$

$$L_0V_l^{n+1}=-\left(R_0^T V_{l+1}^n+R_0V_{l-1}^{n+1}\right)+\eta_l, \quad (3)$$

$$\frac{1}{\omega}L_0V_l^{n+1}=-\left[R_0^T V_{l+1}^n+R_0V_{l-1}^{n+1}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\frac{1}{\omega}\right)L_0V_l^{n+1}\right]+\eta_l, \quad (4)$$

где $\xi=(V_l)$, $l=1,2,\ldots,\frac{1}{2}(q-1)$, V_l — вектор размерности $2(p-1)$ в два раза больше, чем в случае соответствующих „однолинейных" итерационных методов Ричардсона, Либмана и последовательной верхней релаксации. Аналогичные результаты автор получает для бигармонических сеточных уравнений. В. К. Саульев

6971. Решение методом Монте-Карло системы разностных уравнений, соответствующих краевой задаче для уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{K\partial u}{y\partial y}=0.$

Эрлик (Monte Carlo solutions of boundary value problems involving the difference analogue of

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{K\partial u}{y\partial y}=0.$$

Ehrlich Louis W.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, 6, № 2, 204—218 (англ.)

Описывается известный метод Монте-Карло для решения системы разностных уравнений

$$u_0=\sum_{i=1}^4\beta_i u_i,\ \sum_{i=1}^4\beta_i=1,$$

аппроксимирующей эллиптическое уравнение, упомянутое в заглавии. Кратко рассматривается случай общих граничных условий. На конкретных примерах, просчитанных на цифровой вычислительной машине ORDVAC, автор проводит сравнение метода Монте-Карло с итерационным методом. Для просчитанных примеров метод Монте-Карло значительно уступает итерационным, так как он медленно сходится. Отмечаются следующие положительные стороны метода Монте-Карло: 1) скорость сходимости не зависит от размерности данной проблемы; 2) возможность использования параллельно нескольких вычислительных машин, так как отдельные блуждания не зависят друг от друга; 3) возможность вычисления искомой функции в одном узле (при применении метода итераций находятся значения искомой функции сразу во всех узлах); 4) простота.

В. К. Саульев

6972. Расчетные принципы для сеточной модели из сопротивления. Гэр (Unifying design principle for the resistance network analogue. Gair F. C.), Brit. J. Appl. Phys., 1958, 10, № 4, 166—172 (англ.)

Рассматривается уравнение Пуассона $\nabla^2 f=g$ в D, решение которого в малых прямоугольных ячейках со сторонами δs_ν ($\nu=1,2,3,4$) в силу формулы Грина удовлетворяет соотношению

$$\sum_\nu^4\int_{\delta s_\nu}\frac{\partial f}{\partial n}ds=\int\int_{\delta S_0}g dS, \quad (1$$

где n — нормаль. Затем применяются следующие приближения:

$$\int_{\delta s_\nu}\frac{\partial f}{\partial n}ds=\frac{\delta f_\nu}{\delta n_\nu}\delta s_\nu,$$

$$\int\int_{\delta S_0}g dS=g_0\delta S_0,$$

где f_ν — решение уравнения Пуассона в узлах сетки и (1) записывается в разностном виде

$$\sum_\nu^4\frac{\delta f_\nu}{\delta n_\nu}\delta s_\nu=g_0\delta S_0. \quad (2$$

Решение уравнения (2) можно моделировать на сетках с проводимостью $G_\nu\sim\delta s_\nu/\delta n_\nu$. Если подводить ток $i_0\sim g_0\delta S_0$, то напряжение V_0 даст искомое решение f в центре малого прямоугольника. Аналогично обстоит дело в трехмерном случае. Анализ погрешности отсутствует. М. А. Алексидзе

6973. Численное решение уравнения диффузии с коэффициентом диффузии, зависящим от концентрации. Филип (Numerical solution of equations of the diffusion type with diffusivity concentration-dependent. Philip J. R.) Austral. J. Phys., 1957, 10, № 1, 29—42 (англ.)

Часть I см. РЖМат, 1957, 4378.

Чтобы решить уравнение

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D(\theta)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)-\frac{\partial K(\theta)}{\partial x}$$

при условиях $\theta(0,x)=\theta_n$, $\theta(t,0)=\theta_0$, где θ_0 и θ_n — постоянные, автор предлагает считать t и θ независимыми переменными, а x искомой функцией. Тогда уравнение примет вид

$$-\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\theta}\left[D(\theta)\left(\frac{\partial x}{\partial\theta}\right)^{-1}\right]-\frac{\partial K}{\partial\theta}. \quad (1$$

Первое приближение ищется в форме $x=t^{\frac{1}{2}}\varphi_1(\theta)$; он удовлетворяет уравнению (1) при $K(\theta)\equiv 0$. Далее излагается процесс последовательных приближений, приводящий к ряду

$$x=\sum_{m=1}^\infty t^{\frac{m}{2}}\varphi_m(\theta), \quad (2$$

где функции $\varphi_m(\theta)$ последовательно определяются из уравнений

$$\frac{m}{2}\varphi_m(\theta)=\frac{d}{d\theta}\left[P(\theta)\frac{d\varphi_m}{d\theta}+R_m(\theta)\right];$$

здесь $P(\theta)=D(\theta)(d\varphi_1/d\theta)^{-2}$, а функция $R_m(\theta)$ выражается через $D, K, \varphi_1,\ldots,\varphi_{m-1}$. Уравнение для $\varphi_m(\theta$ предлагается решать методом конечных разностей.

Затрагивается, но не решается до конца вопрос о сходимости ряда (2) и о погрешности, которая получается, если взять конечное число его членов. Для случая, когда $D(\theta)\equiv\text{const}$, $\partial K/\partial\theta\equiv\text{const}$, проведены числовые расчеты при трех членах в сумме (2). Полученный результат оказывается близким к точному решению. А. Ф. Филиппов

6974. Об одном разностном методе счета многомерного уравнения теплопроводности. Яненко Н. Н. Докл. АН СССР, 1959, 125, № 6, 1207—1210

Рассматривается смешанная задача для многомерного уравнения теплопроводности

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},\ 0<x_i<1,\ 0<t<T,\ i=1,2,\ldots,m,\\ &u(x_1,\ldots,x_m,0)=\varphi(x_1,\ldots,x_m),\\ &u(x_1,\ldots,x_{s-1},0,x_{s+1},\ldots,x_m,t)=\\ &=f_s(x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_m,t),\\ &u(x_1,\ldots,x_{s-1},1,x_{s+1},\ldots,x_m,t)=\\ &=g_s(x_1,\ldots,x_{s-1},x_{s+1},\ldots,x_m,t). \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Разностная схема для решения задачи (1), которую строит автор, состоит, как обычно, в указании некоторого способа для вычисления сеточной функции $u^{n+1}_{i_1\ldots i_m}$ на слое $t=(n+1)\tau$ по сеточной функции $u^n_{i_1\ldots i_m}$ на слое $t=n\tau$. Особенность построенной разностной схемы состоит в том, что переход от u^n к u^{n+1} расщепляется на m последовательных операций, которые мы обозначим $R_1, R_2, \ldots, R_m$. Для каждой из операций R_s аргументом сеточной функции является только i_s, а остальные i_k, $k\neq s$, являются параметрами, так что многомерная разностная схема сконструирована из одномерных. В силу свойств операторов R_s построенная в работе неявная разностная схема устойчива относительно возмущения начальных данных при любом соотношении $\tau/\Delta x_s^2 = r_s \leqslant r = \text{const}$ шагов сетки. Указаны некоторые обобщения. Таким образом, как отмечает автор, он применил в рассмотренных случаях метод расщепления, изложенный ранее для других задач (РЖМат, 1958, 6201).

В. С. Рябенький

6975. Численное решение задачи о распространении тепла в стержне. Манфреди (Soluzioni numeriche in problemi di flusso lineare di calore. Manfredi Bianca), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, **6**, № 1-2, 141—155 (итал.)

Пусть u^n_m — значение функции в точке сетки $x=mh$, $t=n\tau$. Рассматривается разностная схема

$$\left.\begin{aligned} &u^{n+1}_m-u^n_m=r(u^n_{m-1}-2u^n_m+u^n_{m+1}),\\ &r=\frac{\tau}{h^2},\ m=1,2,\ldots,\\ &u^0_m=0,\ m=1,2,\ldots;\ u^n_0=\varphi(n\tau),\ n=0,1,\ldots, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

аппроксимирующая следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ x>0,\ 0<t<1,\ u(x,0)=0,\ u(0,t)=\varphi(t). \quad (2)$$

В частном случае $\varphi(t)\equiv 1$ для решений v^n_m и $v(x,t)$ задач (1) и (2) соответственно известны представления

$$v^n_m=1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1-2r+2r\cos\xi)^n\frac{\sin m\xi}{\xi}\,d\xi, \quad (3)$$

$$v(x,t)=1-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda^2 t}\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\,d\lambda, \quad (4)$$

пользуясь которыми автор доказывает, что при измельчении сетки v^n_m равномерно сходится к $v(x,t)$, если $\frac{\tau}{h^2}=r\leqslant\frac{1}{2}$. Решения задач (2) и (1) в общем случае выражаются через $v(x,t)$ и v^n_m соответственно с помощью интеграла Дюамеля и его разностного аналога, который строит автор. Доказывается, что поскольку v^n_m равномерно сходится к $v(x,t)$, то также и u^n_m равномерно стремится к $u(x,t)$, если $r\leqslant\frac{1}{2}$ и $h\to 0$.

В. С. Рябенький

6976. Расчет температуры в полосе с краевыми условиями на оси времени. Манфреди (Calcolo numerico della temperatura in uno strato piano, con date condizioni al contorno variabili col tempo. Manfredi B.), Riv. mat. Univ. Parma, 1955, **6**, № 3-5, 363—374 (итал.)

Реферируемая работа отличается от другой работы (реф. 6975) в основном тем, что вместо интегральных представлений (3) и (4) для v^n_m и $v(x,t)$ использованы аналогичные представления в форме рядов.

В. С. Рябенький

6977. Улучшенный метод общих параметров для вычисления неустановившегося процесса теплопроводности. Элрод (Improved lumped parameter method for transient heat-conduction calculations. Elrod H. G., Jr. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1959, № HT-28, 20 pp., ill.) (англ.)

Рассматривается уравнение теплопроводности для тонких плит и цилиндрических стержней

$$\frac{\partial T}{\partial t}=k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{q(t)}{\rho c},$$

(где k, ρ и c — коэффициент теплопроводности, плотность и коэффициент теплоемкости соответственно) с граничными условиями

$$T(x,0)=0;\ 0\leqslant x<L;\ \frac{\partial T}{\partial x}(0,t)=0,\ T(L,t)=T_s(t).$$

Применяя преобразование Лапласа для приближенного распределения температуры T_m средней плоскости плоских плит и середины цилиндрических стержней, автор выводит следующее обыкновенное дифференциальное уравнение

$$T'_m(\tau)+\alpha T_m(\tau)=\alpha T_s(\tau)+\mu T_s(\tau)+(1-\mu)\frac{q(\tau)L^2}{\rho c},$$

где $2L$ — толщина плиты или же диаметр перпендикулярного сечения цилиндрического стержня, $\tau=\frac{kt}{L^2}$, α и μ — постоянные, разные для плиты и стержня. Детально обсуждается погрешность метода. Даются числовые примеры.

М. А. Алексидзе

6978. Приближенный способ интегрирования волнового уравнения. Панькин Н. А., Тр. Моск. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 102, 118—123

Решение дифференциального уравнения

$$u_{tt}+f(t)u_t-a^2u_{xx}=0$$

с граничными условиями

$$u(0,x)=F(x),\ u_t(0,x)=\Phi(x),\ u_x(t,0)=0,\ u_x(t,l)=0$$

ищется методом Фурье в виде

$$u=\sum c_n(t)\cos\frac{k_n}{a}x. \quad (1)$$

Функции $c_n(t)$ удовлетворяют уравнению

$$c''_n+f(t)c'_n+k_n^2c_n=0$$

и определяются приближенно способом Ван-дер-Поля (РЖМат, 1959, 3786К, стр. 46—47). Для этого уравнение (1) записывается так:

$$c''_n+[2\delta c'_n+k_n^2c_n=\mu(t)c'_n,$$

где $\delta = \text{const}$, $f(t) = 2\delta - \mu(t)$, и его решение ищется в виде

$$c_n = e^{-\delta t} A_n(t) \sin(\omega_n t + \varphi_n(t)). \quad (2)$$

Если подставить (2) в (1) и наложить на функции $A_n(t)$ и $\varphi_n(t)$ дополнительное условие

$$A_n' \sin(\omega_n t + \varphi_n) + \varphi_n' A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n) = 0,$$

то для этих функций получается система двух дифференциальных уравнений 1-го порядка. Отбрасывая слагаемые вида $\cos 2(\omega_n t + \varphi_n)$, автор получает приближенную систему

$$A_n' = \frac{1}{2} A_n \mu(t), \quad \varphi_n' = \frac{\delta}{2\omega_n} \mu(t),$$

которая легко интегрируется. Приводится грубая оценка ошибки изложенного метода. А. Ф. Филиппов

6979. Структура сетки конечноразностных уравнений напряженности поля. Плацман (The lattice structure of the finitedifference primitive and vorticity equations. Platzman George W.), Monthly Weather Rev., 1958, 86, № 8, 285—292 (англ.)

Показывается, что для волнового уравнения $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2 \partial^2 u/\partial x^2$ и системы „примитивных" уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial h}{\partial x}, \qquad \frac{\partial h}{\partial t} = -D \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1)$$

применение центральных разностных отношений позволяет использовать две независимые прямоугольные сетки, расположенные относительно друг друга в шахматном порядке.

Далее для уравнения напряженности поля $\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -U \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ рассматривается система разностных уравнений, которая на двух упомянутых выше независимых сетках формально эквивалентна системе разностных уравнений, соответствующей системе (1).

В заключение исследуется влияние граничных условий на устойчивость и кратко рассматривается двумерный случай. В. К. Саульев

6980. Вычисление колебаний оболочки корабля методом конечных разностей. Полачек (Calculation of transient excitation of ship hulls by finite difference methods. Polachek Harry), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, 13, № 66, 109—116 (англ.)

Система дифференциальных уравнений

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} = P(x, t),$$

$$I_{\mu z} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} + V - \frac{\partial M}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$M = (EI) \frac{\partial \gamma}{\partial x},$$

$$V = (KAG)\gamma - (KAG) \frac{\partial y}{\partial x},$$

где μ, c, P, $I_{\mu z}$, EI и KAG — известные, вычисляемые экспериментально, величины с начальными и граничными условиями

$$y = \gamma = \frac{dy}{dt} = \frac{d\gamma}{dt} = V = M = 0 \quad \text{при } t_0 = 0,$$

$$M = V = 0 \quad \text{при } x = x_0 \text{ и } x = x_{20},$$

аппроксимируется следующей системой „явных" сеточных уравнений:

$$y^{m+1}_{n+\frac{1}{2}} = (1 + K_1)\left(y^m_{n+\frac{1}{2}} - y^{m-1}_{n+\frac{1}{2}}\right) + y^m_{n+\frac{1}{2}} + K_2 (V^m_{n+1} - V^m_n) + K_3,$$

$$\gamma^{m+1}_{n+\frac{1}{2}} = \left(\gamma^m_{n+\frac{1}{2}} - \gamma^{m-1}_{n+\frac{1}{2}}\right) + \gamma^m_{n+\frac{1}{2}} + K_5 (M^m_{n+1} - M^m_n) + K_6 (V^m_{n+1} + V^m_n), \quad (2)$$

$$M^{m+1}_n = K_4 \left(\gamma^{m+1}_{n+\frac{1}{2}} - \gamma^{m+1}_{n-\frac{1}{2}}\right),$$

$$V^{m+1}_n = K_7 \left(\gamma^{m+1}_{n+\frac{1}{2}} + \gamma^{m+1}_{n-\frac{1}{2}}\right) + K_8 \left(y^{m+1}_{n+\frac{1}{2}} - y^{m+1}_{n-\frac{1}{2}}\right).$$

Здесь $y^m_{n+\frac{1}{2}} = y\left(x_0 + \left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta x,\ t_0 + m\Delta t\right)$ и т. д.; величины K_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$ просто выражаются через шаги Δt и Δx и коэффициенты данной системы (1), а начальные и граничные условия имеют вид:

$$y^0_{n+\frac{1}{2}} = y^{-1}_{n+\frac{1}{2}} = \gamma^0_{n+\frac{1}{2}} = \gamma^{-1}_{n+\frac{1}{2}} = V^0_n = M^0_n = 0,$$

$$M^m_0 = M^m_{20} = V^m_0 = V^m_{20} = 0. \quad (3)$$

Автор показывает, что система сеточных уравнений (2), (3) устойчива, если шаг Δt удовлетворяет условиям

$$\Delta t \ll \frac{\mu}{c},$$

$$\Delta t \leqslant \frac{\mu I_{\mu z} (\Delta x)^2}{I_{\mu z}(KAG) + \mu(EI) + 0{,}25\,\mu(\Delta x)^2 (KAG)}.$$

В. К. Саульев

6981. О решении в малом задачи Коши для системы уравнений газовой динамики методом конечных разностей при гладких начальных данных. Быховский Э. Б., Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 19, 39—44 (рез. англ.)

Задача Коши для системы, описывающей трехмерное течение газа

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - p_\rho(\rho, S) \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (i = 1, 2, 3),$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \frac{\partial u_k}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k}, \qquad t > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -u_k \frac{\partial S}{\partial x_k},$$

$$u_i \mid_{t=0} = \varphi_i(x_1, x_2, x_3),$$

$$\rho \mid_{t=0} = \varphi_4(x_1, x_2, x_3), \quad S \mid_{t=0} = \varphi_5(x_1, x_2, x_3) \quad (2)$$

после замены переменных $\tilde{u}_i = u_i - \varphi_i$, $\tilde{\rho} = \rho - \varphi_4$, $\tilde{S} = S - \varphi_5$, аппроксимируется следующей разностной схемой:

$$\tilde{u}_{it} = -(\tilde{u}_k + \varphi_k)(\tilde{u}_{ix_k} + \tilde{u}_{i\bar{x}_k}) - P_\rho(\tilde{\rho}_{x_i} + \tilde{\rho}_{\bar{x}_i}) + \tilde{F}_i,$$

$$i = 1, 2, 3,$$

$$\frac{p_\rho(\widetilde{\rho}+\varphi_4, \widetilde{S}+\varphi_5)}{\widetilde{\rho}+\varphi_4}\widetilde{\rho}_t = p_\rho\left(\widetilde{u}_{kx_k}+\widetilde{u}_{k\bar{x}_k}\right) - (\widetilde{u}_k+\varphi_k)(\widetilde{\rho}_{x_k}+\widetilde{\rho}_{\bar{x}_k}) + \overline{F}_4, \quad (3)$$

$$\widetilde{S}_t = -(\widetilde{u}_k+\varphi_k)\left(\widetilde{S}_{xk}+\widetilde{S}_{\bar{x}_k}\right)+\widetilde{F}_5,$$

$$\widetilde{u}_t\big|_{t=0}=0,\ \widetilde{\rho}\big|_{t=0}=0,\ \widetilde{S}\big|_{t=0}=0. \quad (4)$$

Сетка — прямоугольная с шагом τ по оси Ot и шагом h в направлении осей Ox_1, Ox_2, Ox_3, причем $\tau = rh^2$, $r = \text{const}$. Обозначения разностных отношений — обычные. Очень кратко излагается доказательство следующей теоремы:

Теорема. Если начальные данные $\varphi_s(x_1, x_2, x_3)$, $s = 1, 2, \ldots 5$, имеют непрерывные производные до 6-го порядка, $p_\rho(\rho, S)$ — непрерывные производные до 5-го порядка и если $\varphi_4(x_1, x_2, x_3) > \varepsilon > 0$, то в области $0 < t < T$ пространства (t, x_1, x_2, x_3) при достаточно малом T существует решение задачи (1), (2) как предел решения задачи (3), (4) при $h \to 0$, причем разностные отношения решения (3), (4) сходятся к соответствующим производным решения (1), (2). В. С. Рябенький

6982. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики. Годунов С. К., Матем. сб., 1959, 47, № 3, 271—306

Производится выбор конечноразностной схемы для расчета одномерных нестационарных течений с ударными волнами и контактными разрывами. К схеме счета, помимо обычного требования устойчивости предъявляется необходимое дополнительное требование, обеспечивающее правильное качественное поведение численного решения (условие монотонности). Рассматриваются явные схемы $u^k = \sum c_{n-k} u_n$, где u^k — значение u в k-й точке рассматриваемого слоя, u_n — значение u в n-й точке предыдущего слоя (сумма конечна или бесконечна). Полученные результаты могут быть применены и к неявным схемам. Выведен критерий для проверки условия монотонности: для того чтобы разностная схема переводила все монотонные функции в монотонные с тем же направлением роста, необходимо и достаточно, чтобы все c_m были неотрицательны. Критерий используется для вывода наилучшей (наиболее точной и удовлетворяющей условию монотонности) схемы первого порядка точности для уравнения $\partial u/\partial t = \partial u/\partial x$. Доказывается, что среди схем второго порядка точности для того же уравнения нет удовлетворяющих условию монотонности. Построена наилучшая схема для системы уравнений $\partial u/\partial t = A\partial v/\partial x$, $\partial v/\partial t = B\partial u/\partial x$, где A, B — постоянные. Дается физическая интерпретация полученной схемы. Приведенная система уравнений соответствует уравнениям гидромеханики в лагранжевых координатах в случае одномерных звуковых волн. Схема соответствует тому случаю, когда между счетными точками соприкасаются части газа с разными скоростями и давлениями (равными таковым в счетных точках), что приводит к распаду разрыва. От точки соприкосновения идут две звуковые волны, между которыми вырабатываются новые параметры течения, являющиеся первоначально постоянными. Средние значения искомых функций в момент времени τ в счетных точках, найденные из законов сохранения массы и импульса, совпадают с вычисленными по выведенной схеме. Из условия отсутствия пересечения волн, идущих из соседних точек разрывов, получено максимальное значение шага по времени, обеспечивающее одновременно устойчивость схемы.

Результаты и физическая интерпретация схемы, полученные для линейных уравнений, являются основой при составлении схемы для нелинейных уравнений гидромеханики. Газ разбивается на слои постоянными параметрами в каждом слое. Рассчитывается распад разрывов и средние значения параметров течения в момент времени τ. Предложен единый итерационный процесс для расчета всех видов распадов разрывов. Доказано, что если при измельчении шагов разностные решения сходятся, то они сходятся к обобщенным решениям дифференциальных уравнений. Выбор шага по времени аналогичен линейному случаю. Доказано, что построенная схема удовлетворяет закону возрастания энтропии. При наличии контактных разрывов обнаружено понижение точности предложенной схемы. Выявлена причина этого эффекта и указывается правило выбора шага по пространству, уничтожающее этот эффект в случае линейных уравнений с постоянными коэффициентами и снижающее неточность в нелинейном случае. Доказана устойчивость схемы на контактных разрывах в линейном случае. Приводятся примеры расчетов.

Ю. Д. Шмыглевский

6983. Применение метода С. А. Чаплыгина к решению нелинейных интегральных уравнений, краевой задачи для уравнения второго порядка и систем дифференциальных уравнений высших порядков. Раковщик Л. С., Тр. Новосиб. электротехн. ин-та, 1958, 1, 87—103

Рассматривается возможность применения метод Чаплыгина к интегральным уравнениям вида

$$y(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K[x, t, y(t)]\,dt \quad (1)$$

при достаточно малых λ, уравнениям аналогичного вида, но типа Вольтерра без ограничений для λ, краевой задаче

$$y'' = f(x, y, y'),$$
$$W_0 y = \alpha' y(a) - \alpha_1 y'(a) = 0, \quad (2)$$
$$W_1 y = \beta' y(b) + \beta_1 y'(b) = 0, \quad (\alpha_1\alpha' \geqslant 0,\ \beta_1\beta' \geqslant 0)$$

и, наконец, к задаче Коши для систем дифференциальных уравнений высших порядков. Доказывается справедливость теорем о неравенствах, аналогичных теореме Чаплыгина для систем дифференциальных уравнений, и попутно строятся сходящиеся последовательности аппроксимирующих пар. Вот некоторые из этих теорем.

Теорема 1. Пусть функции $f(x)$ и $K(x, t, u)$ непрерывны для $a \leqslant x,\ t \leqslant b,\ c \leqslant u \leqslant d$ и функция $K(x, t, u)$ удовлетворяет условию Липшица по аргументу u с постоянной K, кроме того, $\lambda K(b-a) < 1$. Если для непрерывных функций $u_0(x)$ и $v_0(x)$, значения которых лежат в $[c, d]$, выполняются неравенства

$$u_0(x) - f(x) - \lambda\int_a^b K[x, t, s(t)]\,dt \leqslant 0,$$

$$v_0(x) - f(x) - \lambda\int_a^b K[x, t, s(t)]\,dt \geqslant 0$$

для $x \in [a, b]$ и любой функции $s(t)$, лежащей между $u_0(t)$ и $v_0(t)$, то на $[a, b]$ $u_0(x) \leqslant y(x) \leqslant v_0(x)$, где $y(x)$ — решение интегрального уравнения (1).

Теорема 2. Пусть выполнены условия: 1) $u_0(x) \in C[a, b]$, $v_0(x) \in C_2[a, b]$ и удовлетворяют краевым условиям задачи (2); 2) для $x \in [a, b]$ и значений y, заключенных между $u_0(x)$ и $v_0(x)$, $-\infty < y' < +\infty$, функция $f(x, y, y')$ непрерывна, не убывает относительно y и удовлетворяет относительно этого аргумента условию Липшица с постоянной K, а производная $\partial f/\partial y'$ монотонна относительно y';

3) $u_0'' - f(x, u_0, u_0') = \alpha_0(x) \geqslant 0$, $v_0'' - f(x, v_0, v_0') = \beta_0(x) \leqslant 0$

для $x \in [a, b]$. Тогда существует единственное решение $y(x)$ задачи (2) и $u_0(x) \leqslant y(x) \leqslant v_0(x)$.

Теорема 3. Рассмотрим задачу

$$y'' - f(x, y) = 0, \quad W_0 y = W_1 y = 0. \qquad (3)$$

не предполагая возрастания $f(x, y)$ по y, но сохраняя остальные предположения, указанные в теореме 2. Если постоянная K меньше первого собственного значения λ_1 задачи $y'' + \lambda y = 0$, $W_0 y = W_1 y = 0$ и функции $u_0(x)$ и $v_0(x)$ удовлетворяют неравенствам $u_0'' - f(x, s) \geqslant 0$, $v_0'' - f(x, s) \leqslant 0$ для всех s, заключенных между $u_0(x)$ и $v_0(x)$, то существует единственное решение $y(x)$ задачи (3) и $u_0(x) \leqslant y(x) \leqslant v_0(x)$. Работа иллюстрирована примерами. При построении аппроксимирующих пар для решения задачи Коши использован метод, развитый в работе (РЖМат, 1955, 5304). Б. Н. Бабкин

6984. Приближенные решения задач переноса. Часть I. Стационарное состояние, упругое рассеяние в плоской и сферической геометрии. Келлер (Approximate solutions of transport problems. Part I. Steady-state, elastic scattering in plane and spherical geometry. Keller Herbert B.), J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1958, 6, № 4, 452—465 (англ.)

Излагается приближенный метод решения уравнения переноса, описывающего стационарное состояние упруго рассеивающихся нейтронов в бесконечной плоской пластине конечной толщины и произвольного состава. Метод может быть обобщен на случай сферически симметричной области. Заменяя угловую переменную и переменную летаргии дискретными значениями, автор сводит исходное уравнение к системе дифференциально-разностных уравнений, которую решает в квадратурах относительно пространственной переменной. При некоторых условиях, налагаемых на шаги по угловой переменной и летаргии, доказана сходимость приближенного решения к точному и устойчивость приближенного решения по отношению к росту малых погрешностей, вводимых при аппроксимации членов негомогенного источника. В заключение обсуждается круг задач теории переноса, к которым приложим изложенный метод. Предложенный метод представляет собой обобщение прежних работ автора и известного метода Карлсона.

Н. Я. Лященко

6985. Об одной квадратурной формуле с двумя двойными узлами. Коциу (Asupra unei formule de cuadratură cu două noduri duble. Coțiu A.), Lucrări științ. Inst. politehn. Cluj. Cluj, 1959, 41—48 (рум.; рез. русск., франц.)

Рассматривается квадратурная формула вида

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3(1-u^2)}\,[(1-3u^2)f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + (1-3u^2)f(b)] + \int_a^b \varphi(x) f^{IV}(x)\,dx, \qquad (2)$$

где $x_1 = (a+b)/2 - hu$, $x_2 = (a+b)/2 + hu$, $h = (a+b)/2$ $0 \leqslant u < 1$. При $u = 0$ и $u = 1/3$ формула (1) переходит соответственно в формулы Симпсона и Ньютона. Автор изучает предельный случай $u = 1$. Подробно исследуется остаток формулы (1) при различных значениях параметра u.

В. К. Саульев

6986. О вычислении определенного интеграла, когда интервал интеграции содержит особую точку. Приложение к суммированию расходящихся рядов с положительными членами. Вернотт (Sur la définition d'une intégrale définie quand l'intervalle d'intégration contient un point singulier. Application à la sommation des séries divergentes à termes positifs. Vernotte Pierre). C. r. Acad. sci., 1958, 247, № 21, 1822—1824 (франц.)

Обычно значение интеграла $I = \int_a^b f(x)\,dx$, когда f имеет простой полюс $x = c$, $a < c < b$, определяется как предел суммы двух интегралов:

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

при $\varepsilon \to 0$. Однако представляет значительный интерес вычислять I в комплексной плоскости $x + iy$, соединяя точки $c - \varepsilon$ и $c + \varepsilon$ полуокружностью радиуса ε выше или ниже оси ox, что позволяет сделать различные обобщения. Необходимость движения от a до b вдоль непрерывного пути диктуется некоторой аналогией между вычислением I и проблемой аналитического продолжения. Это, в свою очередь, приводит к прямой связи с вопросом о суммировании расходящихся рядов с положительными членами. В частности, метод Бореля суммирования расходящихся рядов теряет свою справедливость, когда присоединяемая функция имеет особенность. Так, Борель присоединяет к ряду $\sum n!$ функцию $\frac{1}{1-z}$ и получает суммой ряда значение интеграла $\int_0^\infty \frac{e^{-z}dz}{1-z}$, равное $-0{,}30282\ldots$, причем Борель считает, что в общем приложении его метода является безразличным, по какому направлению двигаться в ∞ в комплексной плоскости, в то время как очевидно, что при интегрировании от 0 до $i\infty$ мы избегаем особенности $z = 1$. Но теорема Коши показывает, что два вычисления эквивалентны только, если идти от 0 в бесконечность вдоль действительной оси от 0 до $1 - \varepsilon$, затем по полуокружности между $1 - \varepsilon$ и $1 + \varepsilon$ и далее от $1 + \varepsilon$ до $+\infty$. Поэтому, если полуокружность берется в верхней полуплоскости ($y > 0$), то к значению интеграла надо прибавить $+\pi/e$ и $-\pi/e$ при $y < 0$. Таким образом сумме ряда $\sum n!$ надо приписать два комплексных значения: $-0{,}30282\ldots \pm \pi/e$. Более того, желая избежать в приложении метода Бореля необходимости аналитического продолжения, автор на примере ряда $\sum n!$ показывает способ, при котором присоединяемая функция будет всегда целой. Если представить $-i = (1-2)^{-1/2}$ расходящимся рядом $1 + \sum_0^\infty \frac{1.3\ldots(2n+1)}{1.2\ldots(n+1)}$, умножить его на ряд $\sum n!$, то получится расходящийся ряд, сумма которого равна π/e (!). Таким образом, при вычислении интеграла от функции с особенностью нельзя пользоваться его произвольным определением и, с другой стороны, является несомненным, что сильно расходящиеся ряды с положительными членами имеют своими суммами числа комплексные, у которых обычно вычисляется лишь их действительная часть.

Ю. Ф. Харкеевич

6987. Соприкосновение высокого порядка. Вон (Osculation of high order. Vaughan Hubert), J. Inst. Actuaries, 1955, 81, № 1, 53—57 (англ.)

Формула для интерполирования по равноотстоящим узлам (для простоты с шагом $h = 1$) называется оскулаторной (osculation — соприкосновение) порядка r, если в точках „стыка" значения проинтерполированной функции слева и справа совпадают вместе с производными до порядка r. Показывается, что четырехточечная формула, точная для полиномов второй степени и оскулаторная порядка r, имеет вид

$$u_x = u_{-1} + (x+1)\,\Delta u_{-1} + \frac{1}{2}(x+1)\,x\Delta^2 u_{-1} + j(x)\,\Delta^2 u_{-1}\ (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad (1)$$

где

$$j(x) = -\frac{(2r-1)!}{2[(r-1)!]^2}\,x(1-x)\int_0^x y^{r-1}(1-y)^{r-1}dy.$$

При $r \to \infty$ (1) переходит в центральную формулу со вторыми разностями, для которой u_x терпит разрыв в точке $x = 0{,}5$ (являющейся точкой стыка для этой формулы). М. К. Гавурин

6988. К выбору функций Галёркина в задачах о собственных значениях для конечноразностных уравнений. Карамышкин В. В., Вестн. Моск. ун-та. Сер. матем., механ., астрон., физ., химии, 1958, № 6, 3—6

Дано линейное уравнение в конечных разностях на интервале $(1, n-1)$

$$[L(k, T) - \lambda N(k, T)]\,M_k = 0,$$

где M_k — разыскиваемая целочисленная функция; T — оператор упреждения; $L(k, T)$ и $N(k, T)$ — линейные операторы, зависящие от k; λ — произвольный параметр. Пусть также заданы однородные краевые условия, содержащие или не содержащие λ. Определяются значения λ_r, при которых данное уравнение имеет нетривиальное решение. Задача решается приближенно методом Галёркина, причем за функции Галёркина взяты либо собственные функции исходного уравнения, либо собственные функции, „подправленные" множителем в виде многочлена. В качестве примера решено амплитудное уравнение собственных колебаний балки с сосредоточенными на ней массами. И. Ф. Шелихова

6989. Оценка погрешности в системах линейных уравнений при помощи теоремы Брауэра о неподвижной точке. Шрёдер (Fehlerabschätzung bei linearen Gleichungssystemen mit dem Brouwerschen Fixpunktsatz. Schröder Johann), Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1959, **3**, № 1, 28—44 (нем.)

Система линейных алгебраических уравнений $Gu = r$ приводится к виду

$$u = Tu, \quad (1)$$

где $Tu = Mu + s$, $M = A^{-1}B$, $G = A - B$, $s = A_r^{-1}$. Уравнение (1) изучается с помощью принципа неподвижной точки. В множестве m-мерных векторов вводится соотношение $u \leqslant v$, с помощью неособенной матрицы $H = \{h_{ik}\}$: $u \leqslant v$, если $\sum_{k=1}^m h_{ik}u^k \leqslant \sum_{k=1}^m h_{ik}v^k$, $i = 1, \ldots, m$. Всякий вектор u представим в виде $u = u^+ - u^-$, где $0 \leqslant u^+$, $u \leqslant u^+$ и для любого $v \geqslant 0$, $v \geqslant u$ выполнено соотношение $u^+ \leqslant v$. Вектор $u^+ + u^-$ обозначается $|u|$. Для матриц $A \leqslant B$ означает, что $Au \leqslant Bu$ для всякого вектора $u \geqslant 0$. Аналогично предыдущему вводятся матрицы A^+, A^-, $|A|$.

Основной результат: Пусть $x \leqslant y$ и $x - M^+x + M^-y \leqslant s \leqslant y - M^+y + M^-x$; тогда (1) имеет решение u^*, удовлетворяющее условиям

$$x \leqslant M^+x - M^-y + s \leqslant M^+y - M^-x + s \leqslant y.$$

Отсюда непосредственно получаются результаты об оценке погрешности приближенного решения, о сходимости итерационного метода и т. д. Типичные результаты:

I. Положим $x_{n+1} = Tx_n$, $y_{n+1} = Ty_n$, $n = 0, 1, \ldots$ и пусть $M^- = 0$, $x_0 \leqslant y_0$, $x_0 \leqslant x_1$, $y_1 \leqslant y_0$. Тогда $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant u^* \leqslant \ldots \leqslant y_2 \leqslant y_1 \leqslant y_0$.

II. Пусть $d = -Gu_0 + r$, $A^{-1} \geqslant 0$ и при некотором $w \geqslant 0$ верно неравенство $|d| \leqslant A(-|B|)w$. Тогда $|u^* - u_0| \leqslant w$. Даются специализации полученных результатов для некоторых способов представления G в виде $G = A - B$. В связи с этим приводятся соображения о целесообразном выборе матрицы H. Рассмотрены примеры. Библ. 15 назв. М. Ш. Бирман

6990. О гауссовом приеме ускорения в теории одношагового итерационного процесса. Островский (On Gauss' speeding up device in the theory of single step iteration. Ostrowski Alexander M.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1958, **12**, № 62, 116—132 (англ.)

Исследуется одношаговый релаксационной процесс в применении к системе

$$\sum_{\nu=0}^n a_{\mu\nu}z_\nu = y_\mu,\ \mu = 0, \ldots, n, \text{ при } a_{00} = -\sum_{\mu,\nu=1}^n a_{\mu\nu},$$

$$a_{0\nu} = a_{\nu 0} = -\sum_{\mu=1}^n a_{\mu\nu},\ \nu = 1, \ldots, n,\ y_0 = -\sum_{\mu=1}^n y_\mu,$$

решение которой равносильно решению данной системы

$$\sum_{\nu=1}^n a_{\mu\nu}x_\nu = y_\mu,\ \mu = 1, \ldots, n. \quad (1)$$

Устанавливается, что релаксационный процесс сходится, если матрица $A = \{a_{\mu\nu}\}$, $\mu = 1, \ldots, n$; $\nu = 1, \ldots, n$, положительно определена. Быстрота сходимости модифицированного процесса при циклическом управлении и управлении Зейделя сравнивается с быстротой сходимости аналогичных процессов для системы (1). Оказывается, что процесс может как ускоряться, так и замедляться. Показано, что в случае управления Зейделя, если рассматривать невязки как случайные величины с некоторым законом распределения, вероятность ускорения положительна. В. Н. Фаддеева

6991. Решение систем совместных линейных алгебраических уравнений и его приложение в строительной механике. Гребень Е. С., Сб. Ленингр. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1959, вып. 162, 182—193

Для решения системы $\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k = b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(a_{ik} = a_{ki})$ или $Ax = b$ предлагается прямой метод

$$x = C'Cb,$$

где

$$C = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & & & \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}},\quad \alpha_{kk} = \frac{1}{\sqrt{a_{kk} - \sum_{j=1}^{k-1} c_{jk}^2}},$$

$$\alpha_{kl} = -\alpha_{kk}\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_{jl}c_{jk},\quad c_{jk} = \sum_{i=1}^{j}\alpha_{ji}a_{ki}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Приведенный автором алгоритм можно рассматривать как алгоритм одн временного построения верхней треугольной матрицы C' и нижней обратной треугольной матрицы C^{-1}. Метод требует $\approx n^3/3$ арифметических операций. Для ленточной $(2m+1)$-членной матрицы число операций сокращается в $4n^3(n+m)^{-3}$ раз. В. К. Саульев

6992. Обобщение алгоритма Гаусса и тождества Сильвестра. Фрэцилэ (Generalizarea algoritmului lui Gauss şi a identităţii lui Sylvester. Frăţilă E.), Lucrări ştiinţ. Inst. politehn. Cluj. Cluj, 1959, 61—68 (рум.; рез. русск., франц.)

Известный метод Гаусса сведения системы

$$\sum_{l=1}^{n} a_{lj}x_j = b_l \quad (l = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

к системе с треугольной матрицей обобщается следующим образом. Сначала исключаются поочередно первые $p_1 < n$ неизвестных из последних $n - p_1$ уравнений системы (1). Затем из полученной системы исключаются первые p_2 неизвестных из последних $n - p_2$ уравнений и т. д. В результате получается система со „ступенчатой" матрицей. Для этого процесса автор выводит тождество, являющееся обобщением известного тождества Сильвестра. В. К. Саульев

6993. Расчет сводов плотин с помощью решения линейных уравнений. Младиенович (Calcul des barrages-voûtes par résolution d'équations linéaires. Mladyenovitch V.), Travaux, 1958, 42, № 290, 1037—1043 (франц.; рез. англ., исп.)

Описывается способ расчета сводов плотин и консольных арок, сводящийся к решению систем линейных уравнений. Ю. Ф. Харкеевич

6994. О решении системы линейных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Ларсон, Маршалл (A routine to find the solution of simultaneous linear equations with polynomial coefficients. Larson E. H., Marshall D. P.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, 2, № 4, 16—17 (англ.)

Описывается метод исключения для решения систем линейных уравнений вида

$$\begin{pmatrix} a_{11}(s)\, a_{12}(s) \ldots a_{1n}(s) \\ a_{21}(s)\, a_{22}(s) \ldots a_{2n}(s) \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}(s)\, a_{n2}(s) \ldots a_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(s) \\ b_2(s) \\ \ldots \\ b_n(s) \end{pmatrix},$$

(где $a_{lj}(s)$ $b_l(s)$ — заданные многочлены от s, x_l — искомые функции) на электронной машине „Дататрон-04" (о машине марки „Дататрон" см. РЖМат, 1956, 2590). В. Л. Загускин

6995. Применение метода «строка на строку» для обращения матриц в задачах энергосистем. Конверти (Application of row-by-row matrix inversion to power system problems. Converti V.), Power Apparat. and Syst., 1959, № 42, 413—416 (англ.)

Основные математические задачи энергосистемы сводятся к обращению матриц высокого порядка. Однако, как правило, эти матрицы очень редкие (90% всех элементов составляют нули. Автор составил программу для метода построчного обращения комплексных 60×60 матриц (или действительных 120×120 матриц) на машину УНИВАК-1 с памятью в 1000 ячеек. Отмечаются преимущества построчного обращения матрицы перед другими методами в тех случаях, когда вся матрица не помещается во внутреннее запоминающее устройство машины. М. А. Алексидзе

6996. Об обращении матриц Леонтьева. Кансадо (Sobre la inversion de matrices de Leontief. Cansado Enrique), Trab. estadist., 1958, 9, № 3, 203—264 (исп.)

Обзорная статья. Матрицей Леонтьева автор называет квадратную неотрицательную матрицу n-го порядка, элементы которой удовлетворяют условию

$$\sum_{l=1}^{n} a_{lj} < 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Из прямых методов особенно подробно автор излагает различные модификации метода исключения (метода Гаусса) и метод Жордана. Из итерационных методов рассматриваются метод Гаусса-Зейделя, метод Якоби, а также метод Хотеллинга — Бодевига. В заключение кратко описан метод Монте-Карло. Имеются числовые примеры. Библ. 52 назв. В. К. Саульев

6997. Об обращении некоторых матриц. Шектер (On the inversion of certain matrices. Schechter Samuel), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, 13, № 66, 73—77 (англ.)

Доказывается, что элементы c_{lj} матрицы G, обратной к матрице $H = \left\{\frac{1}{a_l - b_l}\right\}$, $1 < i,\ j < n$, где a_l, b_l — различные, а в остальном произвольные комплексные числа определяются по формулам

$$c_{lj} = (a_j - b_l)\, A_j(b_l)\, B_l(a_j).$$

Здесь

$$A_l(x) = \frac{A(x)}{A'(a_l)(x - a_l)}, \quad B_l(x) = \frac{B(x)}{B'(b_l)(x - b_l)},$$

$$A(x) = \prod_l (x - a_l), \qquad B(x) = \prod_l (x - b_l).$$

Далее доказывается, что если $\alpha_l = \sum_j c_{lj}$, $\beta_j = \sum_l c_{lj}$, то

$$\alpha_l = -\frac{A(b_l)}{B'(b_l)}, \quad \beta_j = \frac{B(a_j)}{A'(a_j)},$$

$$H^{-1} = [\alpha_1, \ldots, \alpha_n]\, H^T\, [\beta_1, \ldots, \beta_n].$$

Наконец, доказывается, что если H вещественна и симметрична и если $a_l > b_l$, то P — число обусловленности матрицы $H > \max M_l^{2n-2}$, где

$$M_l = \min_{k,\, k \neq l} \frac{a_k - b_l}{|a_k - a_l|}.$$

В. Н. Фаддеева

6998. Унитарное приведение несимметричной матрицы к треугольной. Хаусхолдер (Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix. Householder Alston S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, 5, № 4, 339—343 (англ.)

Сообщается, что идущий от Гивенса метод обращения несимметричной матрицы A при помощи сведения этой матрицы к верхней треугольной матрице R умножением на $\frac{n(n-1)}{2}$ матриц плоских вращений испытывался в национальной Ок-Риджской лаборатории и оказался очень стабильным. Произведение плоских вращений есть ортогональная матрица W, причем из $WA = R$ следует, что $R'R = A'A$, т. е. что R есть матрица, получающаяся в методе квадратного корня, примененного к $A'A$. Указанный процесс требует большего числа арифметических операций, в том числе извлечений квадратного корня. Вместо плоских вращений автор осуществляет приведение матрицы A к треугольной при помощи последовательных умножений слева на $(n-1)$ унитарные матрицы: $U_{n-1}U_{n-2}\ldots U_1 = R$. Берутся унитарные матрицы вида $(E - 2uu^*)$, где вектор u единичной длины подобран так, что для данного вектора a справедливо: $(E - 2uu^*)\, a = \|a\|\, e$, e — некоторый координатный вектор. Матрицу U_1 автор строит, исходя из первого столбца a_1 матрицы A при $e = e_1$, так что $U_1 A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & x \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$, где A_1 — матрица $(n-1)$-го порядка. Далее процесс применяется к матрице A и т. д. Для определения вспомогательного вектора u на каждом шагу процесса требуется дважды извлекать квадратный корень. Общее число умножений для получения A^{-1} примерно равно $3n^3/2$. В. Н. Фаддеева

6999. Теорема об уменьшении порядка для обращения матриц и ее применение на примере из статики.

Штенкер, Зибер (Ein Reduktionssatz über Umkehrmatrizen und seine Anwendung auf ein Beispiel aus der Statik. Stenker Horst, Sieber Norbert), Wiss. Z. Hochschule Archit. und Bauwesen Weimar, 1958—1959, **6**, № 2, 105—117 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Пусть матрица $\widetilde{A}$ получается из квадратной матрицы n порядка A вычеркиванием h столбца и h строки. Для определения $\widetilde{b}_{ik}$ — элементов матрицы $\widetilde{A}^{-1}$ авторы устанавливают следующую формулу:

$$\widetilde{b}_{ik} = b_{ik} - \frac{b_{hk}}{b_{hh}} b_{ih} \begin{pmatrix} i,\ k = 1, \ldots, n \\ i,\ k \neq h \end{pmatrix},$$

где b_{ik} — элементы матрицы A^{-1}.

Этот способ предлагается использовать при расчете уравнительных систем, если правые части непостоянны и некоторые неизвестные выпадают.

В. К. Саульев

7000. Одно свойство полуопределенных эрмитовых матриц. Брудер, Смит (A property of semi-definite Hermitian matrices. Broeder George G. den, Jr, Smith Harry J.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, 5, № 3, 244—245 (англ.)

Пусть $A = S + iQ$ — эрмитова положительно полуопределенная матрица, S и Q вещественны.

Теорема. Ранг S не меньше ранга Q и не меньше ранга A.

Пусть теперь A положительно определена. Тогда существует S^{-1}. Для нахождения $A^{-1} = X + iY$ предлагаются формулы

$$X = (S + QS^{-1}Q)^{-1},\ Y = -S^{-1}QX.$$

Если $M = B + iC$ — произвольная неособенная матрица, то предлагается находить M^{-1} по формуле $M^{-1} = M^*(MM^*)^{-1}$. Другой способ: если $M^{-1} = U + iV$, то

$$\begin{bmatrix} U & -V \\ V & U \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & -C \\ C & B \end{bmatrix}^{-1}.$$

М. К. Гавурин

7001. Замечание о практическом вычислении собственных значений. Файк (Note on the practical computation of proper values. Fike C. T.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 3, 360—362 (англ.)

Пусть A — вещественная квадратная матрица n-го порядка, имеющая n различных собственных значений и векторов, и $F(x) = |xE - A|$ — характеристический полином матрицы A. Для собственного значения α_k автор определяет матрицу P-обусловленности (P-condition) и меру обусловленности согласно равенствам

$$P_k(A) = \left(\frac{\partial x}{\partial a_{jl}}\right)_{x=\alpha_k} \text{ и } \|P_k(A)\| \text{ соответственно,}$$

где в качестве нормы матрицы может быть взята любая из известных матричных норм. При этом матрицу $P_k(A)$ можно представить, например, в виде

$$P_k(A) = \frac{\operatorname{adj}(\alpha_k E - A)}{F'(\alpha_k)}.$$

Показывается, что величина $\|P_k(A)\|$ может служить критерием трудности (мерой обусловленности) при практическом вычислении собственного значения α_k. В частности, устанавливается, что ортогональные подобные преобразования матрицы, применяемые для вычисления собственных значений, численно устойчивы.

В. К. Саульев

7002. Замечания о практическом решении задач о собственных значениях. Ваук (Remarks on the practical solution of characteristic value problems. Wouk A.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, 2, № 6, 38—39 (англ.)

Рассматривается система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{Y} = A(x, \lambda)Y, \tag{1}$$

где Y — вектор-функция и $A(x, \lambda)$ — квадратная матрица n-го порядка, зависящая от x и параметра λ, с граничным условием

$$BY(x_1, \lambda) + CY(x_2, \lambda) = 0 \tag{2}$$

(B и C — постоянные квадратные матрицы n-го порядка).

Решение задачи Коши, соответствующей уравнению (1), можно записать в виде $Y(x, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} d_i Y_i(x, \lambda)$, где $Y_i(x, \lambda)$ — фундаментальное решение

$$(y_{i,j}(x_1, \lambda) = \delta_{i,j}) \text{ и } Y(x_1, \lambda) = (d_1, \ldots, d_n) = D.$$

Для того, чтобы функция $Y(x, \lambda)$ удовлетворяла граничному условию (2), достаточно выполнения соотношений

$$\sum_{k=1}^{n} (b_{i,k} + \sum_{j=1}^{n} c_{i,j} y_{k,j}(x_2, \lambda)) d_k = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и, следовательно, собственные значения λ суть корни уравнения $\det(b_{i,k} + \sum_j c_{i,j} y_{k,j}(x_2, \lambda)) = 0$.

Автор дает ряд практических советов для вычисления корней этого уравнения.

В. К. Саульев

7003. Простые границы погрешности в задаче о собственных значениях для симметрических матриц. Ниче (Einfache Fehlerschranken beim Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen. Nitsche Joachim A.), Z. angew. Math. und Mech., 1959, **39**, № 7-8, 322—325 (нем.; рез. англ., франц., русск.)

Пусть $\{\eta_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — ортонормированная система векторов, близких к собственным векторам r_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ данной симметрической матрицы A n-го порядка. Тогда, если выполняется условие $q - 2\varepsilon\sqrt{n} > 0$, то собственное значение λ_i матрицы A простое и справедливы оценки:

$$|\mu_i - \lambda_i| \leqslant \varepsilon\sqrt{n},\ |\eta_i - r_i| < \frac{\varepsilon}{q - \varepsilon\sqrt{n}}\left(1 + \frac{\varepsilon}{q - \varepsilon\sqrt{n}}\right). \tag{1}$$

Здесь $q = \min_{i \neq k} |\mu_i - \mu_k|$, $\varepsilon = \max_i \varepsilon_i$, $\mu_i = \eta_i' A \eta_i$, $\varepsilon_i = (\eta_i' A^2 \eta_i - (\eta_i' A \eta_i)^2)^{1/2}$.

В. К. Саульев

7004. Нижние грани собственных значений и их применение к атому гелия. Базли (Lower bounds for eigenvalues with application to the helium atom. Bazley Norman W.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1959, **45**, № 6, 850—853 (англ.)

Описывается метод нахождения нижней грани для дискретного спектра собственных значений самосопряженного оператора. В качестве примера рассматривается гамильтониан атома гелия в случае пренебрежения движением ядра, релятивистическим эффектом и влиянием спина.

М. А. Алексидзе

7005. О некоторых методах нахождения характеристического полинома. Хаусхолдер, Бауэр (On certain methods for expanding the characteristic polynomial. Householder Alston S., Bauer Friedrich L.), Numer. Math., 1959, **1**, № 1, 29—37 (англ.)

Как известно, метод А. Н. Крылова нахождения характеристического полинома матрицы A состоит в том, что образуется последовательность векторов v_1, $v_2 = Av_1$, $v_3 = Av_2, \ldots$ и коэффициенты характеристического полинома $\sum_{k=0}^{n-1} f_k \lambda^k + \lambda^n = 0$ находятся из системы

$$\sum_{k=0}^{n-1} f_k v_{k+1} + v_{n+1} = 0. \qquad (1)$$

Авторы показывают, что многие методы нахождения характеристического полинома (в частности, метод Данилевского) по существу заключаются в решении системы (1) каким-нибудь специальным способом.

М. К. Гавурин

7006. Метод Якоби для вещественных симметричных матриц. Голдстайн, Меррей, Нёйман (The Jacobi method for real symmetric matrices. Goldstine H. H., Murray F. J., Neumann J. von), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, 6, № 1, 59—96 (англ.)

Указывается на трудность осуществления большинства известных численных методов нахождения собственных чисел матриц при больших порядках n. Эти трудности встречаются как при составлении характеристического уравнения, так и при его решении. Так, для матрицы $\frac{1}{2}E$ при $n = 98$ наибольший из коэффициентов характеристического уравнения превосходит 2^{45}, а наименьший равен 2^{-98}. Ни одна из современных вычислительных машин не пригодна к действиям с числами столь различных порядков. Известная модификация метода Крылова, сводящая нахождение коэффициентов характеристического уравнения к решению системы линейных уравнений, обладает еще и тем недостатком, что определитель системы может обратиться в нуль.

Для нахождения корней полиномов при больших n не пригодны методы, требующие вычислений значений полинома в отдельных точках (типа методов Ньютона—Рафсона и Руффини — Горнера), так как часто значения полинома исчезающе малы по сравнению со значениями отдельных его членов. Не пригоден также метод Лобачевского, в котором действия производятся лишь с коэффициентами полинома, ибо последовательно находятся величины $x_i^{2^k}$ (где x_i — корни полинома), имеющие сильно различающиеся порядки. Итеративный метод обладает тем недостатком, что ошибки в нахождении нескольких первых (наибольших по модулю) собственных чисел искажают значения остальных. Некоторые методы, дающие удовлетворительные результаты в руках опытного вычислителя, не пригодны для машинных вычислений. Сверх того, в задачах большого объема опыт вычислителя может оказаться недостаточным.

Рассматривается алгорифм, впервые предложенный Якоби для доказательства одной теоремы. Пусть дана вещественная симметричная матрица $A = \{a_{jk}\}$. Ищется унитарная матрица U, так что U^*AU есть диагональная матрица I_λ. Тогда диагональные элементы I_λ суть собственные числа A, а столбцы U суть соответствующие собственные векторы. Если унитарная матрица V есть приближение к U и $\widetilde{A} = V^*AV$, то за меру неязки принимается число $\tau(\widetilde{A})$, равное сумме квадратов недиагональных элементов $\widetilde{A}$.

Первый шаг алгорифма заключается в следующем. Выбираются различные индексы j' и k', так что $|a_{j'k'}| = \max_{j \neq k} |a_{jk}|$ (или, по крайней мере, $|a_{j'k'}|$ не меньше среднего значения $|a_{jk}|$ при $j \neq k$). Вводится матрица $V^{(1)}$, которая осуществляет вращение пространства в координатной плоскости, определяемой j' и k' ортами, так чтобы эллипс, получаемый в сечении эллипсоида $(Ax, x) = 1$ упомянутой плоскостью, был приведен к главным осям. Затем полагается $A^{(1)} = V^{(1)*}AV^{(1)}$. При этом $\tau(A^{(1)}) = \tau(A) - 2a_{j'k'}^2$.

Процесс повторяется с матрицей $A^{(1)}$ и т. д. В результате получается последовательность унитарных матриц $V^{(i)}$ и матриц $A^{(i)} = V^{(i)*}A^{(i-1)}V^{(i)}$. Оказывается, что

$$\tau(A^{(i)}) < \tau(A)\exp\left(-\frac{2i}{n(n-1)}\right),$$

$$|I_\lambda - I_i| < \tau(A^{(i)})^{1/2},$$

$$|AU^{(i)} - U^{(i)}I_i| < \tau(A^{(i)})^{1/2},$$

где I_i — диагональная часть матрицы $A^{(i)}$, $U^{(i)} = V^{(1)}\ldots V^{(i)}$. Близость $U^{(i)}$ к U, вообще говоря, не имеет места.

Большая часть статьи посвящена анализу численной устойчивости предлагаемого алгорифма. Пусть вычисления производятся с фиксированной запятой при основании системы счисления β с s знаками после запятой. Пусть $\overline{A}$ — соответственно округленная матрица A (вообще, черта наверху указывает, что число, вектор или матрица получены заменой обычных арифметических или функциональных операций на „псевдооперации", т. е., грубо говоря, что счет велся в заданной системе счисления с заданным числом знаков) и проделано $i = \frac{1}{2}qn(n-1)$ шагов. Предполагаются выполненными неравенства

$$18n^{5/2}\beta^{-s} < 0{,}01,$$

$$\frac{1}{2} + (4q+15)n^{5/2}\beta^{-s} < \left(\sum a_{jk}^2\right)^{1/2} < 1 - (4q+15)n^{5/2}\beta^{-s},$$

$$(6{,}8)^2 qn^2\beta^{-s} < 0{,}09,$$

$$(6{,}8 + 0{,}8n^{1/2})\,qn^2\beta^{-s} < 1 - \beta^{-s}.$$

Тогда, если $D = \{d_{jk}\}$ есть диагональная часть матрицы $\overline{A}^{(i)}$ и $\lambda_j^{(0)}$ собственные числа $\overline{A}$, то

$$|d_{jj} - \lambda_j^{(0)}| < \tau(\overline{A})^{1/2}e^{-0{,}495q} + [(n^{1/2} + 7{,}1)q + 13n^{1/2}]n^2\beta^{-s} = E_{nqs},$$

существует унитарная матрица S, близкая к (не унитарной) матрице $\overline{Y} = \overline{U}^{(i)}$, так что

$$|\overline{Y} - S| < (1{,}5\overline{n}^{1/2} + 12{,}2)qn^2\beta^{-s} = F_{nqs},$$

$$|\overline{AY} - \overline{YD}| < \tau(\overline{A})^{1/2}e^{-0{,}495q} + [(4{,}1n^{1/2} + 31{,}5)q + 25n^{1/2}]n^2\beta^{-s} = G_{nqs}.$$

Общее число умножений и делений на один шаг $8n+5$, на i шагов — примерно $n(n-1)(4n+3)q$. Для минимизации E_{nqs} рекомендуется такой выбор q, что

$$0{,}495e^{-0{,}495q} \sim (n^{1/2} + 7{,}1)n^2\beta^{-s}.$$

Так, при $\beta = 10$ и рекомендованных значениях q получаются следующие данные:

n	s	q	E_{nqs}	F_{nqs}	G_{nqs}
16	8	20	$7{,}0\cdot10^{-4}$	$4{,}2\cdot10^{-4}$	$2{,}8\cdot10^{-3}$
100	10	22	$5{,}4\cdot10^{-4}$	$6{,}0\cdot10^{-4}$	$1{,}9\cdot10^{-3}$
400	12	25	$1{,}6\cdot10^{-4}$	$1{,}7\cdot10^{-4}$	$1{,}4\cdot10^{-3}$

М. К. Гавурин

7007. Ошибки, возникающие при приведении матрицы к трехдиагональной форме. Хаусхолдер (Generated error in rotational tridiagonalization. Householder Alston S.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1958, 5, № 4, 335—338 (англ.)

Приводятся довольно грубые оценки для $|\lambda_i(A) - \lambda_i(A^*)|$, где $\lambda_i(A)$ — собственные значения симметричной матрицы A, $\lambda_i(A^*)$ — собственные значения трехдиагональной матрицы, полученной из матрицы A при помощи $\frac{n(n-1)}{2}$ плоских вращений. В. Н. Фаддеева

7008. О решении алгебраических уравнений. Кулик (On the solution of algebraic equations. Kulik Stephen), Proc. Amer. Math. Soc., 1959, **10**, № 2, 185—192 (англ.)

Автор рассматривает тождества

$$\frac{1}{f(x)} = \sum \frac{A_i}{x - a_i}, \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{1}{x - a_i},$$

$$\frac{(u-x)^n f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{(u-a_i)^n}{x-a_i} + Nx^{n-1} + c_1 x^{n-2} + \ldots + c_n,$$

где $f(x)$ — многочлен степени N с различными корнями $a_1, \ldots, a_N$. Исходя из вида n-х производных от правых частей тождеств, автор устанавливает способы вычисления корней многочлена, определения границ корней и определения отрезков, свободных от корней. Вычисления состоят в основном в нахождении значений n-х производных от левых частей, для чего указываются рекуррентные формулы. Автор считает, что приводимые им результаты являются обобщениями результатов Бернулли и Лагерра. В. Л. Загускин

7009. О численном решении алгебраических уравнений. Радо (Az algebrai egyenletek numerikus megoldásáról. Radó Ferenc), Kolozsvári egyet. közl. Természettud. sor., 1957, 2, № 1-2, 13—24 (венг.; рез. русск., франц.)

Автор исследует погрешности, возникающие при понижении степени алгебраического уравнения. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с простыми однократными корнями $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $\bar{x}_1$ — приближенное значение x_1. Разделив $P(x)$ на $x - \bar{x}_1$, мы получим многочлен $P_1(x)$, имеющий корни $x_2', x_3', \ldots, x_n'$. Разности между этими корнями и соответствующими корнями исходного многочлена можно приближенно (с точностью до бесконечно малых второго порядка) оценить следующим образом:

$$x_i - x_i' = \frac{P'(x_1)}{P'(x_i)}(x_1 - \bar{x}_1) + o(x_1 - \bar{x}_1) \quad (i = 2, 3, \ldots, n).$$

Далее автор исследует накопление погрешности при многократном понижении степени и пытается указать наилучший порядок исключения корней. Приводятся оценки погрешностей корней, возникающих в результате округлений при понижении степени, а также замечания о замене аргумента при вычислениях по методу П. В. Мелентьева (Мелентьев П. В., К решению уравнений высоких степеней, Прикл. матем. и механ., 1948, 2, 215—218). В. Л. Загускин

7010. Вычисление корней плохо обусловленных многочленов. I. II. Уилкинсон (The evaluation of the zeros of illconditioned polynomials. Part I. II. Wilkinson J. H.), Numer. Math., 1959, **1**, № 3, 150—180 (англ.)

Плохо обусловленными (ill-conditioned) автор предлагает называть такие многочлены, у которых небольшое изменение одного из коэффициентов приводит к значительному изменению одного или нескольких корней. Рассматривается известная линеаризированная оценка изменения простого корня λ_i многочлена

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \ldots + a_0 \qquad (1)$$

в зависимости от изменения коэффициента a_r:

$$\delta\lambda_i = -\frac{\lambda_i^r}{f'(\lambda_i)}\delta a_r \qquad (2)$$

и аналогичная оценка в случае двукратного корня:

$$(\delta\lambda_i)^2 = -2\frac{\lambda_i^r}{f''(\lambda_i)}\delta a_r. \qquad (3)$$

Приводится пример плохо обусловленного многочлена: $f(x) = (x+1)(x+2)\ldots(x+20)$. Изменение коэффициента при x^{19} на 2^{-55} приводит к изменению восьмого десятичного знака некоторых корней на несколько единиц, что согласуется в основном с оценкой (2). Однако изменение того же коэффициента на 2^{-23} приводит к тому, что часть корней многочлена становится комплексными (например, появляются корни $-16{,}730737466 \pm \pm 2{,}812624894i$), так что линеаризированная оценка (2) теряет силу. Основное содержание обеих частей реферируемой работы составляют многочисленные примеры, на которых изучаются особенности плохо обусловленных многочленов и особенности вычисления их корней. В частности, рассматриваются характеристические полиномы, определяемые заданием матриц. Приводятся практические советы. Так, например, рекомендуется избегать каких-либо преобразований плохо обусловленных многочленов. Из анализа ряда примеров делается вывод, что на последних этапах вычислений необходимо сохранять в два или даже в три раза больше значащих цифр, чем их содержится в коэффициентах плохо обусловленного многочлена. Вычисления производились на машине ДЭЮКЕ (РЖМат, 1955, 4740). Для вычисления действительных корней применяется метод Ньютона для комплексных корней — метод Берстоу и метод Маллера (РЖМат, 1959, 7489). В. Л. Загускин

7011. Заметки по численному анализу. I. Итерации для многочленов. Швердтфегер (Notes on numerical analysis. I. Polynomial iteration. Schwerdtfeger Hans), Canad. Math. Bull., 1959, **2**, № 2, 97—110 (англ.)

Изучаются итерации высших порядков для решения алгебраических уравнений

$$f(x) = 0, \qquad (1)$$

где $f(x)$ — многочлен, имеющий только простые корни. В этом случае, как известно, найдутся также многочлены $h_1(x)$ и $h(x)$, что $h_1(x)f(x) - h(x)f'(x) = 1$. Итерация

$$x_{k+1} = x_k + h(x_k)f(x_k) \qquad (2)$$

имеет, как известно (см., например, РЖМат, 1957, 2702К), сходимость второго порядка. Автор приводит формулы для вычисления $h(x)$ в случае, когда $f(x)$ — многочлен третьей степени. Далее указывается метод для получения итераций более высоких порядков и приводится полученная таким образом формула для итераций третьего порядка:

$$x_{k+1} = x_k + h(x_k)f(x_k) + \frac{1}{2}h(x_k)[h'(x_k) + h_1(x_k)]f^2(x_k).$$

Дается применение к решению кубических уравнений и извлечению корней. Рассматривается вопрос об области сходимости процесса. Библ. 10 назв. В. Л. Загускин

7012. О приближенном решении алгебраических уравнений. Каасик (Algebraliste võrrandite ligikaudsest lahendamisest. Kaasik U.), В сб.: Loodus ja matem., Природа и матем. 1. Таллин, 1959, 134—141 (эст.; рез. русск., англ.)

Рассматривается приближенное решение алгебраических уравнений методом Фюрстеану. Дается схема прак-

тического применения этого метода и теорема сходимости, которые иллюстрируются пятью примерами.

Резюме автора

7013. Об одном методе решения кубических уравнений. Жак С. В., Сб. научно-техн. работ. Азово-Черноморск. ин-та механиз. с. х., 1957, вып. 11, ч. 1, 289—299

Уравнение $x^3+Bx^2+Cx+D=0$ с помощью замены $x=y\sqrt[3]{D}$ и обозначений $B_1=\frac{B}{\sqrt[3]{D}}$, $B_2=\frac{C}{\sqrt[3]{D}}$ преобразуется к виду

$$y^3+B_1y^2+B_1y+1\equiv(y+b)\left(y^2+ay+\frac{1}{b}\right)=0,$$

где $a+b=B_1$, $ab+\frac{1}{b}=B_2$.

Если отсюда определить a и b, то $y_1=-b$; $y_{2,3}=-\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-\frac{1}{b}}$ и $x_i=y_i\sqrt[3]{D}$. Для определения a и b по B_1, B_2 строится сетка кривых $a=\frac{B_2}{b}-\frac{1}{b}$ при различных B_2 (номограмма с помеченными кривыми) и ищутся точки пересечения прямой $a+b=B_1$ с соответствующей кривой.

Предлагаемый способ представляет развитие графического метода „расщепления" кубического уравнения, применяемого иногда в динамике самолета.

Ю. Ф. Харкеевич

7014. Единый процесс для уточнения корней многочленов над полем комплексных чисел. Дерр (A unified process for the evaluation of the zeros of polynomials over the complex number field. Derr John I.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1959, 13, № 65, 29—36 (англ.)

Классический метод Ньютона уточнения корней многочленов и трансцендентных функций, как известно, в случае кратных корней сходится медленно. Бодевиг предложил поэтому для уточнения корня ζ кратности k применять формулу

$$z_{i+1}=z_i-k\frac{f(z_i)}{f'(z_i)} \qquad (1)$$

и показал, что процесс обладает квадратичной сходимостью (Bodewig E., Quart. Appl. Math., 1949, 7, 325—333). Однако использование этой формулы ограничивается двумя обстоятельствами. Во-первых, кратность k корня ζ заранее обычно бывает неизвестна; во-вторых, при $z_i\to\zeta$ и $k>1$ $f'(z_i)\to 0$, в силу чего вычисления по формуле (1) сопровождаются большой потерей точности. Для того чтобы избавиться от большой потери точности, предлагается пользоваться формулой

$$z_{i+1}=z_i-\frac{f^{(k-1)}(z_i)}{f^{(k)}(z_i)}. \qquad (2)$$

Получающийся при этом процесс обладает квадратичной сходимостью. Если кратность k корня неизвестна, предлагается пользоваться формулой

$$z_{i+1}=z_i-\frac{f^{(l_i)}(z_i)}{f^{(l_i+1)}(z_i)}, \qquad (3)$$

где натуральное число l_i определяется при некотором выборе положительного числа η условиями:

$$\begin{aligned}&|f^{(l)}(z_i)|<\eta, \qquad l=0,\ldots,l_i,\\ &|f^{(l_i+1)}(z_i)|\geqslant\eta.\end{aligned} \qquad (4)$$

Если при этом число η удовлетворяет условию $|f^{(k)}(\zeta)|>\eta$, то в некоторой окрестности корня ζ процесс, определяемый формулой (3), совпадает с процессом (2). Вне этой окрестности сходимость может быть медленной. В связи с этим рекомендуется пользоваться следующей основной формулой:

$$z_{i+1}=z_i-(k_i-l_i)\frac{f^{(l_i)}(z_i)}{f^{(l_i+1)}(z_i)}, \qquad (5)$$

причем даются указания по выбору чисел k_i. При этом, если, начиная с некоторого этапа, $k_i=k$, то сходимость независимо от выбора l_i является квадратичной. Выбор l_i влияет тогда лишь на потерю точности. Если в качестве k_i брать целые числа, ближайшие к

$$\frac{f^{(l_i)}(z_i)/f^{(l_i+1)}(z_i)}{f^{(l_i)}(z_i)/f^{(l_i+1)}(z_i)-f^{(l_i-1)}(z_i)/f^{(l_i)}(z_i)}, \qquad (6)$$

то процесс, определяемый формулой (5), при $z_i\to\zeta$ совпадает с процессом (2).

Приводятся числовые примеры, частью характеризующие особенности сходимости, частью поясняющие вычислительную схему.

В. Л. Загускин

7015. О некоторых итерациях высших порядков. Микеладзе Ш. Е. Сакартвелос ССР Мецниереба Академиис моамбе, 1959, 22, № 3, 257—264 (груз.); Сообщ. АН ГрузССР, 1959, 22, № 3, 257—264 русск.

Предлагается общий метод получения итераций принципе сколь угодно высокого порядка для решения как одного алгебраического или трансцендентного уравнения, так и их систем. Пусть α — однократный действительный или комплексный корень уравнения

$$f(z)=0. \qquad (1)$$

Для его вычисления строится последовательность $z_0, z_1, \ldots$, где z_0 — начальное приближение α, определяемая рекуррентным соотношением

$$z_n=z_{n-1}-\sum_{k=1}^{m}a_k\omega_k(z_{n-1}), \qquad (2)$$

где $\omega_k=\frac{f(z_{n-1})}{f'(z_{n-1}+\beta_{k-1}\omega_{k-1})}$.

Автор предлагает выбрать некоторое значение m и придав части параметров $a_1, a_2, \ldots, a_m$, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$ произвольные числовые значения, определить остальные из условия обращения в нуль при $z=\alpha$ наибольшего возможного числа первых производных функций, стоящей в первой части равенства (2). Это определит итерационный процесс, порядок которого равен порядку первой отличной от нуля производной. Так, при $m=4$ принимая $\beta=0$, $\beta_1=-1/2$, $\beta_2=-1/2$, $\beta_3=-1$, автор получает $a_1=1/6$, $a_2=1/3$, $a_3=1/3$, $a_4=1/6$, что определяет итерационный процесс пятого порядка. Даются также вычислительные формулы для системы нелинейных уравнений. Приводятся числовые примеры.

Следует отметить, что с вычислительной точки зрения предлагаемый метод отличается от известных методов тем, что требуется вычисление значений только первой производной. Однако на каждом этапе это вычисление приходится производить несколько раз при различных значениях аргумента.

В. Л. Загускин

7016. Некоторые итеративные методы для определения нуля функции комплексного переменного. Манро (Some iterative methods for determining zeros of functions of a complex variable. Munro W. D.), Pacif. J. Math., 1959, 9, № 2, 555—566 (англ.)

Дается несчетное множество итеративных схем высокого порядка для нахождения нулей функции комплексного переменного. Итерационная схема $z_n\to\alpha$ называется порядка N, если

$$\frac{|z_{n+1}-\alpha|}{|z_n-\alpha|^N}\to c\neq 0.$$

Большинство выводимых схем не имеют практического значения. Однако итерационные схемы третьего порядка, требуя несколько большей, чем, например, метод Ньютона, вычислительной работы, обеспечивают сходимость для таких начальных приближений, при которых метод Ньютона расходится. Это иллюстрируется числовым примером. М. А. Алексидзе

7017. Практическое применение асимптотических представлений. Берг (Praktische Anwendung asymptotischer Entwicklungen. Berg L.), Wiss. Z. Hochschule Elektrotechn. Ilmenau, 1958, **4**, № 3, 209 (нем.; рез. русск., англ., франц.)

Приводятся общие рассуждения относительно возможностей применения асимптотических представлений и разложений. Перечисляются различные случаи, когда применение асимптотического представления функций для решения задач особенно эффективно. Указывается, что асимптотические методы исследования поведения функций еще не нашли в прикладных вопросах математики достаточно широкого применения, несмотря на то, что дают достаточную для нужд практики степень точности вычислений. В качестве иллюстрации изложенного приводится асимптотическая формула для вычисления определенного интеграла

$$\int_a^b \cos g(s,t)\,dt = \sqrt{\frac{2\pi}{g_{tt}(s,x)}}\left\{\cos\left[g(s,x)+\frac{\pi}{4}\right]+o(1)\right\}.$$

И. Ф. Шелихова

7018. Метод Монте-Карло. Франкс (La méthode de Monte-Carlo. Franckx Ed.), Assoc. Actuair. Belges. Bull., 1956, № 58, 89—101 (франц.)

Обзор простых применений метода Монте-Карло. J. Todd

Перевод из Math. Revs, 1957, **18**, № 4, 336.

7019. Электроинтеграторы. Либман (Resistance-network analogues. Liebmann G.), Revue E, 1956, **1**, № 12, 287—308 (англ.; рез. франц., флам.)

Дается описание способов постановки и решения краевой задачи Пуассона $\Delta^2\varphi = f$ на электроинтеграторах. П. В. Пигина

7020. Техника программирования для решения задач транспортировки. Судзуки (Programming techniques for solving the transportation problem. Suzuki Sigemiti), J. Operat. Res. Soc. Japan, 1958, **1**, № 4, 145—156 (англ.)

Описывается методика программирования и конкретная программа на машину „Бендикс G-15-D" для решения задач транспортировки. Особое внимание уделяется максимальной компактности программы. Для указанной машины создана программа, которая работает без обращения к внешнему запоминающему устройству при $a+b \leqslant 56$, где a и b — числа соответственно мест отправлений и мест пребываний. М. А. Алексидзе

7021. Определение гомографической функции по большому числу полученных экспериментально точек, абсциссы которых задаются в арифметической прогрессии. Шмитт (Détermination de la fonction homographique à partir de données expérimentales en surnombre, les abscisses étant en progression arithmétique. Schmitt A.), Publs scient. et techn. Ministère air, 1955, N. T., № 52, 41—53 (франц.)

По большому числу наблюденных данных

$$(x_0, y_0);\ (x_0+\Delta x, y_1);\ \ldots\ (x_0+(n-1)\Delta x, y_{n-1}) \qquad (1)$$

строится функция

$$(x+a)(y+b) = c, \qquad (2)$$

которой они должны удовлетворять. С помощью элементарных выкладок коэффициенты a, b и c выражаются в явной форме через величины s_k $(k = 1, 2, \ldots, 6)$, которые являются линейными функциями от y_i. Коэффициенты при y_i в выражении s_k зависят только от n выбранных точек. Автор записывает их в виде краковян, таблицы которых приводятся в конце статьи для $n = 3, 4, \ldots, 20$. На примере показано, как выяснить, следует ли экспериментальный ряд (1) построенному закону (2). В. Н. Кублановская

7022. Об оценке максимальной погрешности. Херфурт (Zur Fehlerfortpflanzung von Größtfehlern. Herfurth G.), Technik, 1959, **14**, № 8, 536—537 (нем.)

Пусть $f(x,y) = u(x,y)/v(x,y)$. Вместо обычной формулы

$$\left[\frac{\Delta f}{f}\right] = \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta v}{v} = \frac{|u_x|}{u}\Delta x + \frac{|u_y|}{u}\Delta y + \frac{|v_x|}{v}\Delta x + \frac{|v_y|}{v}\Delta y$$

для оценки относительной погрешности, автор предлагает следующую формулу:

$$\frac{\Delta f}{f} = |f_x|\frac{v}{u}\Delta x + |f_y|\frac{v}{u}\Delta y = \frac{|u_x v - u v_x|}{uv}\Delta x + \frac{|u_y v - u v_y|}{uv}\Delta y.$$

Устанавливается, что $\frac{\Delta f}{f} \leqslant \left[\frac{\Delta f}{f}\right]$. На конкретном примере показывается, что $\frac{\Delta f}{f} = \frac{1}{3}\left[\frac{\Delta f}{f}\right]$.

В. К. Саульев

7023. Накопление погрешностей в приближенных вычислениях. Лукашевич (Accumulation of errors in approximate calculations. Łukaszewicz L.), Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. math., astron. et phys., 1958, **6**, № 4, 233—239, XIX (англ.; рез. англ.)

Пусть $y_\kappa = x_\kappa$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$; $y_s = \omega_s(y_a, y_\beta, \ldots, y_\delta)$ $(a, \beta, \ldots, \delta < s)$ при $p < s \leqslant N$. Тогда через $y_N(x)$ обозначим y_N, как функцию от $x_1, x_2, \ldots, x_p$, а через y_{Ns} $(p < s \leqslant N)$ обозначим y_N, как функцию от $x_1, \ldots, x_p$, y_s, предполагаемых независимыми переменными. Если величины x_k имеют погрешности δx_k, а при вычислении функции ω_s (при данных значениях ее аргументов) появляется погрешность $\delta\omega_s$, то линейная часть погрешности

$$\delta y_N = \sum_{k=1}^{p} \partial y_N(x)/\partial x_k\,\delta x_k + \sum_{s=p+1}^{N} \partial y_{Ns}(x; y_s)/\partial y_s\,\delta\omega_s.$$

Предполагая, что погрешности δx_k, $\delta\omega_s$ случайны и независимы, получим оценку для дисперсии $D[\delta y_N]$. Приведены достаточные условия, при которых δy_N при $N \to \infty$ удовлетворяет условиям теоремы Линдеберга — Феллера о сходимости к нормальному закону. Примеры: вычисление полинома по схеме Горнера, метод простой итерации. Отмечается недопустимость „механического" применения данного метода к вычислениям на цифровых машинах: например, при численном решении диффренциальных уравнений для значений очень медленно растущих решений в последовательных узлах неверно предположение о независимости ошибок $\delta\omega_s$.

М. Л. Бродский

7024. Методы вычисления линейных комбинаций функций, исключающие умножение. Меньшиков Г. Г., Тр. Научно-техн. конференции Ленингр. электротехн. ин-та связи. Вып. 3. Л., 1959, 3—10

Составлена сглаженная таблица значений функции $f(x) = \sin x$ при $x = 0°(9°)360°$ так, что $|\sin x - \widetilde{\sin x}| \leqslant 10^{-3}$; $\Delta^4\,\widetilde{\sin x} = i \cdot 10^{-3}$ $(i = 0, \pm 1, \pm 2)$ $(\tilde{f}(x)$ — сглаженная

функция). Подобным образом сглажены и некоторые другие функции. При сглаживании функции и хранении в машинной памяти „простых" разностей $\Delta^r f(x)$ значительно уменьшается объем памяти, используемой для задания $f(x)$, сравнительно с табличным заданием функции. Составление таблицы $F(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k f_k(x)$ сводится к суммированию $\Delta^r F(x)$, вычисление же $\Delta^r F(x) \approx \approx \sum_{k=1}^{n} a_k \Delta^r f_k(x)$ также несложно, благодаря „простоте" $\Delta^r f_k(x)$. Предлагается создать специальную синтезирующую машину для табулирования линейных комбинаций заданных систем функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$.

М. Л. Бродский

7025. К вопросу о характере сходимости алгорифма Эйлера извлечения корней. Эскин Л. Д., Изв. высш. учебн. заведений. Математика, 1958, № 4, 275—278

Пусть A — матрица n-го порядка, все элементы которой, расположенные ниже главной диагонали, равны r, остальные — единице. Получено явное задание для матрицы T, совершающей преобразование A к диагональному виду, а также для T^{-1}. Этот результат применяется к изучению характера стремления к пределу $\sqrt[n]{r}$ последовательности $x_2^{(k)}/x_1^{(k)}$, где $x^{(k)} = \left\{x_j^{(k)}\right\}_{j=1}^{n} = A^k x^{(0)}$ (РЖМат, 1956, 7670).

М. К. Гавурин

7026. О применении клеточных матриц в механике корпускулярных систем. Рожа П., Успехи матем. наук, 1959, 14, № 4, 207—211

Результаты Рауса, касающиеся колебания корпускулярной струны, автор, используя теорию клеточных матриц, обобщает на двумерный случай. Автор показал, что если частота ω вынужденного колебания, действующего на любую частицу прямоугольной мембраны, удовлетворяет условию $\omega \geqslant 2\sqrt{2}/T$, то периодическое решение дифференциального уравнения

$$\ddot{W} + \frac{1}{T^2} GW = \frac{1}{T^2} f \sin \omega t$$

(G — клеточная матрица, f — вектор) определяет колебания, в которых отклонения соседних частиц, эластично связанных друг с другом, в каждый момент имеют противоположные знаки.

В. К. Саульев

7027. Теория Хартри—Фока с неортогональными базисными функциями. Мак-Уини (Hartree-Fock theory with nonorthogonal basis functions. McWeeny R.), Phys. Rev., 1959, **114**, № 6, 1528—1529 (англ.)

Для получения вариационного решения многоэлектронной проблемы применяется итерационный метод (метод наискорейшего спуска).

7028. Об одном приеме приближенного построения функции Грина. Коган Я. М., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1958 г., вып. 4, 11—13

Предлагается прием приближенного построения функции Грина для решения внутренней трехмерной задачи Дирихле путем кусочно-линейной аппроксимации функции $1/r$ с помощью способа наименьших квадратов. Замкнутая поверхность S разбивается на n неперекрывающихся кусков $S_1, S_2, \ldots, S_n$ и на каждом из них функция $1/r$ аппроксимируется при помощи $\rho_k = A_k x + B_k y + C_k z$.

Функция Грина G на всей поверхности S приближенно выражается соотношением

$$G \approx \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{r} - \rho_k\right] \varepsilon_k(P),$$

где $\varepsilon_k = \begin{cases} 0, & \text{если точка } P \text{ находится на } S_k, \\ 1, & \text{если точка } P \text{ не находится на } S_k. \end{cases}$

Справедливость этого результата основывается на доказанной теореме.

Ю. Ф. Харкеевич

7029. Арифметика с плавающей запятой без нормализации. Ашенхерст, Метрополис (Unnormalized floating point arithmetic. Ashenhurst R. L., Metropolis N.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1959, **6**, № 3, 415—428 (англ.)

Даются различные возможности работы с плавающей запятой без выполнения операции нормализации. Особенное внимание обращается на выработку таких правил для выполнений машинных операций, которые дают меньшую погрешность. Сформулированные правила сходны с известными правилами вычисления со значащими цифрами и поэтому авторы называют приводимый метод арифметикой значащих цифр. Дается анализ погрешности для каждой арифметической операции и предлагается статистическая модель для погрешности в длительных вычислениях.

М. А. Алексидзе

7030. Определение положения запятой. Шустер (Locating the decimal point. Schuster Carl N.), Scripta Math., 1959, **24**, № 2, 149—153 (англ.)

Правило для определения положения запятой при умножении, делении, извлечении корней, комбинированных действиях на счетной линейке.

М. Л. Бродский

7031. Анализ погрешности в арифметике с плавающей запятой. Карр, III (Error analysis in floating point arithmetic. Carr John W., III), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, **2**, № 5, 10—15 (англ.)

Исследование погрешности для «псевдоопераций», выполняемых на машинах, проводились для машин с фиксированной запятой. Однако эти же машины могут с помощью специальных подпрограмм работать в режиме с плавающей запятой. В данной работе даются границы погрешностей округления и ошибки, получающейся в действительной машине при выполнении операций с плавающей запятой. Прослеживается также распространение погрешности от одной операции к другой. После установления погрешностей для псевдоопераций сложения, вычитания, умножения и деления анализируется погрешность ассоциативного и дистрибутивного законов.

М. А. Алексидзе

7032. Исчисление конечных разностей в прикладной математике. Эванджелисти (Il calcolo delle differenze finite nella matematica applicata. Evangelisti Giuseppe), Rend. Seminar. mat. e fis. Milano, 1954—1955 (1956), **26**, 69—87 (итал.; рез. англ.)

Излагаются понятия оператора сдвига, разностного оператора, оператора суммирования, разностного уравнения для функций одного переменного. Указаны примеры некоторых простых задач прикладного характера, которые приводят к рассмотрению уравнений в конечных разностях.

В. С. Рябенький

7033. Специальные многочлены в численном анализе. Тодд (Special polynomials in numerical analysis. Todd John), On Numerical Approximat. Madison, Univ. Wisconsin Press, 1959, 423—446 (англ.)

Набросок курса по теории приближений для студентов второй ступени (graduate students), специализирующихся по вычислительной математике. Содержание: гл. I — теорема Вейерштрасса; гл. II — полиномы Чебышева; гл. III — теоремы Маркова; гл. IV — ортогональность; гл. V — приближенные квадратуры; гл. VI — интерполяционные процессы; библиография.

Доказательства приведены лишь частично. Статья начинается с некоторых соображений о месте такого курса в подготовке специалистов по вычислительной математике.

М. К. Гавурин

7034. О распространении погрешности в некоторых нелинейных алгоритмах. Винн (On the propagation of error in certain non-linear algorithms. Wynn P.), Numer. Math., 1959, **1**, № 3, 142—149 (англ.)

Рассматривается вопрос о распространении погрешности в ромбообразных алгоритмах. Обозначая функции или числа, над которыми происходит оперирование, в процессе алгоритма через $\varphi_s^{(m)}$ представим их в таком виде

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_{-1}^{(0)} & & & & \\ & \varphi_0^{(0)} & & & \\ \varphi_{-1}^{(1)} & & \varphi_1^{(0)} & & \\ & \varphi_0^{(1)} & & & \\ \varphi_{-1}^{(2)} & & \varphi_1^{(1)} & & \\ & \varphi_0^{(2)} & & & \\ & & \varphi_1^{(2)} & & \end{array} \qquad (1)$$

Алгоритм будет ромбообразным, если все величины вычисляются из соотношения

$$\vartheta_s^{(m)}\left\{\varphi_s^{(m)}, \varphi_{s-1}^{(m)}, \varphi_{s-1}^{(m+1)}, \varphi_{s-2}^{(m+1)}\right\} = 0,$$

которое связывает величины, стоящие в вершинах ромба таблицы (1). Частные случаи ромбообразного алгоритма получаются в зависимости от того, будут или нет зависеть функция $\vartheta_s^{(m)}$ от индексов s и m. Выводятся формулы, которые описывают распространение погрешности и дается метод для анализа численной устойчивости ромбообразных алгоритмов.

М. А. Алексидзе

7035 К. Интерполирование и связанные с ним таблицы (Interpolation and allied tables. London, HMSO., 1956, 80 pp., 5 sh.) (англ.)

Книга издана в качестве краткого справочника по вычислительным методам и предназначена прежде всего для практических работников-вычислителей. В нее включены основные формулы, таблицы и методы вычисления, необходимые в повседневной работе вычислителя. Благодаря этому, а также удачному расположению материала и четкости изложения, составителям справочника (книга написана, а излагаемые в ней методы отработаны на практической работе в ведомстве по составлению морских календарей и в Национальной физической Лаборатории Англии, в отделе математики) удалось сделать его небольшим по объему и удобным для повседневной работы.

Справочник состоит из трех частей. Часть 1 является вводной и теоретической. В ней излагаются общие принципы вычислений, таблицы разностей, интерполяционные формулы, методы с модифицированными разностями, практические приемы интерполирования с подробно разработанными примерами, а также некоторые сведения о численном дифференцировании и интерполировании. Часть 2 состоит из таблиц. Здесь приводятся некоторые таблицы для линейной и квадратичной интерполяции, таблицы коэффициентов интерполяционных формул Бесселя, Эверетта и для формул с модифицированными разностями и другие необходимые при интерполировании таблицы. В третьей части приводится большое число формул, необходимых при интерполировании. Все эти формулы систематизированы и приведены в удобный для вычисления вид. Здесь, в частности, собраны все интерполяционные формулы с таблицами разностей, формулы с центральными разностями, с модифицированными разностями, формулы для интерполирования на середину, формулы различных экономизирующих полиномов для интерполирования, формулы для численного дифференцирования и интегрирования (включая и случай кратных интегралов). В конце книги приводятся различные формулы, а также некоторые теоретические сведения по решению обыкновенных дифференциальных уравнений и по теории ошибок. Книга заканчивается таблицами важнейших констант и аннотированной библиографией.

К. А. Карпов

См. также: 6448, 6454, 6658, 6661, 6842, 6875, 6879.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Редактор *Д. Ю. Панов*

7036. Арифметическая переводяще-программирующая программа в системе автоматического программирования «Фортран» фирмы «ИБМ». Шеридан (The arithmetic translator-compiler of the IBM Fortran automatic coding system. Sheridan Peter B.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1959, 2, № 2, 9—21 (англ.)

Подробное описание алгорифмов программирования арифметических выражений в программирующей программе «Фортран», разработанной фирмой «ИБМ» для машины ИБМ-704. Арифметические выражения строятся из констант и символов переменных величин, связываемых операциями степени, умножения, деления (понимаемого как умножение на обратную величину), сложения и вычитания. Допускаются произвольные функциональные обозначения, имеющие вид $F(A_1, \ldots, A_n)$, где F — слово, обозначающее функцию, $A_1, \ldots, A_n$ — аргументы. Порядок действий указывается скобками и правилами старшинства: а) степень, б) умножение и деление, в) сложение и вычитание.

Программирование производится в несколько этапов. На первом этапе производится стандартизация изображений переменных величин и констант. На втором этапе производится расстановка всех необходимых скобок, так что в дальнейшем порядок действий указывается исключительно скобками. На третьем этапе производится перевод формулы в последовательность условных команд — «триплетов». Каждый триплет содержит обозначение операции, обозначение компоненты (вторая компонента подразумевается находящейся в одном из главных регистров) и условное число, обозначающее результат. На четвёртом этапе производится просмотр последовательности триплетов с целью выявления и устранения триплетов, реализующих повторно входящие выражения. Кроме этого, триплеты снабжаются некоторой дополнительной информацией, облегчающей в дальнейшем экономию рабочих ячеек. Наряду с этим, последовательность триплетов, соответствующая цепочке выражений, соединённых знаками умножения и деления, переупорядочивается таким образом, чтобы образовать последовательность максимальной длины с чередующимися знаками умножения и деления. Эта операция сокращает число «холостых» передач из одного регистра в другой.

На пятом этапе каждый триплет заменяется соответствующей последовательностью машинных команд, реализующих операцию, указанную в триплете. Некоторые функциональные обозначения заменяются открытыми подпрограммами, но большинство реализуются замкну-

тыми подпрограммами и для них формируются нужные команды пересылки аргументов и результата.

Экономия рабочих ячеек производится, однако место её проведения среди указанных этапов не ясно. Экономия команд производится только в пределах одной арифметической формулы. А. П. Ершов

7037. Вычислительные машины изучают инженерный язык. Фуска (Computers learn engineer's language. Fusca James A.), Aviat. Week, 1958, **68**, № 26, 51—52, 56—57 (англ.)

Сообщается об автоматических кодирующих системах, разрабатываемых некоторыми фирмами в США, с помощью которых значительно облегчается программирование задач из области техники непосредственно самими инженерами без помощи программистов-математиков. Так, фирмой «ИБМ» разработана система под названием «Фортран» («Fortran» — перевод формул), а фирмой «Сперри рэнд» — система «Мат-Матик» («Mat-Matic»). Эти системы позволяют автоматически составлять программы непосредственно из технической записи формулы задачи. Сообщается, что работы по созданию подобных автоматических кодирующих систем ведутся и другими фирмами, а также имеются работы по переводу программ, записанных в одной системе, в другую систему. При этом фирмой «ИБМ» установлено, что время и стоимость программирования при использовании системы «Фортран» сокращаются в 10 раз. Приводится пример применения системы «Мат-Матик», используемой в вычислительных машинах УНИВАК-1 и УНИВАК-2. Пусть требуется вычислить формулу $Z=X+Y$. В коде «Мат-Матик» эта формула вводится непосредственно в вычислительную машину. После этого производится автоматическое преобразование этого кода в так называемый промежуточный код А-3:

AA0B10 A06B18,

где AA0 — код операции сложения, B10 — символ ячейки памяти, где хранится код X, A06 — символ ячейки памяти для кода Y, B18 — символ ячейки для запоминания результата. После этого происходит автоматическое преобразование кода А3 в основной код машины под названием С-10, состоящий из 12 знаков, среди которых могут быть буквы и цифры. Код С-10 содержит две одноадресных команды. Для вычислений с фиксированной запятой код С-10 для данного примера имеет вид:

B00170 A00106
H00178 000000,

где B00170 — команда извлечь код X из ячейки 170 и направить его в сумматор, A00106 — команда извлечь код Y из ячейки 106 и сложить его с числом на сумматоре, H00178 — команда заслать сумму в ячейку 178, 000000 — команда продолжить дальнейшие вычисления по программе. Г. П. Зеленкевич

7038. Программирование на вычислительной машине КСИРО-МАРК-1. IV. Автоматическое программирование с помощью простых компилирующих программ. Хилл, Пирси (Programme design for the C.S.I.R.O. Mark I computer. IV. Automatic programming by simple compiler techniques. Hill G. W., Pearcey T.), Austral. J. Phys., 1957, **10**, № 1, 137—161 (англ.)

Начало см. РЖМат, 1954, 4202, 4203; 1956, 1707. Подробно рассматриваются вопросы построения и использования библиотек стандартных подпрограмм. Рассматриваются примеры компилирующих программ, обсуждаются возможные выгоды при их использовании: сокращение ошибок и времени программирования, сокращение времени контроля и отладки программ. Описываются процессы составления и использования библиотек программ. А. А. Красилов

7039. Алгебраическая формулировка геометрических схем программ. Ворхис (Algebraic formulation of flow diagrams. Voorhees Edward A.), Communs Assoc. Comput. Mach., 1958, **1**, № 6, 4—8 (англ.)

Рассматривается следующая операторная запись схем программ. Пусть E — либо арифметический оператор, либо оператор обмена информацией между накопителями, либо оператор задания режима работы вычислительной машины (например, останов.) и т. п.; C — оператор логического условия, выражаемый чаще алгебраическими неравенствами; I — оператор цикла по параметру; T — оператор обращения к подпрограммам; + указание „выполнить следующий оператор“, ( ) — указание на группирование операторов; запятая используется для специальных условий; указывается на использование операций алгебры логики. В этих обозначениях, например, I_iE_k означает „вычислять E_k столько раз, сколько значений принимает параметр i“; E_kC_j — „вычислять E_k до выполнения условий оператора C_j“; $E_k + E_l$ — „после выполнения оператора E_k, выполнить оператор E_l“; $I_k(E_l)C_j$ — „после каждого цикла по i, проверять условие C_j и, если оно выполнено, переходить к следующему оператору“ и т. д. Для пояснения существа операторной записи схем программ приводятся простые примеры. Указывается на возможность использования такой системы записи схем при автоматическом программировании. А. А. Красилов

7040. Кодирование команд в цифровой программной системе управления станками. Хетагуров Я. А. В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 276—295

Сравниваются три способа введения данных, определяющих траекторию движения, в цифровую автоматическую систему программного управления металлорежущим станком. Имеются ввиду окончательные данные, полученные ручным способом или на вычислительном устройстве при предварительных расчетах программы. Эти данные подлежат вводу непосредственно в управляющую систему станка. При первом способе в систему управления вводятся следующие данные: величины приращений по каждой из координат и скорости подач инструмента по каждой из координат. При этом профиль обработки состоит из ряда прямолинейных отрезков (линейная интерполяция), длины которых определяются вводимыми величинами приращений по отдельным координатам. При втором способе (также случай линейной интерполяции) задаются величины приращений координат и время, за которое эти приращения должны быть отработаны. Третий из рассматриваемых в статье способов состоит в том, что на магнитной ленте на различных дорожках соответственно различным осям координат записываются импульсы, каждый из которых вызывает определенное элементарное перемещение по данной оси. При этом тип профиля (прямые или кривые), скорость подачи и время обработки зависят только от цены импульса, скорости протяжки ленты и расположения импульсов на ленте. Сравнение трех способов производится с точки зрения их удобств, гибкости, объема вводимой информации, сложности логических схем, количества электронного оборудования и др. В. А. Брик

7041. Коды для обнаружения ошибок с элементами, отличающимися на единицу. Кауц (Unit-distance error-checking codes. Kautz W. H.), IRE Trans. Electronic Comput., 1958, **7**, № 2, 179—180 (англ.)

Рассматриваются двоичные коды, в которых последовательные элементы отличаются на единицу. Приведена кодовая последовательность для $n=4$: 0000, 0001, 0011, 0111, 1111, 1110, 1100, 1000. Показывается полезность применения этих кодов в некоторых случаях. Выводятся некоторые соотношения, связывающие n с величиной $K(n)$. $K(n)$ — максимум длины цепочки в n-кубе. Н. Н. Поснов

7042. Упрощенный код для вычислительных проблем. (Simplified code for computer problems), Engineer, 1959, **207**, № 5377, 272—273 (англ.)

Сообщается о разработке и применении специального метода автоматизации программирования «Автокод», применяемого для автоматизации программирования при работе на машине «Пегас» (Pegasus) Лондонского вычислительного центра фирмы «Ферранти».

Д. А. Поспелов

7043. Таблица некоторых цифровых вычислительных машин, имеющихся в Англии. Виккерс (Table comparing some digital computers available in Britain. Vickers T.), Process Control and Automat., 1958, **5**, № 11, 460—462 (англ.)

С краткими пояснениями приведена таблица вычислительных машин, имеющихся в Великобритании. Автор отмечает, что таблица не претендует на полноту.

В. Л. Евтеев

7044. Сортировка с вычислением адреса. Айзак, Сингл тон (Sorting by address calculation. Isaac E. J., Singleton R. C.), J. Assoc. Comput. Machinery, 1956, **3**, № 3, 169—174 (англ.)

См. РЖЭ, 1957, № 5, 10776.

7045. Автоматическая вычислительная машина ЦРА-1. Кеммерер, Кортум, Штраубе (Zeiss—Rechenautomat ZRA 1. Kämmerer Wilhelm, Kortum Herbert, Straube Fritz), Jenaer Rundschau, 1959, **4**, № 1, 19—26 (нем.)

В вычислительном центре фирмы «Carl Zeiss Jena» установлена новая вычислительная машина ЦРА-1 (ZRA-1). ЦРА-1 — цифровая вычислительная машина с программным управлением. Вводятся и выводятся числа в десятичной системе счисления, вычисления производятся в двоичной. Машина может обрабатывать числа как в системе с плавающей, так и в системе с фиксированной запятой. Логика машины построена так, чтобы по возможности облегчить работу по программированию задачи. Все логические элементы, выполненные на ферритовых сердечниках с прямоугольной петлей гистерезиса, работают на частоте 200 *кгц*. Сигналы для управления ферритовыми элементами получаются от электронных ламп, синхронизированных сигналами со служебных дорожек магнитного барабана. Магнитный барабан емкостью 4096 48-разрядных кодов вращается со скоростью 12000 оборотов в 1 мин. Плотность записи на поверхности барабана 3 *имп/мм*. Зазор между головкой и поверхностью барабана 30 *мк*. В состав машины, кроме магнитного барабана, входит арифметическое устройство и система управления адресами. Время выполнения основных арифметических операций зависит от системы, в которой производятся вычисления:

операция	с фиксированной запятой	с плавающей запятой
сложение	3,8 *мсек.*	7 *мсек.*
умножение	7 *мсек.*	8 *мсек.*
деление	14 *мсек.*	14 *мсек.*

Логические операции и операции управления от 0,5 *мсек.* до 2,5 *мсек.* Среднее время поиска 2,5 *мсек.* Конструктивно машина выполнена в виде трех стоек размером 1,3×1,2 *м* и высотой 2,2 *м* каждая и пульта управления величиной примерно с письменный стол. В машине имеется 770 ламп, 12000 германиевых диодов и 8500 ферритовых сердечников. Потребляемая мощность 12 *квт* от сети 220 *в* 50 *гц*.

Ц. А. Шенфельд

7046. Автоматическая машина с «плавающими адресами». Ньюмен, Райт (An automatic floating-address machine. Newman E. A., Wright M. A.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1956, B 103, Suppl. № 1, 134—137, Discuss., 146—148 (англ.)

Система «плавающих адресов» разработана Национальной физической лабораторией в Англии применительно к машине ТАКТ (TACT — Three Address Code machine, Tagged), но имеет общее значение. Каждое число (или команда) снабжено своим «ярлыком» (tag), хранимым всегда вместе с ним в запоминающем устройстве (з. у.) и выбирается из з. у. по этому ярлыку, а не по адресу ячейки з. у. Благодаря этому программирование освобождается от учета перемен адресов при переносах чисел между разными частями з. у., например, между быстродействующим з. у. и магнитным барабаном.

ТАКТ — последовательная трехадресная машина с основным запоминающим устройством емкостью 1024 числа на магнитном барабане и быстродействующим запоминающим устройством на 16 чисел, но вместо обычных адресов команды содержат 3 ярлыка, длина числа — 48 двоичных разрядов, из них первые 12 разрядов служат ярлыком.

В процессе работы команды выбираются последовательно с барабана, а указанные в них числа отыскиваются по их ярлыкам в быстродействующем з. у. Ярлык отыскиваемого числа сравнивается на схемах несовпадения с ярлыками чисел, содержащихся в ячейках быстродействующего з. у. Если в какой-либо ячейке ярлыки полностью совпали, то открывается выходной вентиль и значащая часть числа проходит в арифметическое устройство. Если же совпадения не произойдет, то по ярлыку отыскивается число на магнитном барабане для переноса его в быстродействующее з. у. Для приема числа с магнитного барабана освобождается ячейка быстродействующего з. у., определяемая специальным счетчиком. Время обмена числами между основным и быстродействующим з. у. равно периоду вращения барабана, что не снижает средней скорости вычисления, так как этот обмен производится относительно редко, обычно при переходе от одного этапа вычислений к другому.

Приведены блок-схема машины, логические схемы цепей обмена числами между основным и быстродействующим з. у. и временные диаграммы.

О. В. Бачин

7047. Новая вычислительная машина АЛЬВАК. Джонсон (New ALWAC computer. Johnson Charles H.), J. Mach. Account., 1957, **8**, № 7, 18—19 (англ.)

Приводятся данные о двух вычислительных машинах, выпущенных корпорацией «АЛЬВАК» (ALWAC Corp.) на ее новом заводе в Хауторне (Калифорния). Машина АЛЬВАК-800 (ALWAC-800) построена для Федерального управления резервов в Вашингтоне в июле 1957 г. Это одна из самых больших и самых быстродействующих машин в США. Она имеет быстродействующее запоминающее устройство на магнитных сердечниках емкостью в 10 000 слов и 10 буферных устройств, к каждому из которых можно подключить до 50 магнитных барабанов на 20 000 слов каждый и до 10 магнитофонов по 400 000 слов. Две машины АЛЬВАК-800 могут работать совместно, для связи используются буферные запоминающие устройства на магнитных сердечниках на 1000 слов. Информация вводится в машину посредством устройства «Флексорайтер» (Flexowriter), перфокарт, перфоленты или магнитной ленты. Машина работает с 12-разрядными десятичными числами и выполняет до 11 000 сложений в 1 сек.

Машина АЛЬВАК-III-Е меньше машины АЛЬВАК-800 в 20 раз, более дешева и может быть широко применена в коммерции, науке, индустрии и управлении. Память машины III-Е может хранить только 16 000 команд на магнитном барабане емкостью 8192 слова. Входные и выходные устройства машины включают устройство «Флексорайтер», телетайп, перфокарты и перфоленту. Рабочий цикл машины занимает 1÷9 *мсек.* Стоимость

машины менее 100 тыс. долл. Фирма поставила более 20 таких машин. О. В. Бачин

7048. Релейные цифровые вычислительные машины. Комамия Ясуо, Дэнси когё, Electronician, 1958, 7, № 10, 26—32 (японск.)

Краткое описание японских релейных цифровых вычислительных машин ETL-Mark I и ETL-Mark II.

7049. Электронные вычислительные машины. Новейшие разработки. Боклер (Elektronische Rechner. Neueste Entwicklungen. Beauclair W. de), VDI-Nachr., 1958, 12, № 7, 9, 10 (нем.)

Дается обзор развития вычислительной техники в Германии и других странах. Автор отмечает недостатки механических релейных вычислительных машин. Развитие электроники и высокочастотной техники открыло новый путь для вычислительной техники. Современные вычислительные машины характеризуются: 1) большой скоростью выполнения операций, 2) большой скоростью работы запоминающих устройств, 3) наличием накопленной внутри машины программы для управления процессом вычислений. Автор приводит основные даты создания вычислительных машин в США, Англии и останавливается также на этапах развития вычислительной техники в Германии.

В 1937 г. д-р Цузе начал работать над заменой реле и переключателей в вычислительных машинах электронными лампами. В 1942—44 г. был создан опытный макет электронной машины. В 1947—48 г. в Геттингене разработано запоминающее устройство на магнитном барабане (одновременно в США и Англии). В 1948 г. Диркс получает патент на малую переносную машину с магнитным диском. В 1950—52 г. выпускаются электронные машины с программным управлением с магнитным барабаном: G1 и G1a, а также намечается создание G2, которая в 1954 г. вводится в эксплуатацию. В 1956 г. разрабатывается G3. В 1957 г. в связи с развитием техники полупроводников, фирма «Сименс» начинает разрабатывать машину полностью на транзисторах. Этому предшествовал выпуск в США в 1954 г. полностью транзисторной машины ТРАДИК, в 1957 г.— ТРАНЗАК.

Отмечается появление в США новых переключающих элементов: криотрона, действие которого основано на явлении сверхпроводимости проводника, помещенного в жидкий гелий при температуре —270°, и быстродействующего (порядка 10^{-8} сек.) элемента — персистора, в котором используется эффект сверхпроводимости пленок (фирма «Рамо-Вулдридж»). Фирма «Ремингтон Ренд» выпустила магнитные переключающие элементы— фераторы с быстродействием порядка 10^{-9} сек. Автор отмечает преимущества транзисторных машин: 1) сокращение потребляемой мощности в 10 раз, 2) сокращение габарита, 3) увеличение диапазона частот, 4) долговечность, 5) отсутствие специального охлаждения. Отмечается отставание скорости работы входных и выходных устройств. Для ускорения ввода данных применяется фотоэлектрическое считывание со скоростью до 500 знаков в 1 сек. Устройство «Унитайпер» для машин «Унивак» дает возможность вводить данные (непосредственно) на магнитную ленту. В США осуществлена передача с магнитной ленты на отдаленные расстояния со скоростью 20 000 знаков в 1 сек. Разработаны методы быстродействующей печати с непрерывным движением бумаги. Например, матричный (растровый) способ печати, при котором очертание каждого знака образуется из отдельных точек растра ударами печатающих штифтов, собранных в матрицы. Устройство такого типа фирмы «Берроуз» печатает со скоростью 400 знаков в 1 сек. В других быстродействующих устройствах устранено всякое механическое движение, кроме движения бумаги. Печать в них производится посредством импульсов высокого напряжения, заряжающих поверхность покрытой слоем диэлектрика бумаги, которая затем проявляется специальным красящим порошком (ксерография). Скорость печати при этом 200 знаков в 1 сек. В конце 1957 г. разработан ксерографический метод печати с проектированием изображения букв на светочувствительный барабан с последующей печатью на бумагу.

В области технологии осуществлен переход к блочным конструкциям, взаимозаменяемым узлам, печатным схемам. Разработана кабелераскладочная машина, ускоряющая сложные монтажные работы и исключающая появление ошибок при серийном производстве. Автор приводит генеалогическую таблицу («родословное дерево») вычислительных машин, в которой показаны последовательные стадии развития вычислительных машин от релейных и электромеханических к электронным, идущего в нескольких направлениях: машины с запоминающими устройствами на линиях задержки, на лампах, на электростатических трубках, позднее замененных ферритовыми сердечниками, на магнитном барабане, на дисках. Б. М. Полыковская

7050. Электронная вычислительная машина D1-2. Хорн (Elektronischer Rechenautomat D1-2. Horn C.), Nachrichtentechnik, 1959, 9, № 8, 382 (нем.)

Приводятся технические характеристики. Машина содержит 800 электронных ламп. Площадь, занимаемая машиной, равна 10 $м^2$; потребляемая мощность — 5000 *ва*. Скорость — 50 ÷ 100 операций в 1 сек. Память на магнитном барабане содержит 2048 ячеек, в каждой из которых может быть записано либо одно 20-разрядное десятичное число, либо три команды. Каждая ячейка содержит 72 разряда, из которых 68 отводится для числа и 4 для особых отметок. Расстояние между дорожками 1 *мм*, расстояние между импульсами в дорожке 0,5 *мм*. Вся память разбита на 8 групп, по 256 ячеек в каждой. Среднее время поиска внутри группы равно 5 *мсек*, при переходе в другую группу время поиска увеличивается больше, чем в 20 раз. Работа последовательная; частота 100 *кгц*. Устройства ввода и вывода снабжены буферной памятью. В устройстве управления предусмотрены три индексных регистра для автоматического изменения адресов. D1-2 — одноадресная машина. Арифметическое устройство может выполнять четыре арифметических операции: сдвиг, перевод из десятичной системы в двоичную и наоборот. Сложение и вычитание производятся за 1,4 *мсек*, умножение — за 24 *мсек*, деление — за 48 *мсек*. Отрицательные числа записываются в дополнительном коде. Результаты печатаются на пишущей машинке типа Мерседес SE-4 со скоростью 10 знаков в 1 сек. Дается краткое описание пульта обслуживания. Машина работает на радиопредприятии в Дрездене. Для проверки машины ежедневно отводятся первые три часа после включения. И. Б. Рохлина

7051. Достижение в области запоминающих устройств. (Advance in memory devices—), Electr. Engng, 1958, 77, № 4, 369 (англ.)

Сообщается о разработке нового типа магнитного запоминающего элемента, получившего название «Твистор». Все устройство в целом имеет такую же сетку координатных шин, как и ферритовые системы, но без сердечников. Принцип действия устройства основан на применении в качестве одной из координатных шин магнитной проволоки с преимущественным направлением магнитного потока по спирали. Последнее достигается с помощью приложения к проволоке некоторого момента кручения в процессе обработки. Другая координатная шина представляет собой обычную медную проволоку, несколько витков которой вокруг магнитной проволоки определяют участок, где хранится информация. Запись производится при совпадении импульсов тока в этих двух шинах, а считывание — при подаче импульса

обратной полярности в медную проволоку. Выходной сигнал, вызванный изменением продольной составляющей магнитного поля, снимается непосредственно с магнитной проволоки с некоторым усилением, так как силовые линии потока многократно охватывают проводник. Предполагается, что схему управления для подобного запоминающего устройства можно выполнить на полупроводниковых триодах. Время переключения ожидается получить сравнимым с ферритами. Высказывается мнение, что подобная система окажется более простой и экономичной по сравнению с системой на магнитных сердечниках. А. Ф. Смирнов

7052. «Твистор» — магнитное запоминающее устройство (The «Twistor» — a magnetic memory), Electr. Times, 1958, **133**, № 3456, 223 (англ.)

Сообщение о разработке фирмой «Белл» (США) нового типа запоминающего устройства «Твистор», в котором элементами памяти служат участки предварительно напряженной (скрученной) ферромагнитной проволоки. Приводятся соображения по дальнейшему усовершенствованию и упрощению устройства. В частности, предполагается изготавливать специальную ферромагнитную проволоку, предварительно скрученную уже в процессе прокатки. Проводится сравнение устройства «Твистор» с обычными матрицами на ферритовых сердечниках и сплошных ферритовых пластинах — с точки зрения технологии проводки, амплитуды выходного сигнала, соотношения сигнал/помеха и потребляемой мощности. А. А. Крупский

7053. Запрещенный поток — новый метод работы с трехдырочным сердечником в ячейке «магнитной памяти». Болдуин, Роджерс (Inhibited flux — a new mode of operation of the three-hole memory core. Baldwin J. A., Jr, Rogers J. L.), J. Appl. Phys., 1959, **30**, № 4, Suppl., 58—59 (англ.)

Описывается метод работы с трехдырочным сердечником с использованием запрещенного потока. Отличительной особенностью метода является прохождение через каждое отверстие лишь одного провода. Считывание производится путем подачи импульса на провод, проходящий через среднее отверстие (число). Для записи единицы на тот же провод подается импульс противоположной полярности. Для записи нуля импульс той же полярности, что при считывании, подается на провод, проходящий через крайнее левое отверстие (разряд). Запись нуля какого-либо числа, вообще говоря, разрушает состояние единицы в сердечнике того же разряда другого числа, однако так, что поток в крайнем правом сечении остается неизменным. При считывании единицы поток в этом сечении изменяется, при считывании нуля — не изменяется. Времена считывания и записи могут быть сделаны очень короткими. Описана экспериментальная матрица на 32 числа по 10 разрядов с использованием описанного метода. Среднее время считывания и записи 0,75 и 1,0 μсек. соответственно. В. В. Кобелев

7054. Последние успехи в области конструирования магнитных устройств для вычислительных машин. Луни (Recent advances in magnetic devices for computers. Looney Duncan H.), J. Appl. Phys., 1959, **30**, № 4, Suppl., 38—42 (англ.)

Большие успехи в технике вычислений достигнуты благодаря применению магнитных устройств. Скорость операций, емкость хранения, надежность вычислений значительно возросли после усовершенствования сердечников для запоминающих устройств. Описываются некоторые из новейших магнитных элементов, которые могут заменять ферритовые тороиды в запоминающих матрицах. Ферритовые материалы могут использоваться в виде широких полос с большим количеством отверстий. Это дает возможность значительно понизить стоимость приспособлений. Наличие большого количества отверстий в полосах позволяет повысить скорость операций, расширить рабочий температурный интервал и лучше сохранить информацию. Ферромагнитные материалы применяются в форме тонких пленок и изолированной проволоки. Пленки способны увеличить скорость операций при номинальных импульсах тока. Применение магнитных проволок в качестве запоминающих элементов изменяет технологию производства, расширяет температурные интервалы рабочего процесса и позволяет создавать новые устройства. Автор проводит сравнительную оценку эффективности различных типов устройств. Резюме автора

7055. Миллимикросекундная магнитная ячейка памяти и коммутации. Мейер (Millimicrosecond magnetic switching and storage element. Meier Donal A.), J. Appl. Phys., 1959, **30**, № 4, Suppl., 45—46 (англ.)

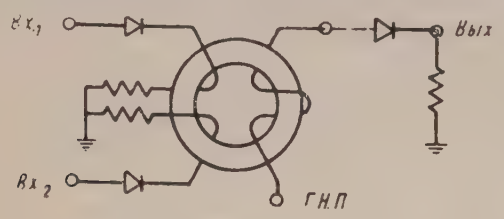
Изготовлена магнитная проволока со свойствами, подходящими для логического коммутирования и хранения информации в различных счетных устройствах. Магнитная часть ячейки состоит из стеклянной проволоки, покрытой серебром, на которое электролитически нанесен сплав Fe-Ni толщиной в несколько тысяч ангстрем. Ячейка состоит из двух обмоток для записи информации методом совпадения токов, стирающей обмотки и обмотки получения информации, состоящей из четырех разделенных слоев концентрических соленоидов, намотанных вокруг магнитной проволоки. Может быть создана матрица памяти, состоящая из многих таких соленоидов, нанизанных одновременно на одну магнитную проволоку. Скорость действия ячейки ~70 ммксек. Выходное напряжение, развивающееся в 10-витковой обмотке, составляет 200—500 *мв* и зависит от толщины сплава. Указанная проволока пригодна также в качестве многоканального логического переключателя. Показана удовлетворительная работа такого устройства в соединении с транзисторами в диапазоне 2—5 *мгц*. Машинное изготовление таких ячеек может сделать их достаточно дешевыми для применения в различных счетных устройствах. Резюме автора

7056. Считывание информации с тонких магнитных пленок методом совпадения токов. Окленд, Россинг (Coincident-current nondestructive readout from thin magnetic films. Oakland Lewis J., Rossing Thomas D.), J. Appl. Phys., 1959, **30**, № 4, Suppl., 54—55 (англ.)

Используя сердечники, которые состоят из напыленных в вакууме ферромагнитных пленок, можно сконструировать ячейку памяти, с которой возможно получать записанную информацию (без стирания последней) методом выбора совпадающих токов. Таким образом можно избавиться от внешних выборочных матриц, которые связаны с требованием считывания записи без стирания. Описанная ячейка памяти может быть сделана, по-видимому, недорогой, устойчивой и обладающей возможностью высокой скорости выдачи информации; особенно большими преимуществами обладает такая система в устройствах, в которых операции считывания происходят более часто, чем операции записи. Описаны три различные конструкции ячеек, которые удовлетворяют требованию считывания информации методом совпадения токов без стирания записи. Во всех конструкциях получено хорошее отношение сигнала к шуму. Резюме авторов

7057. Применение магнитных сердечников в управлении производственными процессами. Теллефсен, Алессио (Application of magnetic core logic to industrial controls. Tellefsen Harold, Alessio Sergio), IRE Nat. Convent. Rec., 1958, **6**, № 6, 283—293 (англ.)

Статья описывает принцип действия, экспериментальную разработку и применение магнитных элементов в логических системах для управления производственными процессами. Элементы должны устойчиво работать в течение длительного времени, быть легко заменяемыми, обеспечивать выполнение необходимых логических операций и максимальную простоту схем. Рабочая частота элементов зависит от быстродействия датчиков, применяемых в современных системах управления. Поэтому она может быть выбрана меньше 1 *мгц*. В качестве логической ячейки авторами был выбран магнитный усилитель, питаемый двухфазным синусоидальным напряжением с частотой 100 *кгц*. Наиболее подходящими в данном случае являются сердечники из 4-79 мо-пермаллоевой ленты. Ячейка (см. рис.)



представляет собой инвертор; сигнал на выходе есть, если в предшествующий полупериод на входе ($вх_1$) он отсутствовал, и наоборот, сигнала на выходе нет, если он был на входе. Ячейку можно использовать и в качестве повторяющего усилителя. Для этого на вход ($вх_1$) подается синусоидальное напряжение, противофазное напряжению питания выходной обмотки, а сигналы подаются на вход ($вх_2$). Сигнал на выходе ячейки будет в том случае, когда в предшествующий полупериод был сигнал на входе ($вх_2$). При рабочей частоте 100 *кгц* время переключения вторичной обмотки должно составлять 5 мксек., первичной 4 мксек., отношение сигнал/помеха=8/1.

В статье приводятся переходные характеристики последовательно соединенных шести элементов. Из кривых видно, что на входе допустимы помехи в 0,4 номинального значения сигнала и сигнал, ослабленный до 0,7 номинального значения. Эта особенность цепи имеет большое значение в случае асинхронного входа и влияния внешней среды. Как логический элемент, ячейка может выполнять операции И и ИЛИ. На двух инверторах можно построить динамический триггер, на трех — триггерный регистр со сдвигом, который может быть использован для промежуточного запоминания и для построения двоичных и десятичных счетчиков. В системе, состоящей из 300 магнитных элементов, ни один из них не вышел из строя в течение почти шести месяцев непрерывной работы. Блочность конструкции давала возможность взаимозаменять элементы. А. Ф. Мевис

7058. Импульсное сравнивающее устройство. Фишман-Арбел (A sampling comparator. Fischmann-Arbel Arieh), Electron. Engng, 1958, **30**, № 370, 685—689 (англ.)

Описывается сравнивающее устройство, сопоставляющее значения двух непрерывных напряжений в фиксированные моменты времени и его применение в кодирующем устройстве (дельта-модуляторе) и устройстве преобразования напряжения в число. Импульсное сравнивающее устройство выдает импульсы, пропорциональные разностям сравниваемых напряжений $V_1 - V_2$ и $V_2 - V_1$. Устройство состоит из предварительного усилителя, опираемого синхронизирующим генератором и выдающего импульсы, пропорциональные подведенным к его сеткам напряжениям, и дифференциального усилителя, вырабатывающего сигналы, пропорциональные $V_1 - V_2$ и $V_2 - V_1$. Приводится описание осуществленного кодирующего устройства, выполненного на базе использования упомянутого сравнивающего устройства. Кодирующее устройство, осуществляющее дельта-кодирование непрерывного напряжения, собирается по блок-схеме (рис. 1). Кодирующее устройство работает с обратной связью. Схема исполняет следующие функции: а) закодированный сигнал декодируется интегратором, б) декодированное напряжение сравнивается на импульсном сравнивающем устройстве с подведенным напряжением, в) устройство выдает импульсные сигналы в соответствии с результатами сравнения, а именно: отсутствие импульса на выходе в момент, определяемый тактовым генератором, означает уменьшение входного сигнала на некоторую величину, а наличие импульса означает нарастание входного сигнала на ту же величину. Следует отметить, что постоянное входное напряжение при этом превращается в серию импульсов с частотой, равной половине тактовой частоты. Этот импульсный код, будучи декодирован, даст линейно изменяющееся пилообразное напряжение, осциллирующее вокруг некоторого среднего значения.

Работу устройств рассмотрим по его блок-схеме. Импульсное сравнивающее устройство сравнивает входное напряжение с напряжением на выходе декодирующей части схемы (интегратора). При поступлении импульса от синхронизатора сравнивающее устройство выдает на кипп-реле 1 и кипп-реле 2 импульсы напряжения, пропорциональные соответственно $V_2 - V_1$ и $V_1 - V_2$. Кипп-реле 1 срабатывает, если $V_2 - V_1 \geqslant \frac{1}{2} q$. Кипп-реле 2 срабатывает, если $V_1 - V_2 \geqslant \frac{1}{2} q$, где q — некоторое пороговое значение. Если $|V_1 - V_2| < \frac{1}{2} q$, то оба кипп-реле не срабатывают. При этом сигналы синхронизатора попадают через вентили V_{6B} и V_{6A} на входы

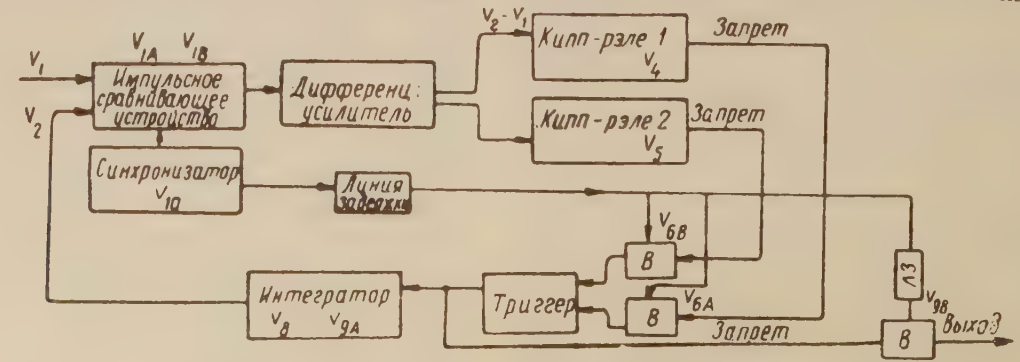


Рис. 1

К реф. 7058

триггера и перекидывают его из одного состояния в другое. Одно из состояний устойчивости триггера соответствует подаче на импульсно-потенциальный вентиль V_{9B} запирающего напряжения. Таким образом, через V_{9B} проходит каждый второй импульс синхронизатора. Если $(V_2 - V_1) \geqslant \frac{1}{2} q$, то срабатывает кипп-реле V_4 и запирает вентиль V_{6A}. Поэтому соответствующий импульс синхронизатора, задержанный линией задержки, пройдет только через вентиль V_{6B}. При этом триггер $V_{7B}V_{7A}$ станет в положение, соответствующее запиранию V_{9B} и импульс синхронизатора на выход не проходит. Если $(V_1 - V_2) \geqslant \frac{1}{2} q$, то срабатывает кипп-реле 2 и закрывает вентиль V_{6B}. Синхроимпульсы проходят только через вентиль V_{6A} и ставят триггер в положение открывания V_{9B}. Через последний проходят импульсы с частотой синхронизатора. Во всех этих случаях импульсный код на выходе соответствует условиям дельта-модуляции. С одного из анодов триггера $V_{7B}V_{7A}$ напряжение подается на вход декодирующего интегратора. Таким образом, если $(V_1 - V_2) \geqslant \frac{1}{2} q$, то на выход проходит импульс синхрогенератора, а триггер $V_{7B}V_{7A}$ через V_{6A} ставится в положение, при котором интегратор будет создавать на своем выходе линейно растущее напряжение V_2 (при обратном перебросе триггера V_2 — линейно убывающее). Отмечается, что было выполнено кодирующее устройство с частотой работы синхронизатора в 50 *кгц*. Пороговое значение модулятора 1,5 *в*. Максимально допустимая скорость изменения входного напряжения 1,5 *в* за 20 мксек.

Приводится еще одна схема для дельта-кодирования, которая выдает импульс одной полярности при нарастании входного напряжения на величину q и импульс другой полярности при спаде входного напряжения на ту же величину. Описывается также полная принципиальная схема устройства преобразования напряжения в число (рис. 2). В зависимости от результата сравнения исследуемого напряжения X с напряжением X', соответствующим числу, стоящему в реверсивном счетчике, сравнивающее устройство открывает либо вентили сложения, либо вентили вычитания, и генератор импульсов пополняет или убавляет число, стоящее в счетчике. Преобразователь представляет собой суммирующий усилитель, на который воздействуют с соответствующими весами напряжения с триггеров реверсивного счетчика. Дискретизатор был построен на 6 разрядов. Вес младшего разряда 1,6 *в*. Диапазон измеряемых напряжений ± 50 *в*. Библ. 7 назв. Г. Г. Рабинович

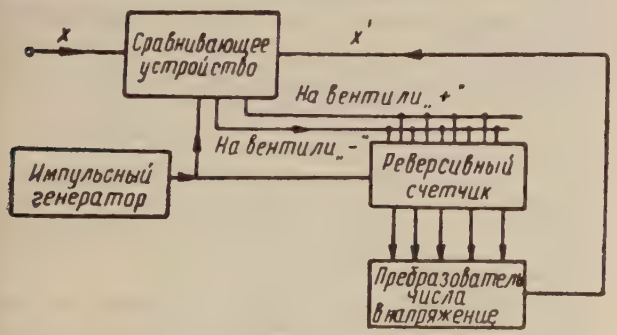


Рис. 2

7059. Технология цифровых машин. Перре (Technologie des calculatrices arithmétiques. Perret René), Electro-techn., hydraul., radio, 1958, № 235, 11—16 (франц.)

Перечисляются основные требования, предъявляемые к элементам, на которых строятся вычислительные машины, и даются характеристики различных элементов, применяемых в настоящее время, в частности запоминающих. Отмечается, что сейчас вычислительная техника ставит перед исследователями задачу нахождения путей для уменьшения размеров и повышения одноро ности элементов магнитной памяти, улучшения петли гистерезиса магнитных материалов. Х. А. Атакшиев

7060. Мелкие партии изделий могут принести доход, если Вы будете изобретательны (Short runs can pay if you use ingenuity), Manufact. and Industr. Engng, 1958, **36**, № 4, 8—11 (англ.)

Канадская фирма «Computing Devices of Canada Ltd», созданная в последние годы, занимается разработкой и созданием электромеханических и электронных вычислительных устройств для гражданских и военных нужд. Выпускаемая продукция отличается высоким качеством изготовления, что рассматривается как результат высокой производственной культуры на заводе фирмы. Завод занимает площадь 75 тыс. кв. футов, из них приблизительно одна шестая часть отводится под административные и хозяйственные помещения, остальная площадь — под механический цех, сборочный цех электронного оборудования, склады и т. д. Готовые детали на складе хранятся завернутыми в папиросную бумагу, для хранения малых партий используются пластмассовые коробки. Специальные сотрудники занимаются изготовлением фотографий приборов (в трех-четырех видах и более) и ответственны за написание, иллюстрирование и напечатание инструкций и руководств по ремонту приборов, выпущенных фирмой. Производственные помещения снабжаются кондиционированным воздухом, освещаются люминесцентными лампами и здесь поддерживается безукоризненная чистота, а в сборочном цехе электронного оборудования имеются фильтры, препятствующие проникновению пыли. Электронное оборудование, насчитывающее до 40 наименований, выпускается мелкими партиями. С целью повышения производительности труда при этом виде продукции используются круглые столы, а не традиционная конвейерная линия. Монтируемые блоки находятся перед рабочими. При монтаже крупных приборов, где операции распределяются между разными техниками, применяется маленькая тележка, которая движется вокруг стола по колее. Это нововведение позволяет отказаться от дорогостоящего оборудования. В. Е. Кравченко

7061. Вычислительная машина, выполняющая построение конформных отображений для степенного полинома. Брик В. А., Гинзбург С. А., Автоматика и телемеханика, 1958, **19**, № 7, 674—683 (рез. англ.)

Описывается вычислительная машина непрерывного действия, служащая для исследования степенных полиномов до 10-го порядка с действительными и комплексными коэффициентами. Комплексные числа представляются синусоидальным напряжением постоянной частоты (50 *гц*). Основными практическими задачами, решаемыми на машине, являются: определение корней полинома и построение годографа Михайлова. Машина изготовлена в ЦЛЭМ Мосэнерго и используется для решения задач, связанных с устойчивостью работы энергосистем. Приводятся блок-схема, электрическая схема и фотография машины. В. Л. Зданкезич

7062. Электронные моделирующие устройства на переменном токе. Йокояма Гиити, Ёкогава гихо, Yokogawa Techn. Rept, 1957, № 6, 98—106 (японск.)

Краткое описание японских электронных моделирующих устройств. Приведены данные устройств КОМ-11 и КОМ-12 выпуска 1957 г.

7063. Один из способов воспроизведения функции двух независимых переменных. Палей А. В., Пустыльников В. С., Изв. высш. учебн. заведений. Приборостроение, 1958, № 2, 36—43

Описывается электрический коноид, схема которого позволяет моделировать в виде электрического напряжения любые функции двух независимых переменных. Преимущества предлагаемой схемы особенно сказываются при воспроизведении пересекающихся кривых и их семейств, значительно отличающихся друг от друга. Приводятся формулы для расчета элементов схемы и вычисления ошибки воспроизведения. Дается методика регулировки. К достоинствам схемы относится ее простота. Использование ее для тренажа летчиков показало, что она обеспечивает требуемую точность и стабильность воспроизведения функции и надежна в эксплуатации. Приводится фото макета. В. Л. Зданкевич

7064. Сервомеханизмы в вычислительных машинах непрерывного действия. Жандрё (Les servomécanismes dans les calculateurs analogiques. Gendreu R.), Ann. radioélectr., 1957, 12, № 47, 45—61 (франц.; рез. англ.)

В статье дана теория проектирования сервомеханизмов для высокочастотных вычислительных машин непрерывного действия. В первой части на базе классического примера передачи угла сельсина даются практически важные рекомендации, позволяющие быстро определить влияние сервомеханизма на точность вычислений. Во второй части эти рекомендации используются для анализа работы дифференцирующего и интегрирующего блоков. В. В. Васманов

7065. Получение частотной характеристики из данных переходного процесса посредством машинного вычисления. Рейнолдс (Get frequency response from transient data by machine computing. Reynolds J. B., Jr.), Control Engng, 1955, 2, № 10, 60—63 (англ.)

Описываются два моделирующих устройства для получения частотных характеристик из данных переходного процесса, разработанные в Научно-исследовательской лаборатории Дюпона и предназначенные для использования в химической промышленности. Принцип получения частотной характеристики основан на применении преобразования Фурье к импульсной переходной функции исследуемой системы, регистрируемой предварительно на магнитной ленте. Применение магнитной записи позволяет в широких пределах изменять масштаб времени, что в свою очередь дает возможность определять частотные характеристики систем с постоянной времени от нескольких миллисекунд до нескольких часов. Первое вычислительное устройство состоит из модулятора, множительного устройства с двухканальным выходом, двух усилителей, двух фазовых детекторов, двух RC-интеграторов, синхронного мотора, двух линейных потенциометров, тахогенератора, сервомотора, сервоусилителя, коммутирующего устройства, двухканального самописца и устройства магнитной записи и воспроизведения. Поступающий с магнитной ленты сигнал $P_0(t)$ попадает сначала в модулятор, а затем на статорную обмотку электромеханического множительного устройства, роторы которого, находящиеся в квадратуре, приводятся во вращение с частотой ω от сервомотора. Выходные напряжения, равные $P_0(t)\cos\omega t$ и $P_0(t)\sin\omega t$, усиливаются по двум раздельным каналам и через фазовые детекторы поступают на интеграторы, постоянная времени которых $RC = 400$ сек. На выходе интеграторов вырабатываются напряжения, пропорциональные действительной и мнимой частотным характеристикам:

$$R_0(\omega) = \int_0^T P_0(t)\cos\omega t\,dt \text{ и } I_0(\omega) = \int_0^T P_0(t)\sin\omega t dt.$$

В конце периода интегрирования ($T = 20$ сек.) коммутирующее устройство подключает выходы интеграторов к двухканальному самописцу, строящему графики R_0 и I_0 в функции частоты ω. Сканирование частоты ω в диапазоне от 1 до 1000 ведется автоматически через каждые 20 сек. Линейность скорости сервомотора обеспечивается системой регулирования. Скорость работы устройства 100 точек за 30 мин. Во втором вычислительном устройстве вместо RC-интеграторов применены более точные электромеханические интеграторы. Введено второе множительное устройство (аналогичное первому) и две следящие системы с потенциометрическими выходами, выдающими непосредственно амплитудную $|P_0(j\omega)| = \sqrt{R_0^2(\omega) + I_0^2(\omega)}$ и фазовую $\Psi(\omega) = \operatorname{arctg}\frac{I_0(\omega)}{R_0(\omega)}$ частотные характеристики системы.

Г. М. Грязнов

7066. Применение z-преобразования к анализу систем управления с вычислительными машинами. Кузин Л. Т., В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 46—68

Применяется известное в литературе дискретное преобразование Лапласа с заменой $e^{+sT} = z$ для исследования замкнутых систем регулирования, включающих в себя цифровые вычислительные машины и преобразователи непрерывно меняющихся величин в цифровые и обратно. Рассматривается вопрос синтеза дискретных систем управления аналогично методам Винера в теории непрерывных систем и вопрос реализации оптимальной передаточной функции. Приводится таблица z-преобразований. В. П. Парамонов

7067. Некоторые замечания о точности моделирующих устройств. Ремон (Quelques remarques sur la précision des calculateurs analogiques. Raymond F. H.), Actes. Journées internat. calcul analog., Bruxelles, 1955. Bruxelles, 1956, 239—244 (франц.; рез. англ.)
См. РЖЭ, 1957, № 15, 30465.

7068. Постановка и решение задачи с помощью расчетного стола. Фогель (Problemstellung und Lösung mit einer Tischrechenmaschine. Vogel W.), Mitt. Verein. schweiz. Versicherungsmathematiker, 1957, 57, № 2, 286—292 (нем.)

7069. Автоматическое моделирующее устройство для исследования полиномов и отыскания положения корней. Левин, Мейссингер (An automatic analog computer method for solving polynomials and finding root loci. Levine Leon, Meissinger Hans F.), IRE Nat. Convent. Rec., 1957, 5, № 4, 164—172 (англ.)
См. РЖЭ, 1959, № 3, 5671.

7070. Имитация синхронной машины при помощи моделирующего устройства. Кородлер (Simulation einer Synchronmaschine mit einer Analogierechenmaschine. Corodler P.), Brown Boveri Mitt., 1959, 46, № 5, 299—306 (нем.)

7071. Моделирующие устройства и цифровые вычислительные машины в промышленности Франции — производстве, передаче и распределении электроэнергии. Кейен, Картерон (Analog and digital computers in the French electric power production, transmission, and distribution industry. Cahen François M., Carteron Jean M.), Power Appar. and Systems, 1958, № 34, 1533—1536. Discuss., 1536—1538 (англ.)

7072. Моделирующее устройство, демонстрируемое в скандинавских странах. (Analogue computer demonstrated in Scandinavia), Brit. Engng, 1958, 40, № 11, 365 (англ.)

7073. Электронно-вычислительная группа ИБМ-628-421 (Groupe calculateur électronique IBM 628-421), Rev. mécanogr., 1958, 12, № 135, 448—453 (франц.)

Описываются коммутационная доска электронной вычислительной машины ИБМ-628 и операции, которые он производит. Даются правила коммутации программы. Электронный вычислитель ИБМ-628 работает в десятичной системе. Ячейки памяти на восемь десятичных и два знаковых разряда могут хранить как одно восьмизначное число, так и два числа: трехзначное и пятизначное с их знаками. ИБМ-628 — одноадресная машина, может работать как самостоятельно, так и совместно с табулятором и перфоратором. ИБМ-628 может производить следующие действия: сложение; вычитание; сложение и вычитание с предварительной очисткой накопителя; перенос числа из накопителя в память; очистка накопителя; сдвиг; прибавление абсолютной величины; умножение; деление; безусловную передачу управления; условный останов; условную передачу управления при положительном или отрицательном состоянии накопителя, при состоянии накопителя, когда, начиная с определенного разряда, все разряды нули или не все разряды нули, при переполнении. Х. А. Атакишиев

7074. Проблема сложения для табулятора ИБМ-420. Люкон (Problème de multiplication sur tabulatrice I. B. M. type 420. Lucon M.), Rev. mécanogr., 1958, 12, № 125, 23—30 (франц.)

7075. Бухгалтерская вычислительная машина РС-65 фирмы «Машин отоматик модерн» (La machine de comptabilité R. S. 65 des Machines automatiques modernes), Annuaire comptabil. et mécanogr., 1957 (франц.)

См. также РЖМат, 1960, 4660.

7076. Новые способы применения шаровых устройств в вычислительной технике. Эрисман (Kugelgetriebe — neue Anwendungen in Rechen- und Regeltechnik. Erismann Th.), Z. angew. Math. und Mech., 1956, 36, № 7-8, 276—278 (нем.)

Дается краткий обзор классических применений шаровых интегрирующих и дифференцирующих устройств. Автор предлагает несколько новых способов применения шаровых устройств — даны схемы и описание способа увеличения малого момента вращения механическим путем, с сохранением точности вычислений, показана возможность при помощи шарового дифференциатора определять производные первой и второй степени, указано на ряд возможностей, мало использованных на практике, — применение устройства как фильтра колебаний, сумматора и т. д. А. Шноре

7077. Синтез электрических цепей на цифровых вычислительных машинах. Лейкнер (Network synthesis using a digital computer. Leichner Gene H.), Proc. Nat. Electronics Conf., 1956 (1957), 12, 830—838 (англ.)

Рассматривается возможность использования вычислительной машины ИЛЛИАК для синтеза пассивных четырехполюсников; включающих сопротивления, конденсаторы и индукции. Указываются следующие возникающие при этом задачи: 1) вычисление корней полиномов высоких степеней; 2) решение систем линейных алгебраических уравнений с большим числом неизвестных; 3) аппроксимация функций; 4) вычисление экстремумов функций многих переменных; 5) нахождение решений, когда оно не единственно.

На примерах объясняются алгорифмы синтеза цепей, указывается на возможность использования библиотеки программ при реализации алгорифмов. А. А. Красилов

7078. Машины, которые играют в игры. Шеннон (Game playing machines. Shannon C. E.), J. Franklin Inst., 1955, 260, № 6, 447—453 (англ.)

Указывается, что программировать для вычислительных машин можно и не цифровые задачи. Приводится несколько примеров созданных в прошлом автоматов, играющих в игры. Современные машины (автоматы) для игр могут быть разделены на три главных типа:

1. Машины, которые играют по программе, подвергающейся полному анализу. Такова, в частности, игра в «Ним». Первая машина для игры в «Ним» была показана на всемирной выставке в Нью-Йорке в 1939 г.

2. Машины, играющие в те игры, для которых не известен общий анализ, но для которых имеют силу некоторые общие принципы игры или какие-то правила стратегии. Сюда относятся такие игры, как шашки, шахматы, бридж или покер.

3. Машины, которые «заучивают» свои собственные принципы игры. В программу вводятся лишь правила игры и желаемая цель игры, а также общие принципы для улучшения игры путем использования своего собственного опыта машиной. Хагельбаргер создал машину, которая играет с человеком в орлянку. Машина Хагельбаргера играет в эту игру, заменяя световыми сигналами стороны монеты. Машины имеет «память», в которой накопляются результаты игры против ее оппонента. Когда машина играет, она анализирует результаты игры с целью найти психологические тенденции в игре своего оппонента. Например, один человек может иметь привычку, если он выиграл дважды подряд, перевернуть монету с орла на решку. Другой индивидуум может иметь противоположную привычку. Машина выясняет эти тенденции и использует результаты этого «выяснения» в будущей игре. Предполагается, что ее противник будет и в будущем придерживаться привычек, которым он следовал раньше, и машина будет поэтому выигрывать. Машина, решающая задачу лабиринта, является другим примером самообучающейся машины.

Н. Н. Поснов

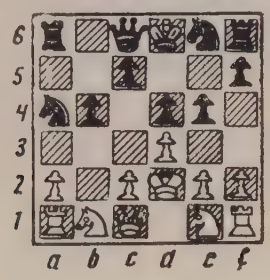
7079. Опыты игры в шахматы с помощью электронных вычислительных машин. Стейн, Юлам (Experiments in chess on electronic computing machines. Stein P., Ulam S.), Computers and Automat., 1957, 6, № 9, 14—17, 20, 30 (англ.)

Приводятся соображения, показывающие возможность использования математических машин для игры в шахматы. Указывается, что возможности машины ограничены тем, что для просмотра всех вариантов позиций на 3—4 хода вперед необходимо перебрать огромное число комбинаций, что требует очень много времени. С другой стороны, если в запоминающее устройство машины поместить наиболее характерные позиции, встречающиеся на практике, и ряд правил, позволяющих оценивать эти позиции, то потребуется запоминающее устройство практически не осуществимой емкости. Описываются опыты игры в шахматы на математической машине МАНИАК I (Maniac I), выполняющей 10 тыс. операций в 1 сек. Машина проводила всю игру с начала до конца. Правила игры в шахматы были несколько изменены: на доске 6×6 размещались все фигуры, за исключением слонов и соответствующих пешек, 1-й ход пешкой мог быть сделан только на одно поле вперед, при игре не использовалась рокировка. В остальном правила оставались без изменений. Во время игры машина при каждом ходе просматривала все возможные комбинации на два хода вперед, оценивая каждую позицию по материальному преимуществу и свободе перемещения фигур (по количеству полей доски, на которые, согласно правилам, могут быть передвинуты фигуры). В качестве примеров приводятся три партии, в которых машина МАНИАК I играла 1) с такой же машиной МАНИАК I, 2) с опытным шахматистом, 3) с новичком. В таблице приводится партия, сыгранная машиной с новичком:

МАНИАК I (белые)	Новичок (черные)
1. d2 — d3	b5 — b4

2. Ke1 — f3 d5 — d4
3. b2 — b3 e5 — e4
4. Kf3 — e1 a5 — a4
5. b3 : a4 Kb6 : a4
6. Kpd1 — d2? Ka4 — c3?

Анализ показывает, что 6. ... c5 — c4 ведет к выигрышу черных: если белые берут пешку ходом 7. d3 : e4, то черные играют 7. ... Фc6 : c4 потом 8. ... Ka4—c3, после чего легко добиваются выигрыша. Если же бе-



лые не берут пешку, то черные после хода 7. ...c4—c3+ быстро решают партию в свою пользу. 6-й ход белых, конечно, очень слабый, но черные не воспользовались этим.

7. Kb1 : c3 в 4 : c3+
7. ... d4 : c3 значительно лучше.
8. Kpd2 — d1 f5 — f4
9. a2 — a3 Ла6 — b6
10. a3 — a4 Лb6 — a6
11. a4 — a5 Kpd6 — d5
12. Фc1 — a3 Фc6 — b5
13. Фa3 — a2+ Kpd5 — e5
14. Ла1 — b1 Ла6 : a5
15. Лb1 : b5 Ла5 : a2
16. Лb5 — b1 Ла2 — a5

Игра белых на ферзевом фланге закончилась потерей пешки но тем не менее их план производит лучшее впечатление, чем бесцельные маневры черных. Теперь белые начинают активные действия на королевском фланге.

17. f2 — f3 Ла5 — a4?

Черные пренебрегают опасностью. Следовало играть 17. ... e4 — e3.

18. f3 : e4 c5 — c4
19. Ke1 — f3+ Kpe5 — d6
20. e4 — e5+ Kpd6 — d5
21. e5 : f6(Ф) Ke6 — c5
22. Фf6 : d4+ Kpd5 — c6
23. Kf3 — e5×

Оценивая партию в целом, можно сказать, что заключительная атака была проведена машиной очень энергично.

Программы, использованные в описанных опытах, содержали простейшие правила игры в шахматы, поэтому игра машины выглядела довольно примитивно. Предполагается составление и исследование программ, позволяющих более подробно оценивать различные позиции.

А. Н. Чуйкин

7080. Система автоматического распознавания фигур. Гримсдейл, Самнер, Тьюнис, Килберн (A system for the automatic recognition of patterns. Grimsdale R. L., Sumner F. H., Tunis C. J., Kilburn T.), Proc. Instn. Electr. Engrs, 1959, B106, № 26, 210—221 (англ.)

Новый метод распознавания фигур состоит в том, что двумерной фигуре присваивается одномерная характеристика. Одномерная характеристика представляет собой независящее от размеров и ориентации описание очертаний фигуры в виде машинного кода. Эта характеристика сопоставляется с заранее введенными в запоминающее устройство вычислительной машины характеристиками эталонных фигур. Если в результате анализа обнаруживается хотя и не идентичность, но достаточное, в пределах допусков, сходство с эталоном, машина печатает название фигуры, угол ее поворота относительно вертикальной оси и степень достоверности. Если машиной воспринята и обследована новая фигура, машина сигнализирует неспособность ее распознать. Однако, если присвоить этой фигуре название, она может стать одной из эталонных фигур. Подобное устройство было построено и работало с вычислительной машиной МАРК I фирмы «Ферранти». Программа анализа фигуры состоит примерно из 4000 команд (программа зависит от количества эталонов и сложности их). В данном случае в качестве эталонов в машину были введены написанные от руки заглавные буквы алфавита и цифры. Среднее время анализа одной фигуры на вычислительной машине со средним быстродействием составляет примерно 60 сек. Метод может быть применен для анализа пространственных фигур любой формы, равно как и для ввода в машину рукописей. Для ввода в машину используется специальное устройство с точечным растром, бегающим лучом и фотоэлементом, связанное с вычислительной машиной.

Ц. А. Шенфельд

7081. Автоматическое производство литературных аннотаций. Лун (The automatic creation of literature abstracts. Luhn H. P.), IBM J. Res. and Developm., 1958, 2, № 2, 159—165 (англ.)

Описывается метод составления аннотаций с использованием машины ИБМ-704. Аннотируемый текст наносится на перфокарты и затем вводится в машину. Программа, введенная в машину, выделяет те предложения в тексте, которые являются наиболее существенными. Фактор существенности предложения устанавливается анализом отдельных слов, входящих в это предложение. Предполагается, что повторяемость слов в статье является мерой для оценки существенности слов. Далее предполагается, что относительная позиция слов внутри предложения, являясь оценкой для существенности, позволяет определять существенность предложений. Машина составляет таблицу повторяемости слов (варианты differ, differentiate, difference,... рассматриваются как идентичные понятия). Общие слова такие, как местоимения, предлоги и артикли выбрасываются из таблицы. Приведены два примера. Сообщается, что если ни одно из предложений в статье не отвечает требованию существенности, машина отклоняет аннотирование статьи. Автоаннотации могут быть использованы также при переводах иностранной литературы. Чтобы облегчить перевод и избежать необходимости переводить всю статью, сначала может быть сделана автоаннотация соответствующей длины на языке оригинала, а затем уже переводиться будет автоаннотация.

Н. Н. Поснов

7082. Использование вычислительных машин для механизированного поиска литературы в библиотеках по исследованию операций. Койл, Фостер (Use of computers for mechanized literature searching in operations-research libraries. Coile Russell, Foster Bada), Operat. Res., 1958, 6, № 3, 434—438 (англ.)

Рассматривается возможность использования счетно-аналитических машин фирмы «ИБМ» для получения необходимых данных в библиотеках. Предполагается, что

в библиотеке имеется две системы перфокарт. Первая система — титульных (заглавных) карт. На этих картах нанесены следующие сведения: категория сообщения, занесенного в каталог, номер, занесенный в библиотечный каталог, издательская фирма, год публикации, библиотечная полка, заглавие. Приводится примерный список категорий сообщения для военно-морских исследовательских библиотек. Вторая система — поисковых карт. На этих картах нанесены дополнительные (основные) сведения о книге (статье). После поступления заказа на отбор сведений по той или иной теме начинается сортировка на машине ИБМ-101 поисковых карт. Затем по отобранным поисковым картам отбираются титульные карты и все находящиеся на них сведения печатаются с помощью табулятора ИБМ-407. Н. Н. Поснов

7083. Программа для механического перевода. Клив (A type of program for mechanical translation. Cleave J. P.), Mech. Translat., 1957, **4**, № 3, 54—58 (англ.)

Описывается программа для перевода на машине APEXC с французского языка на английский с использованием ограниченного словаря. Работа проделана автором совместно с Бутом (A. D. Booth) и Брэндвудом (L. Brandwood). Приводятся вкратце характеристики памяти машины APEXC и способ записи чисел и команд в ней. Программа делится на три части в соответствии с тремя этапами работы. Первый этап — поиск в словаре, в результате которого основам и окончаниям французских слов сопоставляется по два эквивалента, первый из которых содержит данные, необходимые для следующего этапа работы, а второй является переводом на английский язык. Второй этап — анализ, путем рассмотрения контекста уточняются переводы слов и при помощи словаря структур устанавливается в случае надобности новый порядок слов. Эта часть программы работает не со словами, а только с их первыми эквивалентами, что проще, причем последние организованы так, что позволяют легко дополнять и изменять программу. Из-за недостаточного объема памяти этот второй этап не осуществлен в машине, в которой после первого этапа следует третий. Третий этап — печать перевода, вторые эквиваленты, т. е. переводы, печатаются в том порядке, в котором после перестановки стоят первые эквиваленты. О. С. Кулагина

7084. Управляющие устройства завтрашнего дня смогут обучаться на основании своего опыта. Паск (Tomorrow's control systems can learn from experience. Pask Gordon), Automat. Progr., 1959, **4**, № 2, 43—45, 57 (англ.)

В общих чертах рассмотрены вопросы, обсуждавшиеся на втором конгрессе Международной кибернетической ассоциации в Намюре и конференции Национальных физических лабораторий (N. P. L.) в Теддингтоне по вопросу механизации процессов мышления, проходивших в сентябре и ноябре 1958 г.: 1) социальный и экономический эффект автоматизации; 2) управление комплексными системами, 3) линейное и автоматическое программирование, 4) автокодирующие системы, 5) самоорганизующиеся и условно вероятностные обучающиеся машины, 6) машины типа «Персептрон», 7) биологические вычислительные машины. Отмечается необходимость, наряду с разработкой сложных самоорганизующихся систем, уделить большее внимание менее эффективным, но более устойчивым простым системам. Приведены краткие сведения об авторе статьи и помещен перечень 25 докладов, опубликованных вторым конгрессом Международной кибернетической ассоциации в Намюре. М. И. Гринев

7085. Кибернетика машин. Куффиньяль (La cybernétique des machines. Couffignal Louis), Rev. S. E. T., 1958, **8**, № 57-58, 1—11 (франц.)

Общие соображения об автоматизации производства. В связи с автоматизацией производства возникают новые проблемы по организации труда. Без существенных изменений в социальном и экономическом положении, в длине рабочего дня и распределении продукции может возникнуть безработица (автор рассматривает капиталистический строй — прим. реф.). Поэтому автоматизация должна развиваться не анархично, а по национальному и даже интернациональному плану. Ориентировать автоматизацию на применение роботов не имеет смысла. Роботы — машины, копирующие человеческие движения. Эти движения очень сложны, поэтому и конструкция роботов очень сложна, между тем сложные манипуляции, совершаемые человеком при работе, можно заменить более простыми, экономичными и технически осуществимыми движениями машины. Х. А. Атакишиев

7086. Большая вычислительная машина Баббиджа (Mr. Babbage's great calculating engine), Manag. and Business Automat., 1959, **1**, № 4, 28—29 (англ.)

Краткая историческая заметка о первых вычислительных машинах с программным управлением, предложенных Чарльзом Баббиджем в XIX в. Воспроизведен один из чертежей Баббиджа.

7087. Электронные машины в лаборатории машинной и вычислительной математики. Пентковский М. В., ҚазССР Ғылым Акад. хабаршысы, Вестн. АН КазССР, 1959, № 1, 101

7088. Электронный мозг и будущее. Дельпьер (Les cerveaux électroniques et la vie de demain. Delpierre Michel), Electronique, 1959, № 146, 7—12 (франц.)

Популярная статья.

7089. Информация в автоматизации. Соваж (L'information dans l'automatisme. Sauvage André), Automatisme, 1957, **2**, № 12, 439—446 (франц.)

Популярная статья.

7090. Начальные сведения о решении задач на электронных вычислительных машинах. Ляпунов А. А., Шестопал Г. А. (Начални сведения за решаването на задачи с електронни сметачни машини. Ляпунов А. А., Шестопал Г. А.), Физ.-матем. списание, 1958, **1**, № 3-4, 136—153 (болг.)

Перевод из Матем. просвещения (РЖМат, 1958, 9363).

7091. Основное об электронных вычислительных машинах с программным управлением. Дибалль (Wissenswertes über programmgesteuerte elektronische Rechengeräte. Dieball Hans), Maschinenmarkt, 1958, **64**, № 103-104, 43—45 (нем.)

Популярная статья.

7092 К. Арифметические операции на цифровых вычислительных машинах. Ричардс Р. К., Перев. с англ. М., Изд-во ин. лит., 1957, 424 стр., илл., 20 р. 40 к.

Изложены основные вопросы логики, кодирования и программирования арифметических действий на электронных цифровых вычислительных машинах, а также краткое описание структуры последних. Книга содержит 12 глав. В гл. 1 изложены принципы символического изображения величин: целых, дробных, отрицательных, комплексных. Кратко освещена идея работы вычислительной машины с плавающей запятой. В гл. 2 изложены основные законы булевой алгебры и применение их к компонентам вычислительных машин: диодам, управляемым лампам, реле и др. в простейших и мостиковых схемах типа И, ИЛИ, ЗАПРЕТ. В гл. 3 рассмотрены в общем виде переключательные цепи в символах булевой алгебры. Описаны методы преобразования логических функций, в частности отыскание лишних членов в булевых выражениях, разделение переменных, разложение на множители, преобразование выражений вида И—ИЛИ к виду ИЛИ—И. Особо рассмотрены переключательные цепи со многими выходами типа матриц или дешифраторов. В гл. 4 изложены способы

выполнения операций сложения и вычитания при представлении чисел в двоичной системе счисления в параллельной машине. Описаны логические схемы полусумматоров и сумматоров накапливающего и комбинационного типов. Приведено много вариантов логических схем. Затронут вопрос сквозного или одновременного переноса. Изложены принципы построения вычитающих устройств, а также суммирующе-вычитающих устройств при работе с дополнительными и обратными кодами. Отдельно рассмотрена возможность выполнения операций сложения и вычитания в машинах последовательного действия. В гл. 5 изложены способы выполнения операций умножения и деления в двоичной системе счисления в параллельной и последовательной машинах. Описаны логические схемы множительных устройств комбинационного и накапливающего типов. Описаны схемы и работа сдвиговых регистров с элементами статического и динамического типа. Рассмотрены возможности ускорения работы множительного устройства параллельного типа, в частности метод умножения больше, чем на один двоичный разряд за один такт. Описаны особенности выполнения умножения при наличии отрицательных сомножителей. Кратко описаны трудности, специфичные для операции деления, и способы их преодоления, а также проблема округления как при делении, так и при умножении. В гл. 6 описаны различные десятичные коды: взвешенные и невзвешенные 4-разрядные коды, коды с пятью или более разрядами, коды с обнаружением и исправлением ошибки. Описаны методы контроля по избыточной информации и при помощи контрольных сумм. В гл. 7 изложены методы осуществления счета в машине как для двоичной, так и для десятичной систем счисления, методы построения и логические схемы счетчиков. Отдельно описаны кольцевые счетчики и счетчики с обратными связями. В гл. 8 изложены методы выполнения сложения и вычитания в десятичной системе при использовании кода 8421, 5421, когда с избытком 3; контроль сложения при использовании избыточного разряда и при использовании кода с обнаружением ошибки; сложение при помощи десятичных счетчиков; параллельно-последовательное и последовательно-параллельное выполнение сложения. Кратко описано вычитание в десятичной машине. В гл. 9 описаны особенности выполнения умножения и деления в десятичных машинах. Рассмотрены: умножение при помощи последовательного сложения, использование вычитания при умножении, умножение на 2, на 5, на N, использование счетчиков при умножении, умножение с обнаружением ошибок, умножение при обработке цифр в обратной последовательности, последовательно-параллельное умножение, умножение с помощью «деления пополам». Описаны различные методы деления: деление чисел, сводимое к «делению пополам», деление путем использования пробных цифр частного, три варианта деления при помощи итераций. Кратко рассмотрены вопросы округления при десятичном умножении и делении. В гл. 10 описаны прочие операции, выполняемые на машине, в частности: преобразование кода из десятичной системы в двоичную и наоборот, сравнение, извлечение квадратного корня несколькими методами, сортировка (расположение чисел в возрастающей последовательности), проверка арифметических действий по модулю 9, нахождение тригонометрических и других функций, интегрирование и дифференцирование, преобразование из обычного двоичного в рефлексный двоичный код и обратно. Описаны логическая схема цифрового дифференциального анализатора и принципы его работы. Гл. 11 посвящена описанию структуры вычислительных машин и управления ими. Кратко изложена история создания вычислительных машин. Описаны машины с внешним программированием на перфокартах или перфоленте и с программами, набираемыми на коммутационных досках, а также запоминающие устройства на магнитных сердечниках, на электронно-лучевых трубках, на ультразвуковых линиях задержки, на магнитных барабанах и магнитных лентах. Рассмотрены особенности применения запоминающих устройств для машины с хранимой программой и структура таких машин. Отдельно описаны структуры устройства управления машиной. Кратко рассмотрены особенности: синхронных и асинхронных машин, одноадресных и многоадресных машин, импульсных и потенциальных систем, специализированных машин, устройств ввода-вывода. Затронута проблема обнаружения и устранения ошибок. Гл. 12 посвящена программированию вычислительных машин. На основе принятой типовой системы команд рассмотрены основные технические приемы программирования на примере несложной конкретной задачи. Составлена элементарная логическая программа, указано значение циклов, возможность изменения команд, использования библиотеки подпрограмм. Описаны различные типы программ: интерпретативные, комплектующие, отладочные, диагностические программы и затронуты некоторые вопросы автоматического программирования. В. К. Зейденберг

7093 К. Программирование для цифровых вычислительных машин. Джинел (Programming for digital computers. Jeenel Joachim. New York—London, McGraw — Hill Book Co., 1959, viii, 517 pp., ill., 93 sh.) Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 494, 10 (англ.)

7094 К. Электронная вычислительная машина для статистического анализа данных о распространении радиоволн. Грёнлунн, Лунн (An electronic computer for statistical analysis of radio propagation data. Grønlund M., Lund C. O. Acta polytechn. Appl. Math. and Comput. Mach. Ser., 1957, **1**, № 3, 44 pp., ill.) (англ.)

В книге излагаются проблемы, возникающие при анализе многочисленных данных экспериментальных исследований, связанных с распространением радиоволн, и описываются методы и оборудование, используемые Микроволновой лабораторией Академии наук Дании для автоматизации самого процесса анализа. Исходными данными для анализа являются кривые, полученные на обычных самописцах, включаемых на выходах измерительных приемников. Эти кривые представляют изменение напряженности поля во времени. Операторы с помощью полуавтоматического преобразователя превращают данные самописцев в пятипозиционный двоичный код на стандартной перфоленте. Цифровые данные считываются фототранзмиттерами с двух синхронно движущихся перфолент и вводятся в машину со скоростью 1000 чисел в 1 сек. Машина вычисляет кривые распределения анализируемых сигналов как для отдельного приемника, так и для разнесенной системы. В последнем случае сигнал определяется всегда тем приемником, напряженность поля на антенне которого в данный момент является максимальной. Данные, полученные за 24 часа (86400 измерений), обрабатываются на машине за 7 час.

Для анализа поступающих данных в машине используются селектирующие блоки, которые пропускают на входы счетчиков импульсы, соответствующие анализируемым числам, меньшим заданного эталона. Для каждого селектирующего блока задается свой эталон набором соответствующих тумблеров. Машина имеет 4 селектирующих блока и 10 счетчиков, что позволяет за одну протяжку лент через фототранзмиттеры проводить вычисления по двум заданным уровням сигнала для каждой перфоленты или по четырем уровням — для одной из перфолент. Основными элементами, используемыми в машине, являются схемы И и ИЛИ на полупроводниковых диодах и лампах и инверторы-формирователи на лампах, работающие от сигналов 0 и —24 *в*.

Счетчики импульсов используют в первых двух декадах декатроны, а в последующих — электромеханические счетчики. Максимальная скорость счета составляет 1100 *гц*. Всего в машине используются 93 лампы, 12 фотоэлементов и 10 декатронов. Приводятся подробное описание работы и фотографии всех узлов машины.

В настоящее время разрабатываются и будут встроены в машину дополнительные устройства, позволяющие проводить анализ длительности феддингов (замираний) и вычислять функции автокорреляции и взаимной корреляции. В последнем устройстве должно выполняться суммирование последовательно получаемых произведений. А. Б. Залкинд

7095 К. Вычислительная машина ИБМ-305 РАМАК. (Ordinateur I. B. M. 305 RAMAC. Paris, Cie I.B.M. France, 1959, 152 p., ill.) Bibliogr. France, 1959, **148**, № 30, 827 (франц.)

7096 К. Быстродействующие вычислительные машины: методы и применения. Холлингдейл (High speed computing: methods and applications. Hollingdale S. H. London, Engl. Univ. Press, 1959, XII, 244 pp., ill., 25 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 488, 8 (англ.)

7097 К. Электронные цифровые вычислительные машины. Смит (Electronic digital computers. Smith Charles Victor Lovett. New York — London, McGraw-Hill Book Co., 1959, IX, 443 pp., ill., 93 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1959, № 494, 10 (англ.)

7098 К. Автоматизация и вычислительная техника. Бут (Automation and computing. Booth Andrew Donald. London, Staples Press, 1958, 159 pp., ill., 25 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1958, № 466, 9 (англ.)

7099 К. Электронные вычислительные машины. Крастинг Н. И. Гос. б-ка СССР им. В. И. Ленина, Центр. политехн. б-ка. М., 1959, 29 стр., 70 коп.

7100 К. Электронная обработка данных. Сообщения о машинах с программным управлением и их применения. Серия 1. Шуфф (Ред.) (Elektronische Datenverarbeitung. Fachberichte über programmgesteuerte Maschinen und ihre Anwendg. Folge 1. Red. Schuff H. K. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1959, 55 S., ill., 6.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1959, **A**, № 12, 974 (нем.)

7101 К. Электронные вычислительные машины. Криштоуфек (Elektronické počítacie stroje. Krištoufek Karel. Prekl. z čes. rkp. Martin, Osveta, 1958, 92 s., il., 2.60 Kčs.), Bibliogr. katal. ČSR. Slov. knihy, 1958, **9**, № 8, 255 (словацк.)

7102 К. Электронные цифровые вычислительные машины. Китов (Elektroniczne maszyny cyfrowe. Kitow A. Tłum. z ros. Warszawa, Wydawn. Min. Obrony Narod., 1959, 336 s., il., 30 zł.), Przew. bibliogr., 1959, **15**, № 19, 264 (польск.)

7103 К. Труды Восточной объединенной конференции по вычислительным машинам (Proceedings of the Eastern Joint Computer Conference. Theme: computers with deadlines to meet. Papers and discuss. Joint IRE-ACM-AIEE Comput. Conf., Washington, D. C., Dec. 9th—13th, 1957. New York, N. Y., Inst. Radio Engrs, Inc., 1958, 259 pp., ill., 3.00 doll.) (англ.)

7104 К. Труды симпозиума по вопросам надежности транзисторов (17—18 сентября 1956 г., Нью-Йорк) (Proceedings of the Transistor reliability Symposium. (Sept. 17th—18th, 1956, New York City). New York, Univ. Press, 1958, 128 pp., ill.) (англ.)

7105 К. Труды Национальной конференции по электронике (Чикаго, 13—15 октября 1958 г.) (Proceedings of the National Electronics Conference. Vol. 14. (Chicago, ill., Oct. 13th—15th, 1958). Chicago, Nat. Electron. Conf. Inc., 1959, XXI, 1074 pp., ill., 7.50 doll.) (англ.)

7106 К. Малые вычислительные машины. Краткое справочное руководство. Хренов Л. С. М., Гостехиздат, 1957, 154 стр., илл., 3 р. 60 к.

Рассматриваются машины с ручной установкой исходных данных: арифмометры, десятиклавишные вычислительные автоматы и полуавтоматы ВК, полноклавишные автоматы и полуавтоматы фирм «Рейнметалл» и «Мерседес Евклид» разных моделей. Основное внимание в книге уделено выполнению различных арифметических операций на этих машинах. Подробно рассматриваются эксплуатационные возможности каждой машины. Приводится описание выполнения различных комбинированных арифметических действий. Книга содержит сведения, нужные операторам, занимающимся эксплуатацией машин, и людям, желающим познакомиться с выполнением арифметических действий на вычислительных машинах. Е. Н. Маквецов

7107 К. Счетная линейка. Краткое руководство. Семендяев К. А. М., Физматгиз, 1959, 47 стр., илл., 85 коп.

7108 Д. Исследование механизмов счета вычислительных машин с колесами Однера. Сергеев Н. П. Автореф. дисс. канд. техн. н., Моск. высш. техн. уч-ще им. Н. Э. Баумана, М., 1959

7109 Д. Некоторые вопросы теории машинного словаря. Королев Л. Н. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т точной механ. и вычисл. техн. АН СССР, М., 1959

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

7110. Исследование линий связи с помощью моделирования на цифровых машинах. Неовиус (Artificial traffic trials using digital computers. Neovius Gösta), Ericsson Techn., 1955, **11**, № 2, 279—291 (англ.)

Задача определения перегрузок телефонной сети является слишком громоздкой и сложной, чтобы решать ее обычными методами. Поэтому для определения пропускной способности сети применяются машины непрерывного действия различных типов. Такие машины строятся обычно для ограниченного класса задач. Современные цифровые универсальные вычислительные машины имеют гораздо большие возможности.

Для оценки перегрузок сети разработан метод Монте-Карло, который состоит в том, что псевдослучайные числа, возникающие при высокой скорости работы вычислительной машины, используются для определения ложных сообщений от различных источников. Эти сообщения проходят через последовательный ряд звеньев электрической цепи. Подсчитывая число сигналов, которые проходят через каждое звено в отдельности, и число сигналов, оставшихся лишними вследствие перегрузки, можно оценить пропускную способность сети.

В статье описываются попытки, сделанные на шведской электронной цифровой машине БЕСК, по оценке пропускной способности телефонной сети. Дается описание различных математических методов создания псевдослучайных чисел и два метода использования этих случайных чисел для передачи сообщений. Методы создания псевдослучайных чисел предложены Математическим центром в Амстердаме и основаны на некотором видоизменении ряда Фибоначчи.

Результаты эксперимента, полученные на машине БЕСК, по качеству такие же, как и результаты, полученные на шведском анализаторе сообщений, и такие же, как при опыте на табуляторах в Дании. Большое преимущество скоростных цифровых машин заключается в быстродействии. Так, скорость вычисления на БЕСК для опыта, использующего 2^{16} сигналов, всего 15 мин. Чтобы определить, являются ли описанные методы свободными от систематических ошибок, необходимы более тщательные исследования. Такие ошибки возникают из-за небольшого количества псевдослучайных чисел в

данных методах. Однако из результатов эксперимента видно, что опыты, использующие цифровые машины, дают во многих случаях достаточно хорошие результаты для практических целей. А. Ф. Мевис

7111. Техника обработки цифровых результатов телеизмерений в объединенных системах. Хеддинг (Digital data handling techniques of telemetering in integrated systems. Hedding L. K.), Pipe Line News, 1959, 31, № 4, 39—42, 56а (англ.)

Указывается, что в современных системах трубопроводного транспорта, как правило, головные, промежуточные и оконечные насосные подстанции полностью переведены на телеуправление. Основные параметры систем измеряются дистанционно. Результаты этих измерений сосредоточиваются на центральных диспетчерских пультах, откуда осуществляется телеуправление подстанциями, коммутационными элементами распределительных сетей и пр. Следующим шагом в направлении совершенствования и повышения надежности работы устройств автоматики, по мнению автора, должен быть перевод всего комплекса телеизмерений, выполняемых в настоящее время на аналоговой базе, на цифровую базу. Принципы цифровых телеизмерений, нашедшие в последнее время широкое применение при испытаниях управляемых снарядов и самолетов, при измерениях на спутниках, в вычислительных машинах и пр., позволяют существенно повысить точность и надежность измерений и открывают новые возможности в области автоматизации управления трубопроводным транспортом. Излагаются основные принципы действия цифровых измерительных систем, оперирующих с двоичным кодом. Объясняются способы выполнения арифметических и логических операций в этих системах, принципы действия запоминающих и декодирующих устройств и цифровых индикаторов. Указывается, что выходные устройства могут быть приспособлены не только для воздействия на индикаторы или исполнительные устройства схемы автоматики, но могут быть также использованы и для заполнения отчетных документов, оформления счетов, бухгалтерских записей, сбора статистических данных, выдачи справок, составления прогнозов и пр.

Б. Е. Бердичевский

7112. Управление станками с помощью моделирующих устройств. Фармер (Continuous analogue control. Farmer Peter J.), Aircraft Prod., 1957, 19, № 3, 90—99 (англ.)

Подробное описание фрезерного станка с программным управлением по трем координатам. Станок агрегатирован с управляющим устройством непрерывного действия, получающим исходную информацию от перфоленты. Управляющее устройство содержит блок корректировки перемещения фрезы на её износ по радиусу; с целью обеспечения гибкости управления предусмотрена возможность автономного выключения отдельных блоков управляющего устройства. Обеспечен автоматический учет начальных координат, что позволяет укреплять деталь в любом месте. Станок является результатом систематических работ фирмы EMI по развитию программного управления станками, которое интенсивно продолжается, несмотря на пока еще ограниченное их производство. В. В. Васманов

7113. Решение проблем контроля производства при помощи моделирующего устройства. Франзель (The solution of industrial control problems utilizing analog techniques. Franzel Robert T.), Midwest Res. Inst. Publs (1956), № 185, 34—44. Discuss., 44—47 (англ.)

7114. Применение моделирующего устройства в управлении производством на предприятиях химической промышленности. Си, Котс (Application of an analog computer to control of typical chemical engineering processes. Seay J. Glenn, Cotts Arthur C.), Midwest Res. Inst. Publs (1956), № 185, 125—135 (англ.)

7115. Оптимальный фильтр-регулятор с заданной импульсной переходной функцией. Зелькин Э. Г., Научн. докл. высш. школы. Электромехан. и автоматика, 1958, № 2, 94—105

Рассматривается метод построения регулятора с заданной импульсной переходной функцией для регулирования параметров, медленно меняющихся во времени. На конечном промежутке T регулятор запоминает n значений входного сигнала. По этим n значениям строится по методу наименьших квадратов аппроксимирующий многочлен степени m. Задача реализации заданной переходной функции сводится к построению счетно-решающего устройства, вычисляющего сумму вида $\sum L_i Y_i$, где L_i — заранее вычисленные коэффициенты, Y_i — значения функции в i-е моменты времени.

Приводится расчет коэффициентов аппроксимации. В качестве примера приводится расчет регулятора для получения производной от медленно меняющегося сигнала, дается схема и расчет макета регулятора на вращающемся потенциометре. Приводятся результаты испытания макета. В. П. Парамонов

7116. Помехоустойчивость непрерывных систем программного управления с магнитной записью. Шадрин В. Н., Автоматика и телемеханика, 1959, 20, № 8, 1111—1116 (рез. англ.)

7117. Развитие систем управления станков. Дикушин В. И. В сб.: Автомат. управление и вычисл. техн. М., Машгиз, 1958, 265—275

Излагается история развития систем автоматического и программного управления металлорежущими (токарными, фрезерными, сверлильными и др.) станками. Отмечаются первые работы в этом направлении, проводившиеся в Советском Союзе еще в 1935—37 гг. Рассматриваются различные способы автоматического управления: с помощью копиров, негативов, кулачковых механизмов, по программам, нанесенным на перфокарты, ленты, диски, магнитные ленты. Сравниваются системы автоматического управления непрерывного и дискретного действия. Затрагиваются вопросы подготовки исходных данных программы. Кратко описаны последние советские системы (ЭНИМС, Станкина и др.) и некоторые зарубежные. Отмечается необходимость учитывания износа инструмента при программировании.

В. А. Брик

7118. Трехкоординатный фрезерный станок с программным управлением. Колман, Грегсон, Флетт (The Fairey-Ferranti 3-D miller. Coleman R., Gregson J., Flett A.), Discovery, 1959, 20, № 2, 66—73 (англ.)

Сообщается, что английская фирма «Фэри» (Fairey) спроектировала станок с программным управлением для объемного фрезерования самолетных деталей, которые ранее изготовлялись при помощи тяжелых прессов. В основу программного управления положена цифровая вычислительная управляющая система «Ферранти». Особенностью данного станка является использование масляной пленки, полностью устраняющей непосредственный контакт между скользящими поверхностями станка. Давление масла в полученном зазоре регулируется автоматически в зависимости от нагрузки. Такая гидростатическая система согласовывает нагрузки от инерции и нагрузки, возникающей при резании, силы трения становятся совершенно «вязкими» и независящими от нагрузки на салазки станины. Указывается, что система в сущности свободна от износа, вследствие чего возрастает точность и эффективность обработки деталей на таком станке. Для управления станком применяются сервомеханизмы и оптическая измерительная система фирмы «Ферранти». В этой системе усовершенствована

лишь безлюфтовая коробка скоростей, что также способствует повышению качества изделий. Фирмой изготовлен опытный образец станка. Для некоторых деталей, обработанных на этом станке, были выдержаны требуемые размеры с точностью ±0,005 *мм* на протяжении 450 *мм*. Фрезерование четырех эллиптических дорожек одной из секций каркаса было произведено с точностью 0,0125 *мм*. При этом часть работы выполнялась при помощи программы, заданной уравнением кривой. В системе управления имеются цепи, по которым перед началом рабочего дня производится профилактическая проверка электронного оборудования.

В. Е. Кравченко

7119. К применению больших вычислительных машин в официальной статистике. Самейтат, Циндлер (Zum Einsatz von Großrechenanlagen in der amtlichen Statistik. Szameitat Klaus, Zindler Hans-Joachim), Wirtsch. und Statistik, 1958, **10**, № 6, 321—325 (нем.)

7120. Применение электронной счетной машины «Бендикс-Т 15 Д». Хосака Мамору, Дэнси когё, Electronician, 1958, **7**, № 10, 46—55 (японск.)

7121. Метод автоматического решения задач на электронной вычислительной машине. Годферно (Méthode de résolution autocommandée sur calculateur électronique arithmétique. Gaudfernau Liliane), Rech. aéronaut., 1956, № 54, 31—38 (франц.)
См. РЖЭ, 1957, № 18, 35400.

7122. Применение электрического моделирования к расчету многопролетных пологих параболических арок с затяжками. Керопян К. К., Изв. высш. учебн. заведений. Электромеханика, 1958, № 10, 12—17

7123. Большое вычислительное устройство для обработки данных при коммерческих расчетах. Постли (Large data-handling equipment as a commercial tool. Postley John A.), Manag. Sci., 1957, **4**, № 1, 92—98 (англ.)

7124. Электронные вычислительные машины в конторской работе. Салвесон (Electronic computers in business. Salveson M. E.), J. Industr. Engng, 1958, **9**, № 2, 104—122 (англ.)

См. также: 6680, 6972, 7019.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абасзадэ А. Г. 6013
Абрамов Л. М. 6012
Аветисян А. Е. 6382
Агаев Г. Н. 6536
Азбелев Н. В. 6463
Акопян С. А. 6672
Александрия Г. 6371
Алексеева О. П. 6524
Алиханова Р. И. 6536
Алихашкин Я. И. 6961
Ананьева Г. В. 6464
Андреев А. Ф. 6450, 6451
Андронов И. К. 6088 К
Андрунакиевич В. А. 6233
Антоновский М. Я. 6299, 6300
Артюшенко Л. М. 6614 Д
Арустамов Х. А. 6889 К
Архангельский А. 6286
Асап 6813
Ашкинузе В. Г. 6181

Б

Балаганский В. И. 6464
Барабошин Н. М. 6914
Барбан М. Б. 6120
Басс Ф. Г. 6583
Бахрах С. М. 6917
Башмакова И. Г. 6033
Бедельбаев А. К. 6472
Безбородников М. Ф. 6378
Белинский П. П. 6401
Березин Ф. А. 6726
Бикчантаев М. Х. 6418
Биллевич К. К. 6226
Бляшке В. 6837
Болотин А. С. 6737
Боненблуст Г. Ф. 6792
Бояджиев Г. 6476
Брадистилов Г. 6476
Бредихин Б. М. 6115
Брик В. А. 7061
Бубенников А. В. 6884 К
Бутова Г. В. 6859
Быховский Э. Б. 6981

В

Вайнберг М. М. 6736
Вакарчук Б. С. 6870, 6874 Д
Васильев А. М. 6832
Васильев Ю. Л. 6264
Векилов Ш. И. 6506, 6569
Векуа Н. П. 6372
Веретенников Л. П. 6551, 6552
Виленкин Н. Я. 6725, 6727
Вилесов Д. В. 6552
Виноградов И. М. 6109
Винтер Э. 6043
Вишик М. И. 6525
Волков Д. М. 6515
Врэнчану Г. (в подл. Врынчеану) 6923

Г

Гайдук Ю. М. 6848
Гамкрелидзе Р. В. 6553
Гармаш В. А. 6823
Гартке В. 6014
Гвоздев А. А. 6572
Гейфман Р. 6833
Гельман И. В. 6615
Гельфанд И. М. 6726, 6755 К
Гинзбург С. А. 7061
Глушко В. П. 6503
Годунов С. К. 6982
Гокиели Л. П. 6087 К
Голубев В. А. 6155
Гольдберг В. Н. 6511
Гольденвейзер А. Л. 6483
Гольденгершель Э. И. 6700
Горленко Б. С. 6886 К
Градштейн И. С. 6630
Гребенщиков В. Н. 6265
Гребень Е. С. 6991
Гробов В. А. 6546
Громыко В. П. 6220 Д
Гусейнов А. И. 6733

Д

Данилюк И. И. 6500
Демков Ю. Н. 6620
Денисов Н. Г. 6584
Денисюк И. Н. 6664
Дёйринг 6377
Дешевой Г. М. 6877
Джафаров А. С. 6345
Джрбашян М. М. 6382
Дикушин В. И. 7117
Дольский Е. Е. 6886 К
Дорфман А. Г. 6862 К
Дундученко Л. О. 6374

Е

Егоров В. А. 6616
Егоров В. Г. 6471
Еремин И. И. 6224Д

Ж

Жак С. В. 7013
Журавлев Ю. И. 6259

З

Задирака К. В. 6478
Зарецкий К. А. 6223 Д
Зарецкий Ю. К. 6842
Захаров В. П. 6444
Зелькин Э. Г. 7115
Зигель К. Л. 6598 К
Зиновьев А. А. 6020
Зотова Е. Н. 6822
Зубов В. И. 6467
Зуховицкий С. И. 6497

И

Ибрагимов И. И. 6031
Иванов А. А. 6288
Иванов А. В. 6522, 6523, 6524
Иванов В. В. 6739
Иванова В. М. 6288
Ито 6746

Й

Йокояма Г. 7062
Йонеда Т. 6292

К

Кадзами 6784
Калафати П. Д. 6013
Калашников А. С. 6521
Кандов Л. 6428
Канер Э. А. 6583
Капилевич М. Б. 6510
Карамышкин В. В. 6988
Карапетян С. Е. 6910, 6913
Касьянюк С. А. 6374
Келер Э. 6861
Керопян К. К. 7122
Ким Ю. Ц. 6537
Ким Кё Сек 6711
Кириллов Н. Е. 6823
Клопотовский И. С. 6883 К
Князев П. Н. 6713
Ковалев А. А. 6589
Коган Я. М. 7028
Колесов А. К. 6592
Комамия Я 7048
Кононенко В. О. 6544
Копачек И. 6507
Королев Л. Н. 7109 Д
Косэ 6802
Котек В. В. 6044
Котляр Я. М. 6565
Кочина Н. Н. 6585
Кравцов В. Г. 6222
Краль И. 6331
Краснеев Г. П. 6885 К
Краснощекова Т. И. 6353
Крастинг Н. И. 7099 К
Кропивницька К. Й. 6455
Крылов А. Л. 6504
Кубилюс И. П. 6124
Кублановская В. Н. 6661
Кужель А. Б. 6398
Кузин Л. Т. 7066
Куликов Н. К. 6448, 6454
Курбатов В. А. 6178
Курдгелаидзе Д. Ф. 6593
Курихара 6256
Кусуноки 6385, 6388
Кэ Чжао 6131, 6132, 6142
Кэ Шао 6184

Л

Лебедев В. И. 6959
Левитан Б. М. 6519
Леонтьев А. Ф. 6355, 6356
Летов А. М. 6554
Ли Дён Ук 6215
Лобанова Т. В. 6052
Ломковская М. В. 6009
Лопшиц А. М. 6838
Лось Ж. 6216
Лу Вэнь-дуань 6162
Лупанов Е. И. 6883 К
Любимцев Я. К. 6473

Люстерник Л. А. 6525, 6958
Ляпунов А. А. 7090

М

Малкина Р. Л. 6579
Мальцев А. И. 6091
Маркус А. С. 6702
Мартыненко В. С. 6871
Маховер Е. В. 6576
Меляховецький А.С. 6549
Меньшиков Г. Г. 7024
Микеладзе Ш. Е. 7015
Минеев М. П. 6110
Минковский Г. 6054
Мисник В. П. 6611
Мисоноу 6720
Михайлова К. А. 6219 Д
Мищенко Е. Ф. 6477
Миядзава 6794
Мовчан А. А. 6570
Мурский В. Л. 6263
Мухадзе Л. Г. 6577

Н

Наймарк М. А. 6722, 6723
Накано Т. 6251
Наумович Н. В. 6878
Нейдинг Н. М. 6693
Неймарк Ю. И. 6470
Нерсесян А. Б. 6672
Нисихира 6789
Новиков П. С. 6197
Новиков С. П. 6303
Нодзаки 6505
Норден А. П. 6045
Норкин С. Б. 6436, 6437

О

Обрешков Н. 6654
Одзава 6830
О Жен Хён 6734, 6735
Оикава 6383
Ольховский И. И. 6588
Омото 6582

П

Палей А. В. 7063
Палувер Н. В. 6876
Панькин Н. А. 6978
Пань Чэн-тун 6112
Паровиченко И. И. 6284
Пентковский М. В. 7087
Персидский К. П. 6479, 6699
Песин И. Н. 6409
Поваров Г. Н. 6258, 6267 К
Погорелов А. В. 6951
Подольный И. П. 6347
Пономарев О. А. 6417
Понтрягин Л. С. 6477
Поплавский Р. П. 6603
Попов Е. П. 6599 К
Привалов И. И. 6864 К
Пугачев В. С. 6817
Пустыльников В. С. 7063
Путята Т. В. 6060
Пятецкий-Шапиро И. И. 6394

Р

Разумова Е. Ф. 6422
Райков Д. А. 6688
Раковщик Л. С. 6983
Ремизова Н. И. 6612
Реньи 6027
Рзаев У. 6517
Ричардс Р. К. 7092 К
Роднянский А. М. 6293
Рожа П. 7026
Розин Б. 6833
Рудаев А. К. 6888 К
Румер Ю. Б. 6845
Рускол Д. Е. 6907—6909
Рыжов О. С. 6556
Рымаренко Б. А. 6347
Рюнк О. Я. 6876

С

Савин Г. Н. 6060
Сайто 6813
Сандакова Н. Н. 6221 Д
Сарымсаков Т. А. 6694
Сегре Б. 6890
Седякин Н. М. 6820
Семендяев К. А. 7107 К
Сендов Б. 6151, 6325
Сергеев Н. П. 7108 Д
Серых Г. М. 6417
Сидоров О. П. 6560
Симоненко И. Б. 6739
Синай Я. Г. 6012, 6749
Сиотани 6767, 6769
Сираждинов С. Х. 6764
Сиротин Д. Е. 6887 К
Скрипкин В. А. 6557
Славов Койчо К. 6079
Смирнова Т. Н. 6661
Смолицкий Х. Л. 6495, 6678
Соболевский П. Е. 6491
Соколов Е. И. 6737
Соколов Н. П. 6193 Д
Сорокина Н. Г. 6415
Срагович В. Г. 6819
Сретенский Л. Н. 6053
Стаматис 6035, 6036
Степанов В. В. 6481 К
Стоянов А. 6429
Судзуки 6788
Сюн Цин-лай 6360, 6380

Т

Тавадян А. Б. 6359
Тагамлицки Я. 6326
Такано 6763
Такэда 6340, 6605
Такэноути 6724
Танифудзи 6582
Татибана 6922
Темляков А. А. 6395—6397
Тимрот Е. С. 6885 К
Трайнин Я. Л. 6869
Трахтенброт Б. А. 6260
Трохимчук Ю. Ю. 6384

У

Уждавинис Р. В. 6123
Умэбаяси 6815
Ура С. 6777

Ф

Фаге М. К. 6433
Федорова Р. Н. 6867, 6868
Финкель Л. А. 6609
Фириченкова Л. Т. 6738
Флейшман Б. С. 6818
Флюгге-Лотц И. 6597 К
Фрадлин Б. Н. 6060

Х

Хаимов Н. Б. 6447
Хэйдин Н. 6957
Хара И. С. 6366
Харасахал В. Х. 6434
Харитоненко П. И. 6513, 6514
Харкевич А. Д. 6261
Хатипов А. Э. 6872
Хведелидзе Б. В. 6419
Хетагуров Я. А. 7040
Хигути 6830
Хованский А. Н. 6042, 6848
Хонда 6744
Хосака М. 7120
Хосокава М. 6427
Хренов Л. С. 7106 К
Хуа Шэн-у 6032

Ц

Цалюк З. Б. 6463
Цховребадзе Д. С. 6578

Ч

Чернин К. Е. 6363
Чернявский И. Я. 6748
Чернявский С. Ю. 6556
Чэнь Тянь-цюань 6687

Ш

Шадрин В. Н. 7116
Шахновский С. М. 6060
Шедива В. 6282, 6283
Шестаков В. И. 6262, 6266 К
Шестопал Г. А. 7090
Шилов Г. Е. 6755 К
Шимко Н. Г. 6523
Шмидт О. Ю. 6065 К
Шрагин И. В. 6319, 6736
Штокало Й. З. 6064

Э

Эльсгольц Л. Э. 6621 К
Эскин Г. И. 6497
Эскин Л. Д. 7025
Эфендиев Г. С. 6610

Ю

Юримяэ Э. И. 6649
Юрьев И. М. 6561
Јусифзадэ (Юсифзаде) Ч. Г. 6607, 6608
Юшкевич А. П. 6043

Я

Яблонский А. И. 6430
Яглом И. М. 6945
Якубик Я. 6213
Ямагути 6369
Ямамото 6161
Ян Го-цюань 6179
Яненко Н. Н. 6974
Ястребов Ю. Н. 6870

A

Ackermann W. 6103
Aczél J. 6623
Adam A. 6766
Ahlfors L. V. 6387, 6391, 6402, 6406
Akaike H. 6783
Albert A. A. 6245
Alessio S. 7057
Allendoerfer C. B. 6315
Allusson R. 6077
Alpár L. 6351
Alvarez Laso J. 6056
Andreian Cazacu C. 6399
Andrushkiw J. 6637
Arala Chaves M. 6840
Arscott F. M. 6669
Ashenhurst R. L. 7029
Atiyah M. F. 6308
Atoji M. 6662
Auslander L. 6209
Avanissian V. 6414
Avez A. 6925
Azorín Poch F. 6778
Azpeitia A. G. 6644

B

Babuška I. 6502
Baer R. 6202
Bahadur R. R. 6785
Baidaff B. I. 6063
Baily W. L. 6939
Balakrishnan A. V. 6731
Baldwin J. A., Jr 7053
Banaschewski B. 6708
Bandyopadhyay S. P. 6227
Barcus W. D. 6304
Barnard G. A. 6786
Barratt M. G. 6304

Barthel W. 6921
Bassali W. A. 6575
Bauer F. L. 6188, 6658, 7005
Baumslag G. 6203
Bazley N. W. 7004
Beale E. M. L. 6798
Beauclair W. de 7049
Beaumont R. A. 6239
Behnke H. 60 3
Bel L. 6926
Bellman R. 6803
Benneton G. 6349
Berg L. 7017
Berge C. 6273
Bergström H. 6730
Berni A. 6879, 6880, 6881
Beth E. W. 6098
Beurling A. 6406
Bielecki A. 6488
Bihari I. 6445
Bilinski S. 6268
Biran L. 6901
Blackett D. W. 6790
Blackwell D. 6762
Blom A. V. 6028 K
Bochner S. 6352
Böge W. 6759
Bonsall F. F. 6697
Booth A. D. 7098 K
Borwein D. 6648, 6651, 6954
Böttcher F. 6580
Bowen N. A. 6373
Bradis V. M. 6157
Braier A. 6543
Britton C. E. 6144
Broeder G. G. 7000
Brown A. 6714
Brown D. P. 6638
Brown M. 6290
Brož R. 6809
Bruijn N.G. de 6331
Brun V. 6049
Buchdahl H. A. 6932
Buchwalter H. 6653
Buck R. C. 6082, 6449
Bukovics E. 6952
Burau W. 6900 K
Bureau F. 6516
Burgess C. E. 6289

C

Cahen F. M. 7071
Calame A. 6218
Caldwell W. 6810
Cañizares Rozas F. 6812
Cansado E. 6996
Cannarozzo S. 6863 K
Carlitz L. 6145, 6167, 6172
Caronnet T. 6857 K
Carr J. W. III 7031
Cartan E. 6596 K
Cartan H. 6310—6312, 6684, 6686
Carteron J. M. 7071
Carvalho C. A. A. de 6306, 6307
attabriga L. 6528
Chang C. C. 6096
Chaudhuri N. P. 6211
Chaundy T. W. 6665
Cheng D. K. 6682 K
Chen Tien-ch'üan 6687
Chillingworth H. R. 6645
Chowla P. 6139
Cimbleris B. 6587
Cleave J. P. 7583
Clifford A. H. 6214
Cohen E. 6146, 6147
Cohen H. 6291
Cohen P. J. 6704
Coile R. 7082
Cole R. W. 6956
Coleman R. 7118
Collar A. R. 6628
Consiglio A. 6421
Conti R. 6466
Converti V. 6995
Coombs C. H. 6810
Cope J. I. 6040
Coroller P. 7070
Costa de BeauregardO. 6931
Coţiu A. 6953, 6985
Cotts A. C. 7114
Couffignal L. 7085
Croisot R. 6244
Crum M. M. 6370
Čulík K. 6257

D

Dal Soglio L. 6302
Dancs I. 6634
Danö S. 6816
Dantzig G. B. 6795
Danyluk I. I. 6413
Darbo G. 6301
Dasgupta S. R. 6676
Daus P. H. 6641 K
Dawoud R. H. 6575
Delpierre M. 7088
Denjoy A. 6125, 6323
Derr J. I. 7014
Destouches J.-L. 6751
Dieball H. 7091
Dieudonné J. 6217 K
Dijksterhuis E. J. 6068 K
Di Noi S. 6855 K, 6866
Dirac G. A. 6270
Divinsky N. 6234
Dobrescu E. 6328
Dolinsky R. 6350
Doob J. L. 6761
Douglis A. 6490
Droz-Vincent P. 6936
Duffin R. J. 6538
Dugundji J. 6297
Dulmage A. L. 6160, 6274
Duncan A. J. 6775
Dürbaum H. 6175
Durst L. K. 6164
Dwinger Ph. 6254
Dye H. A. 6747

E

Eells J., Jr 6315
Ehrlich L. W. Jr. 6971
Eichler M. 6129
Ellis D. 6280
Ellis R. 6710
Elrod H. G.Jr6977
Epstein D. I. 6667
Erdélyi A. 6668
Erdös P., Jr 6119, 6269, 6337, 6652
Ericksen J. L. 6559
Erismann Th. 7076
Evangelisti G. 7032

F

Fabian T. 6807
Fadini A. 6895
Fadle J. 6425
Farmer P. J. 7112
Fava F. 6836
Fazekas F. 6674 K
Fehr H. F. 6069
Fejes Tóth L. 6948
Feller W. 6512, 6728
Fenyö I. 6690
Ferry Borges J. 6814
Ferschl F. 6198
Feys R. 6106
Fiedler M. 6944
Fike C. T. 7001
Fischer E. 6960
Fischer H. R. 6742
Fischmann-Arbel A. 7058
Fisher J. L. 6807
Fisz M. 6779, 6780
Flett A. 7118
Flett T. M. 6650
Flood M. M. 6811
Floyd E. E. 6207
Flügge W. 6574
Fodor G. 6337
Foiaş C. 6715
Fort M. K., Jr 6942
Foster B. 7082
Franckx E. 7018
Franzel R. T. 7113
Frăţilă E. 6992
Freud G. 6341
Freudenthal H. 6070
Frey T. 6342, 6674 K
Fujisawa T. 6797
Fusca J. A. 7037

G

Gabovitš J. 6138
Gagliardo E. 6698
Gaffney M. P. 6529, 6530
Gaier D. 6364
Gair F. C. 6972
Gaiu E. 6148
Ganis S. E. 6643
Gardner M. 6108 K
Garsia G. 6548
Gärtner R. E. 6602 Д
Gaşpar T. 6321
Gaudfernau L. 7121
Gay R. 6846 K
Geiringer H. 6601 K
Gelbaum B. R. 6706
Gelfond A. O. 6344
Gendreu R. 7064
Gerstenhaber M. 6185
Getoor R. K. 6756
Ghermănescu M. 6026
Gillman L. 6241
Girshick M. A. 6787
Gleichgewicht B. 6947
Godeaux L. 6911
Godement R. 6318 K
Goes G. 6338
Gołąb S. 6030
Gold L. 6452
Goldberg S. 6701
Goldstine H. H. 7006
Gönenç S: 6903
Goodstein P. 6655
Goodstein R. L. 6656
Göransson K. 6456
Gosselin R. P. 6339
Gourdin M. 6613
Goursat E. 6642 K
Graiff F. 6843
Grätzer G. 6255
Green H. F. 6235
Green L. W. 6941
Greenspan D. 6964—6968
Gregson J. 7118
Greguš M. 6439, 6462
Grimsdale R. L. 7080
Grindei I. 6445
Grønlund M. 7094 K
Grothendieck A. 6309
Grzegorczyk A. 6089
Gubler H. 6829
Guglielmino F. 6487
Guion A. 6912
Günzler H. 6518

H

Hadamard J. 6496
Haefliger A. 6313, 6314
Hahn W. 6555
Haimovici C. 6189
Haimovici M. 6915
Hale J. K. 6435
Hall A. R. 6041
Hall P. 6200
Hansson L. 6456
Harary F. 6102
Harris B. 6230
Hartman P. 6460, 6482
Haupt O. 6320
Hauser W. 6900 K
Hausner A. 6705
Heady E. O. 6804
Hedding L. K. 7111
Heerema N. 6228
Heitler W. 6828
Heller A. 6316
Hellman M. 6424
Henriksen M. 6241, 6242
Herfurth G. 7022
Hersch J. 6617
Heyting A. 6099
Higgs P. 6933
Higuti I. 6830
Hill G. W. 7038
Hille E. 6440
Hiong King-lai 6360, 6380
Hlavatý V. 6937
Hollingdale S. H. 7096 K
Honda K. 6744
Horn C. 7050
Horváth J. 6343
Hosszú M. 6635
Householder A. S. 6998, 7005, 7007
Huang T. C. 6457
Huber A. 6403

I

Iakubík I. 6213
Ikoma K. 6379
Ionescu G. D. 6182
Iosifescu M. 6322
Isaac E. J. 7044
Isbell J. R. 6287
Isiwata T. 6707
Ito S. 6527
Izbicki H. 6166, 6626

J

Jacobs K. 6729
Jankiewicz C. 6928
Jeenel J. 7093 K
Jenkins J. A. 6367, 6405
Jensen E. L. 6816
Jespers P. 6680
Johnson C. H. 7047
Johnson D. 6160
Jones B. W. 6024
Jurchescu M. 6408

K

Kaasik U. 7012
Kaiser A. 6663
Kalitzin N. S. 6930
Kamat A. R. 6758
Kamke E. 6332 K
Kämmerer W. 7045
Kampé de Fériet J. 6531
Kaplansky I. 6229
Karlin S. 6787
Kato M. 6275
Kautz W. H. 7041
Kazami A. 6784
Keedy M. L. 6072, 6073
Keller H. B. 6984
Kemp R. R. D. 6438
Kennedy M. 6668

Kilburn T. 7080
Kilmister C. W. 6929
Kimura H. 6858
Kisyński J. 6488
Kitow A. 7102 K
Klug J. 6858 K
Knapowski S. 6116
Ko Chao 6131, 6132, 6142
Kodama Y. 6295, 6296
Koizumi S. 6632
Kokoris L. A. 6247
Komatu Y. 6627
König H. 6639
Koosis P. 6354
Kortum H. 7045
Koshi Sh. 6741
Kosinski A. 6314
Krabbe G. L. 6703
Krbek v. 6622
Kreisel G. 6090, 6104
Krekó B. 6835 K
Krelle W. 6801
Krettner J. 6480 K
Krishnan V. S. 6210
Krištoufek K. 7101 K
Kronsbein J. 6934
Krule I. S. 6291, 6743
Krzywoblocki M. Z. v. 6563, 6564
Kuczma M. 6920
Kulik S. 7008
Kulikowski T. 6150
Kunstetter S. 6905
Künzi H. P. 6400
Kurata S. 6275
Kuratowski K. 6029
Kusunoki Y. 6385, 6388

L

Laasonen P. 6962, 6963
Lampariello G. B. 6051
Lamprecht E. 6136
Landau H. J. 6368
Larson E. H. 6994
Lauffer R. 6158
Lauwerier H. A. 6568
Lax P. D. 6709
Leichner G. H. 7077
Leichtweiss K. 6689
Leighton W. 6465
Leipnik R. 6821
Lekkerkerker C. G. 6128
Lenoir M. 6940
Leo O. S. F. 6850
Leont'ev A. F. 6355, 6356
Leray J. 6484
Lesieur L. 6243, 6244
Lesky P. 6663
LeVeque W. J. 6171 K
Levine J. 6187
Levine L. 7069
Liebmann G. 7019
Lions J.-L. 6485, 6509
Loftsgard L. D. 6804
Lohwater A. J. 6404
Looney D. H. 7054
Lorentz G. G. 6646
Lorenzen P. 6105
Łoś J. 6097
Lovass-Nagy V. 6192 K
Lucon M. 7074
Ludford G. S. S. 6558, 6601 K
Luhn H. P. 7081
Łukaszewicz L. 7023
Lumiste Ü. 6046
Lund C. O. 7094 K
Luther M. 6799
Lu Wen-twan 6162

M

McCoy N. H. 6231
Macdonald I. D. 6201
McGregor J. L. 6668
McKenzie L. W. 6806
McKibben J. 6692
MacLane S. 6317
Macrobert T. M. 6666
McWeeny R. 7027
Magnus K. 6542
Mahalanobis P. C. 6022
Maiellaro M. 6841
Mąkowski A. 6141, 6143, 6149, 6169
Mamuzić Z. 6740
Manaresi G. 6458
Mandelbrojt J. 6754
Manfredi B. 6975, 6976
Mann H. B. 6501
Manwell A. R. 6066 K
Marcus M. 6186
Marcus S. 6327, 6335
Mardešić S. 6298
Mariot L. 6844
Marshall D. P. 6994
Martin A. 6613
Martinek J. 6581
Massera J. L. 6474
Masuyama M. 6770, 6771
Matthews G. 6253
Mauldon R. G. 6800
Maurer I. 6196
Mauri J. T. 6019
Meier D. A. 7055
Meissinger H. F. 7069
Meixner J. 6639
Mendelsohn N. S. 6160, 6274
Metelski K. 6849
Metropolis N. 7029
Meyer C. 6137
Meynieux R. 6426
Miellou E. 6856 K
Mihailović D. 6860
Mingauda L. 6834
Mirra C. 6854
Mises R. von 6601 K
Mitchell A. R. 6954
Mizohata S. 6486
Mladyenovitch V. 6993
Mohr E. 6441, 6442
Moór A. 6919
Moore P. G. 6824
Morawetz C. S. 6535
Morrey C. B., Jr 6540
Moser L. 6114
Moshman J. 6768
Mostowski A. 6089
Motoo M. 6760
Moyls B. N. 6186
Mrówka S. 6285
Münch G. 6590
Munro W. D. 7016
Murray F. J. 7006

N

Nagao H. 6206
Nanda V. S. 6170
Narain R. 6671
Narayana T. V. 6757
Nardini R. 6586
Nash J. 6498
Nehari Z. 6465
Neovius G. 7110
Neumann J. von 6793, 7006
Nevanlinna R. 6047, 6493, 6494
Newman D. J. 6929
Newman E. A. 7046
Newman M. 6111, 6130
Newns W. F. 6330
Nicolescu L. J. 6732
Nieto J. 6712
Nikol F. 6858 K
Nisihira S. 6789
Nitka W. 6294
Nitsche J. A. 7003
Nöbauer W. 6198
Noguera R. 6039
Nolin L. 6092
Norman R. Z. 6272
Northcott D. G. 6250
Nozaki Y. 6505
Nyström E. J. 6016

O

Oakland L. J. 7056
Oberschelp W. 6100
Oeconomidis N. 6333
Ogasawara T. 6719
Olech C. 6446
Olkin I. 6633
Olver F. W. J. 6432
O'Meara O. T. 6225
Omoto O. 6582
Opial L. 6459
Orey S. 6093
Osserman R. 6368, 6390
Ostrom T. G. 6943
Ostrowski A. M. 6990
Ozawa M. 6411, 6830
Özoklav H. 6562

P

Pagni M. 6526
Pan Cheng-tung 6112
Parker E. T. 6159
Párniczky G. 6835 K
Parodi M. 6606
Parter S. V. 6970
Pask G. 7084
Paskalew G. 6647
Pathria R. K. 6170
Patil B. S. 6677
Patin H. A. 6023
Pawelski W. 6492
Pearcey T. 7038
Peremans W. 6232
Perisastri M. 6163
Perkal J. 6017
Perret R. 7059
Pfluger A. 6386, 6392
Pham Mau Quan 6844
Philip J. R. 6973
Piccard S. 6194, 6195
Pichler H. 6591
Pickert G. 6248
Pintér L. 6835 K
Piranian G. 6652
Pirl U. 6361, 6362
Pisot C. 6085 K
Pitt H. R. 6659 K
Plajner R. 6156
Platzman C. W. 6979
Pliś A. 6489
Poénaru V. 6276—6279
Polachek H. 6980
Polkinghorne J. C. 6753
Popa I. 6048, 6059
Popper K. R. 6025
Postley J. A. 7123
Povarov G. N. 6258 6267 K
Prodi G. 6485
Protter M. H. 6499
Prouse G. 6541
Pucci C. 6539

Q

Quandt R. E. 6773

R

Rabin M. O. 6272
Radó F. 7009
Raisz I. 6348
Rajaoja V. 6805
Rankin R. A. 6393
Rao J. R. 6935
Rao V. V. L. N. 6673
Rapaport E. S. 6199
Rasiowa H. 6094
Raymond F. H. 7067
Read R. C. 6271
Ree R. 6246
Rees C. E. 6852
Reeve J. E. 6946
Reichelderfer P. V. 6329
Reissig R. 6453
Rembser J. 6960 K
Renaudie J. 6938 Д
Reynolds J. B., Jr 7065
Richardson R. W 6207
Richmond D. E. 6640
Rieger G. J. 6117
Rios S. 6018
Robertson F. 6075
Robusto C. C. 6851
Rodeja F. 6140
Rogers J. L. 7053
Roşcău H. 6346
Roseau M. 6571
Rosenblatt M. 6765
Rossing T. D. 7056
Roux L. 6856 K
Royden H. L. 6787
Rubio Sanjuan J. 6086 K
Rudin W. 6750
Rund H. 6924
Ryll-Nardzewski C. 6089

S

Saitô M. 6208
Saito T. 6252
Sălăgean I. 6328
Salmon W. C. 6021
Salveson M. E. 7123
Salzmann H. 6249
San Juan R. S. 6812
Sasieni M. W. 6607
Satake I. 6683, 6685
Satyanarayana M. 6165
Sauvage A. 7089
Savadatti M. I. 6677
Savage R. I. 6825
Schafer R. D. 6010
Schäffer J. J. 6696
Schechter S. 6997
Scheidegger A. E. 6827
Schellenberger G. 6533
Schenkman E. 6237
Schiffer M. 6365, 6416, 6420 K
Schinzel A. 6133, 6141, 6153
Schlomiuk N. 6180
Schmitt A. 7021
Schot S. H. 6558
Schröder J. 6989
Schröder K. 6050
Schuff H. K. 7100 K
Schuster C. N. 7030
Schwerdtfeger H. 7011
Scott D. 6107
Seal K. C. 6826
Seay J. G. 7114
Šedivá V. 6282, 6283
Sedláček J. 6152
Seebach K. 6081
Segal I. E. 6721
Selvini A. 6853
Shafer R. E. 6625
Shanks D. 6121
Shannon C. E. 7078
Shapiro I. I. 6600 K
Shapley L. S. 6791
Shelly E. P. 6538
Shepherdson J. C. 6101
Sheridan P. B. 7036

Shestakov V. I. 6262, 6266 K
Shimura G. 6898
Shiotani (Siotani) M. 6767, 6769
Shirai T. 6281
Sîcikov A. F. 6157
Sieber N. 6999
Sierpiński W. 6154, 6336
Sikkema P. C. 6636
Sikorski R. 6094, 6334
Singh A. N. 6037
Singh S. K. 6375
Singleton R. C. 7044
Smart D. R. 6716
Smith C. V. L. 7097 K
Smith H. J. 7000
Solla Price D. J. de 6034
Sommer F. 6918
Spampinato N. 6891—6894, 6896, 6897
Specht W. 6174
Spencer D. C. 6420 K
Spruch L. 6595
Srivastav R. P. 6376
Stamatis E. 6035, 6036
Stampacchia G. 6508
Stein E. W. 6865
Stein P. 7079
Stein S. K. 6212, 6950
Steinfeld O. 6236
Stenker H. 6999
Stevens J. W. 6168
Stokes A. 6468
Stoll W. 6412
Stone V. W. 6080
Storchi E. 6618
Straube F. 7045
Strebel K. 6410
Stuart A. 6781
Subba Rao M. V. 6134, 6381
Su Buchin 6904
Sumner F. H. 7080
Suppes P. 6107
Suszko B. 6097
Suyama Y. 6461
Suzuki S. 7020
Suzuki Y. 6788
Švec A. 6916
Swanson C. A. 6431
Swierczkowski S. 6126
Szameitat K. 7119
Szász P. 6949
Szczepiński W. 6875
Szép J. 6205
Szökefalvi-Nagy B. 6717
Szüsz P. 6127
Szybiak A. 6532

T

Takahashi K. 6469
Takano K. 6763
Takeda K. 6340, 6605
Tanifuji S. 6582
Tannaka T. 6135
Tawde N. R. 6677
Tellefsen H. 7057
Teller O. 6858 K
Teodorescu P. P. 6573
Theiss E. 6835 K
Thiele H. 6095
Thiry Y. 6547
Thrall R. M. 6810
Todd J. 7033
Tokad Y. 6638
Törnqvist L. 6782
Touschek B. 6752
Tricomi F. G. 6534, 6670 K
Tryon R. C. 6772
Tschobanow W. 6647
Tucker A.-W. 6071
Tunis C. J. 7080

U

Ueno S. 6675
Ulam S. 7079
Urabe M. 6475

V

Vâlcovici V. 6619
Vallée R. 6927
Vandiver H. S. 6176
Varga O. 6191
Varga R. S. 6969
Varnavides P. 6113
Vaughan H. 6987
Veldkamp F. D. 6240
Vernotte P. 6986
Vervaecke 6177
Vickers T. 7043
Vidav I. 6190, 6691
Villa M. 6839
Villi C. 6594
Viterbo G. 6324
Vogel W. 7068
Voorhees E. A. 7039
Vooys C. J. 6038
Voss K. 6906
Výborný R. 6502

W

Wadhwa Y. D. 6566
Wagner A. 6873
Wagner H. M. 6776, 6796
Wallace D. L. 6774
Walsch W. 6074
Walsh J. E. 6799
Wang Yuan 6122
Watanabe Y. 6624
Watson J. 6567
Weber M. 6550
Weil A. 6899
Wermer J. 6357, 6358, 6389
Wette R. 6062
Weyl F. J. 6084 K
Wheelon A. D. 6590
Whyburn W. M. 6641 K
Widom H. 6718
Wilcox M. S. 6015
Wild J. 6183
Wilf H. S. 6955
Wilkinson J. H. 7010
Wintner A. 6423, 6660
Wiśniewski K. 6831
Wood I. E. 6681
Wouk A. 7002
Wright E. M. 6657
Wright M. A. 7046
Wu Wen-tsün 6305
Wynn P. 7034

Y

Yacoub K. R. 6204
Yamamuro S. 6745
Yardeni A. 6807
Yates R. C. 6902
Yeh G. C. K. 6581
Yeh Yen-chien 6443
Yin Wen-lin 6118
Yosida S. 6520
Yûjôbô Z. 6407

Z

Zajac E. E. 6574
Zamansky M. 6085 K, 6695
Zaubek O. 6629
Zeller K. 6646
Zemanian A. H. 6679
Zemmer J. L. 6238
Zervos S. 6173
Zindler H.-J. 7119
Zwerger M. 6858 K

ПОПРАВКИ И ДОПОЛНЕНИЯ

К реф. 5482 (1957)

В библиографическом описании к выходным данным следует добавить: C. r. Acad. sci., 1956, **242**, № 13, 1677 — 1679.

К реф. 2221 (1958 г.)

Статья написана на французском языке, а не английском, как ошибочно указано в библиографическом описании.

Также ошибочно указано, что реферат переведен из Math. Revs, тогда как он написан Л. Е. Майстровым.

К реф. 5730

В 8-й строке сверху вместо $z|_{a=x}$ должно быть $z|_{x=a}$.

*К реф.*5744

17-я строка сверху: вместо C^1 должно быть C'.

К реф. 5756

В первой колонке, 2-я строка сверху, должно быть $F \in C^1$ вместо $F \in C^2$.

К реф. 5778

Вместо u должно быть везде U; вместо $\Psi - V$.

К реф. 7741

В 30-строке сверху вместо $D \cup D' \subseteq H$ должно быть $D \cup D' \subseteq H$.

К реф. 7749

20-я строка сверху: вместо слов „на ось" следует читать „на ось t".

К реф. 10292

Строка 15-я сверху: написано a_k, следует α_k.

Строка 25-я сверху: следует опустить второй знак равенства. А. Ф. Филиппов

К реф. 2601 (1959)

10-я строка снизу — напечатано $(x + F)$, $(x, t +)$, следует $(x + F(x, t +)$.

К реф. 26_6

Примечание редакции. Более подробный анализ теоремы прореферированной статьи показал, что эта теорема, вопреки утверждению референта, не может быть получена из классической теоремы сравнения.

К реф. 2631

7-я строка снизу: напечатано $\geqslant -ax$, следует $\geqslant -a(x)$.

К реф. 4404

Реферат на статью С. У. Куртякова следует изменить так: «Известный эквивалент гипотезы Римана для $\sum_{n<x} \Lambda(n) = x + o(x^{1/2+\varepsilon})$ обобщается для случая прогрессии и $L(s, \chi)$. А. И. Виноградов

К реф. 5388.

2-я строка сверху: вместо „Падова" следует читать „Падуя".

К реф. 5473

В правой колонке, 5-я строка сверху: напечатано Р. Грассмана, должно быть П. Грассмана.

Б. В. Бирюков

К реф. 6016

В работе В. И. Аносова содержатся предложения, которые были известны раньше. Теорема 4 и ее доказательство совпадают с формулировкой и доказательством достаточности теоремы 4. 2 моей работы (Успехи матем. наук, 1952, **7**, вып. 4), а доказательство теоремы 2 совпадает с доказательством достаточности теоремы 1. 2 той же моей работы. Доказательство теоремы 3 совпадает с доказательством необходимости теоремы 3 другой моей работы (Докл. АН СССР, 1951, **78**, № 5). М. М. Вайнберг

К реф. 6873

В заглавии статьи вместо „неголономных" следует читать „неоднородных". Ю. С. Богданов

К реф. 7994

Фамилию автора статьи следует читать: Беришвили. А. К. Харадзе

К реф. 9330

Стр. 143, строка 7-я сверху: перед знаком равенства пропущен x. С. С. Кислицын

К реф. 9332

В 4-й строке снизу следует читать:

$$\max_{\bar{p}} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{p}_{ij},$$

С. С. Кислицын

К реф. 9758

В примечании референта следует читать: См. также реф. 9743. И. Ш. Славутский

К реф. 9945

В п. 20 автор излагает некоторые результаты Дюге. Однако цитируемые им результаты ошибочны (см. РЖМат, 1957, 4750 и 4751). А. А. Гольдберг

К реф. 10935

Строки 16 — 19 сверху следует читать так: „В разложении $H^n(\pi_{m+n}) \cong H^n(z) \otimes \pi_{m+n} + \mathrm{Tor}(H^{n+1}(z), \pi_{m+n})$ пусть G_1 означает прообраз $(n+1, n-1)^m$ в $H^n(\pi_{m+n}) \otimes \pi_{m+n}$, а G_2 — прообраз в $\mathrm{Tor}(H^{n+1}(z), \pi_{m+n}$."

К реф. 203 (1960)

Строка 3-я снизу: вместо „произведение Уитни" должно быть „произведение Колмогорова — Александера".

К реф. 225

Г. П. Толстов сообщил в редакцию, что он в статье (Докл. АН СССР, 1939, **22**, № 6) дал пример такого же рода, что и изложенный в прореферированной статье. Он доказал при этом связанное с рассматриваемым вопросом некоторое положительное утверждение.

К реф. 1312

В строке 4-й (начало реферата) вместо «Обобщаются результаты» должно быть «Сообщаются результаты».

И. Ш. Славутский

К реф. 1627

Строка 2-я снизу: вместо $\lambda \overline{f}$ должно быть $\overline{\lambda f}$.

К реф. 1707

Стр. 100, 7-я строка снизу: неравенство должно быть обозначено номером (1). А. Д. Мышкис

К реф. 2833

Вместо $f\left(\frac{r_k}{r_n}\right)\left(\frac{r_k}{r_n}\right)$ должно быть $f\left(\frac{r_k}{r_n}\right)\left(\frac{r_k}{r_n}\right)$.

Подпись референта следует читать: Б. Э. Апарисио

К реф. 2834

Вместо „параллепипеде" (2 раза) должно быть „параллелепипеде".

К реф. 2863

Левая колонка, 6-я строка сверху: напечатано $D((E$, должно быть $D((E$; 2-я строка снизу: следует читать „тождественного нуля".

К реф. 2867

Левая колонка, 1-я строка снизу: вместо „на" надо „она".

К реф. 2879

В правой колонке, в строке 12-й сверху условие $\int_0^l y'(Dy)'' dt > 0$ следует обозначить (*), а в строке 13 вместо (3) читать (*).

К реф. 2917

7-я строка снизу: должно быть $b(x) > M(1 + |x|)^{4+\alpha}$ $(\alpha > 1)$.

*К реф.*2933

Правая колонка, 11 и 14 строки сверху: вместо k курсивного должно быть k прямое.

К реф. 3038

Левая колонка, 2-я строка снизу: вместо $\zeta_{T\ T+}$ должно быть $\zeta_T\ \zeta_{T+}$.

К реф. 3149

Стр. 103, левая колонка, 5-я строка снизу: следует читать $\sum_{k=0}^{m} A_{m-n}x^k = 0$.

К реф. 3163

Строка 4-я снизу: в ссылке вместо 1959 должно быть 1951.

К реф. 3215

Левая колонка, строка 14-я снизу: напечатано el_t, следует e_t.

К реф. 3249

Стр.	Строка	Напечатано	Должно быть
121	16 снизу	P_m^b	p_m^b
"	8 "	движения записываются	движения (1) и (2) записываются
122	6 сверху	предельным	начальным

К реф. 3280

В строке 7-й сверху должна быть $\Sigma_{n=[D-At]}^{\infty}$

С. С. Кислицын

К реф. 3484

Вместо $\frac{B_s}{B_{s+k}}$ следует читать $\left|\frac{B_s}{B_{s+k}}\right|$.

К реф. 3896

8-я строка сверху: вместо «в каждой точке дополне-ния» следует читать «в каждой внутренней точке дополнения».

П. Л. Ульянов

К реф. 4190

Подпись референта следует читать: Г. Ф. Кангро

К реф. 3913

Рассмотренная в прореферированной статье задача при более общих предположениях изучалась ранее Б. А. Рымаренко, которым были установлены соответствующие теоремы существования, единственности, а также характеристические свойства экстремального полинома (Докл. АН УзССР, 1950, № 2; 1952, № 7).

А. Л. Гаркавый

К реф. 4363

В заглавии реферата вместо «d'une» должно быть «d'une».

С. С. Кислицын

К реф. 4883

Первую строку заглавия следует читать так: «4883. Пифагоровы числа. Беницкий (Numerele...

К реф. 5999

Строку 30-ю следует читать так: «...пользуется для получения данных, необходимых для»

Технический редактор *Г. А. Шевченко*